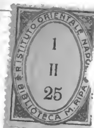

FONDO PIZZOFALCONE


ISTITUTO ORIENTALE NAPOLI
BIBLIOTECA M. RIPA
1
II
25



TRAITÉ

DE NAVIGATION.

CET OUVRAGE SE TROUVE AUSSI

CHEZ MESSIEURS

COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

BACHELIER, Libraire, quai des Augustins, n.° 55.

FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la Marine et l'Architecture, rue Thionville, n.° 10.

ARTHUS BERTRAND, Libraire, rue Haute-Feuille, n.° 23.

BERNARD, Libraire de l'École Polytechnique et de celle des Ponts et Chaussées, quai des Augustins, n.° 31.

BOSSANGE et Compagnie, rue de Tournon, n.° 6.

DE SOURDON, Éditeur de l'Atlas Historique de *A. Lesage*, et Libraire de *S. A. I. la Princesse de Bade*, rue de la Jussienne, n.° 15.

COLNET, Libraire, au coin de la rue du Bac et du quai Voltaire.

TREUTEL et WURTZ, Imprimeurs-Libraires, rue de Lille, n.° 17.

DELAUNAY, Palais-Royal, galerie de bois, n.° 243.

LENORMANT, Imprimeur-Libraire, rue des Prêtres-Saint-Germain-l'Auxerrois, n.° 7.

MONGIE, aîné, cour des Fontaines, n.° 1.

COLAS, Imprimeur-Libraire, rue du Vieux-Colombier, n.° 26, près la Croix-Rouge, faubourg Saint-Germain.

DEBRAY, rue Saint-Honoré, n.° 168.

BRUNOT LABBE, quai des Augustins.

TRAITÉ

DE NAVIGATION,

PAR J.-B.-E. DU BOURGUET,

ANCIEN OFFICIER DE LA MARINE, ET PROFESSEUR DES PREMIÈRE ET SECONDE CLASSES DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE IMPÉRIAL :

OUVRAGE

APPROUVÉ PAR L'INSTITUT DE FRANCE, ET MIS A LA PORTÉE DE TOUS LES NAVIGATEURS.

. . . . Art audacieux
Qui pour franchir les mers, interrogea les cieux;
Art puissant, qui de l'homme a doublé la patrie.
ESMÉNARD, *poëme de la Navigation*, 1.er chant.





A PARIS,

CHEZ l'AUTEUR, rue Saint-Jacques, n.° 121.
FAIN, Imprimeur-Libraire, rue Saint-Hyacinthe-Saint-Michel, n.° 25.

M DCCC VIII.

AVIS.

Tout Exemplaire doit être signé de l'Auteur, comme ci-dessous. Celui qui ne le sera pas, devra être regardé comme une contrefaçon et une usurpation de propriété, qui sera poursuivie conformément à la Loi.

Du Bourguet.

RAPPORT

De MM. Rochon, Bougainville et Delambre, Commissaires nommés par l'Institut de France, pour examiner *le Traité de Navigation de M. Du Bourguet,* ancien Officier de la Marine, et Professeur de Mathématiques au Lycée impérial;

Lu à la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques, dans sa Séance du lundi 22 février 1808.

L'Auteur s'est proposé ce problème général : *Étant en mer, déterminer pour un instant quelconque le point du globe où se trouve le vaisseau, et diriger sa route de manière à se rendre le plutôt possible au lieu de sa destination.*

C'est aussi l'objet des nombreux traités qui ont déjà paru en diverses langues. Mais la plupart des auteurs se sont contentés de donner les notions d'astronomie ou de calcul strictement nécessaires, et se sont attachés à détailler les pratiques plus qu'à développer les démonstrations et l'esprit des méthodes. M. Du Bourguet s'est tracé un plan plus instructif et plus vaste. Il s'applique à démontrer d'une manière rigoureuse et souvent nouvelle toutes les règles qui doivent diriger le navigateur; à chercher des solutions directes de tous les problèmes nautiques; et quand la nature de la question n'en permet pas de ce genre, au lieu de se borner, comme on fait ordinairement, aux tâtonnemens et aux approximations successives, il cherche dans le calcul différentiel les corrections que demandent les suppositions approximatives qu'il a été forcé de faire au commencement du calcul. Cette marche est plus géométrique et plus satisfaisante; elle doit conduire souvent à des procédés plus courts et plus sûrs ; ainsi l'idée fondamentale mérite déjà l'approbation de la classe et la reconnoissance des navigateurs. Il nous reste à examiner l'exécution.

L'auteur traite d'abord de la confection des cartes marines, et commence par les cartes plates dont il fait remarquer les défauts et les erreurs qu'il exprime en formules trigonométriques. A l'article des cartes réduites, il donne une méthode fort simple et qui lui est particulière, pour tenir compte de l'aplatissement de la terre. Elle emploie les latitudes corrigées dont Duséjour a fait un si grand usage. On peut arriver au même but par une formule qui n'emploie que les latitudes vraies. M. Du Bourguet donne aussi cette méthode, en nommant l'auteur qui la lui a fournie.

Passant ensuite aux problèmes fondamentaux de la navigation, il détaille avec soin la construction et l'usage de tous les instrumens. Il réduit toutes les pratiques en formules générales, sans négliger pourtant les procédés graphiques auxquels tant de marins accordent une préférence si peu ré-

fléchie, qu'il tâche de combattre, en exposant avec détail la marche et les avantages du calcul.

Le second livre est consacré aux connoissances astronomiques indispensables, ou même simplement utiles aux navigateurs, et aux différentes observations qu'on peut avoir occasion de faire à la mer ou sur le rivage.

Parmi les problèmes que l'auteur a traités avec le plus de soin, nous citerons celui qui fait trouver la hauteur du pôle par deux observations d'un même astre, hors du méridien. Ce problème est célèbre sous le nom de Douwes qui l'avoit renfermé dans des tables commodes, mais simplement approximatives. L'auteur donne ici des méthodes pour corriger les erreurs reprochées à Douwes; en sorte que les navigateurs peuvent employer la solution avec plus de confiance et moins de danger.

Nous citerons encore l'observation simultanée de deux astres connus, pour en déduire la hauteur du pôle. Maupertuis avoit donné de ce problème une solution analytique qui n'étoit rien moins que commode Pézénas l'avoit traité d'une manière trigonométrique beaucoup plus aisée. M. Du Bourguet a réduit la solution trigonométrique en formules générales mieux adaptées à l'usage des logarithmes. Il donne pareillement une forme plus logarithmique au problème qui fait trouver à la fois la hauteur du pôle et la déclinaison de l'astre par trois hauteurs et les intervalles des observations. Ce problème, dont plusieurs géomètres célèbres ont daigné s'occuper, est au reste plus curieux que vraiment utile.

L'auteur passe ensuite aux circonstances les plus favorables à la détermination de l'heure vraie, et aux modifications que la marche du vaisseau dans l'intervalle des observations nécessite dans la formule de correction pour les hauteurs correspondantes.

Il donne les moyens de déterminer les variations du compas et l'azimut d'un objet terrestre, par la distance de cet objet à un astre connu combinée avec la hauteur de cet astre, et sans se servir du compas de variation.

Enfin, dans les derniers chapitres, l'auteur présente avec tous les développemens utiles, le calcul de la longitude, par l'observation des distances de la lune au soleil ou aux étoiles. Il préfère la formule de Borda; mais il explique également plusieurs autres méthodes dont il discute les inconvéniens et les avantages, et dont il évalue les erreurs au moyen du calcul différentiel. Il y ajoute des exemples complets et des types fort clairs de toutes les opérations numériques ou logarithmiques.

Il rejette dans des notes tous les éclaircissemens qui ne lui paroissent pas indispensables aux navigateurs ordinaires, mais qui sont de nature à intéresser celui qui sera plus géomètre.

Ces notes composent à elles seules près d'un tiers de l'ouvrage entier; elles forment quelquefois des mémoires complets sur des points de théorie astronomique ou géométrique. Dans la première, par exemple, on trouve les formules de l'auteur pour tirer de la mesure des degrés la véritable figure du méridien, en supposant les accroissemens des degrés proportionnels à la puissance n des sinus de latitude.

Cette théorie, quelqu'importante qu'elle soit, paroît moins nécessaire aux navigateurs, et les géomètres la trouveront ailleurs traitée d'une manière plus savante et plus complète; mais les formules de M. Du Bourguet sont plus simples et plus élémentaires. Dans d'autres notes, l'auteur entreprend de donner une idée générale des principales inégalités de la lune, et des influences respectives de la lune et du soleil sur les phénomènes des marées.

Il donne de nouvelles formules pour le problème de Képler. Au lieu d'exprimer directement l'équation du centre par une série analytique à l'ordinaire, c'est le sinus et le cosinus de l'anomalie vraie qu'il exprime par une série fonction de l'excentricité et de l'anomalie moyenne. Il se rencontre des cas où l'une des deux formules cesse d'être assez convergente; mais l'autre alors l'est au contraire davantage, et elles peuvent toujours se suppléer l'une et l'autre. Ce sera toujours un inconvénient d'être obligé de changer de formule suivant les cas. L'auteur y trouve l'avantage d'avoir pour le rayon vecteur une expression plus simple que la série ordinaire.

Les autres notes, plus véritablement utiles aux marins, démontrent les formules différentielles dont l'auteur s'est servi pour corriger les solutions indirectes, et pour fixer la limite des erreurs qu'on peut se permettre dans la vue de ne pas allonger inutilement les calculs; ou bien elles servent à expliquer la construction des tables.

L'ouvrage est terminé par la collection de toutes les tables qui sont nécessaires aux calculs nautiques. L'auteur les a construites suivant ses propres formules. Il s'est évidemment proposé de répandre parmi les marins les connoissances analytiques qu'il possède, et dont son expérience en qualité d'ancien officier de la marine lui a démontré l'utilité. Ce projet est d'un bon citoyen, d'un excellent esprit. Mais pour atteindre plus sûrement ce but, peut-être valoit-il mieux être plus sobre de détails scientifiques, et les restreindre aux problèmes vraiment nautiques. Quoique les objets étrangers à la navigation soient généralement renvoyés aux notes, cependant le texte renferme encore des développemens qui peuvent effaroucher nombre de marins. Mais le remède est aisé: si on ne les porte pas dans les notes, on peut les imprimer d'un caractère différent, pour annoncer qu'on peut les passer dans une première lecture (*).

Nous pensons que cet ouvrage doit être utile aux marins, non-seulement pour la solution plus exacte, et même raisonnée des problèmes qu'il renferme, mais aussi pour leur donner l'esprit géométrique propre à les guider dans les recherches que nécessitent les circonstances qu'on n'auroit pas prévues, et qui demanderoient des attentions particulières.

Signé ROCHON, BOUGAINVILLE, DELAMBRE Rapporteur.

La Classe approuve le Rapport, et en adopte les conclusions.

Signé DELAMBRE, Rapporteur.

(*) Pour me conformer à cette observation, j'ai fait précéder les articles cités d'un astérisque. (*Note de l'Auteur.*)

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

Réunir à la plus grande exactitude la simplicité dans les méthodes et dans les théories qui y conduisent; enfin, mettre dans les mains des navigateurs qui veulent apprendre l'art nautique ou le pilotage, un ouvrage qui fût utile à tous, depuis le plus instruit dans les sciences exactes jusqu'à celui qui ne sait que les premières règles de l'arithmétique, est le but auquel je me suis proposé d'atteindre en composant ce *Traité de Navigation*. Puissent les efforts que j'ai faits pour y parvenir, avoir un résultat heureux, et prouver au corps de la marine dans lequel j'ai servi près de seize ans, que mon plus vif désir seroit de contribuer, suivant mes foibles moyens, à l'élévation de ce corps au degré de gloire et de grandeur où tout nous fait présumer qu'il arrivera bientôt, puisque telle paroît être actuellement la volonté du héros qui règne sur la France, et dont le génie dirige presque tous les gouvernemens du continent vers la réussite des grands projets qu'il a conçus pour assurer le bonheur et la tranquillité de l'Europe entière!

Je ne m'arrêterai pas à faire connoître le plan, l'ordre et la marche que j'ai suivis dans ce *Traité de Navigation*, puisque toutes ces choses sont exposées d'une manière claire et précise dans le Rapport fait à l'Institut de France par l'un de ses plus illustres membres, au nom de la commission que la classe des sciences physiques et mathématiques avoit nommée pour examiner l'ouvrage; et qu'outre cela j'ai placé à la fin du volume une table sommaire suffisamment étendue de tous les objets qui y sont traités. Mais j'occuperai d'une manière plus utile les lecteurs de ce Discours : 1.° en motivant la préférence que j'ai été obligé de donner à l'ancienne division du cercle et du temps

sur la nouvelle; 2.° en donnant les raisons qui m'ont fait préférer les méthodes du calcul direct à celles du calcul purement tabulaire, et particulièrement aux méthodes graphiques; 3.° en indiquant à chaque classe de navigateurs voulant exercer l'art nautique, la manière de se rendre la plus utile possible l'étude de cet ouvrage.

De la division décimale du cercle et du temps.

Quelqu'avantageuse que seroit cette division dans les ouvrages d'astronomie, et par conséquent dans ceux de navigation, et quoique l'un des plus grands géomètres connus l'ait adoptée dans sa *Mécanique Céleste;* cependant il m'étoit impossible de rendre mon ouvrage généralement utile en me servant de la division décimale, puisque les tables astronomiques, et particulièrement la *Connoissance des temps* ou *des Mouvemens célestes,* dont tous les marins font un si grand usage, sont calculées suivant l'ancienne division sexagésimale. Néanmoins, j'ai profité de la simplicité du calcul décimal dans quelques notes indépendantes des opérations numériques dont les marins doivent se servir; et parmi ces notes il y en a deux destinées à faire connoître ces divisions, et les avantages que l'on en pourroit retirer dans les calculs astronomiques appliqués à l'art nautique.

Des méthodes graphiques et tabulaires.

Ces méthodes présentent au premier aspect, une facilité et une simplicité qui ont souvent fait leur réputation; mais bientôt, lorsqu'on veut en faire l'application, l'on est étonné de voir les difficultés et les longueurs s'élever sur une route que l'on s'étoit flatté de parcourir en peu de temps, et sans presqu'aucun travail : enfin, le dégoût pour ces méthodes suit immédiatement, lorsqu'on réfléchit sur l'inexactitude des résultats, surtout de ceux obtenus par des procédés purement graphiques. Cependant nous avouons qu'il y a des méthodes graphiques qui sont extrêmement ingénieuses, et l'on peut quelquefois

s'en servir comme de moyens accessoires, lorsqu'on a sous la main les instrumens inventés pour l'exécution des méthodes en question ; il en existe même qui sont utiles, et dont j'ai parlé dans cet ouvrage. J'ai aussi fait mention au chapitre x, art. 273, d'une excellente méthode tabulaire pour la réduction des distances; mais, quelque simple qu'elle soit, elle ne l'est pas davantage que la méthode que j'ai exposée aux articles 273 et suivans, et qui n'exige aucune table étrangère à celle des logarithmes.

Moyen de rendre la plus avantageuse possible la lecture de ce Traité de Navigation.

Les différens degrés d'instruction dans les sciences exactes qu'ont les navigateurs qui veulent exercer l'art nautique, soit comme officier de la marine impériale ou de la marine marchande; soit comme pilote, ou appartenant à la timonerie, me font diviser les marins en trois classes. La première est celle qui se compose d'anciens élèves de l'École Polytechnique, ou de marins géomètres qui ont autant d'instruction dans les sciences mathématiques que les élèves de cette célèbre école, lorsqu'ils en sortent après leurs deux ans d'études. Dans la seconde classe je comprends ceux qui savent leurs élémens d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et les deux trignométries. Enfin, dans la troisième classe sont compris les navigateurs qui ne savent que les quatre règles d'arithmétique et la règle de trois.

L'ordre et la brièveté du plan de lecture que je vais exposer, exigent que je commence par la dernière classe, parce qu'une partie de ce que je dirai pour elle, conviendra aux deux autres.

Troisième classe de navigateurs. Avant de commencer la lecture de ce *Traité de Navigation,* je ne demande à notre jeune marin que huit jours de préparation qu'il emploîra de la manière suivante : 1.° Il se familiarisera bien avec les premières définitions de la géométrie, telles que les lignes droites; les parallèles; la circonférence du

cercle, ses rayons, diamètres, sa division en 360 parties égales ou degrés et la division sexagésimale du degré; les angles ainsi que leurs mesures; les triangles rectilignes, c'est-à-dire, ceux formés par trois lignes droites qui se coupent de deux en deux; la sphère, les grands et petits cercles de la sphère; enfin les triangles sphériques, c'est-à-dire, ceux formés sur la sphère par trois arcs de grand cercle qui se coupent de deux en deux. 2.° Il se rendra très-familier le calcul logarithmique; et pour y parvenir, il lira avec attention les paragraphes XIV et XV, page 18, du discours qui est à la tête des tables des logarithmes de Callet (édition stéréotype), ouvrage dont les navigateurs ne peuvent se passer. Notre marin s'exercera long-temps sur ce calcul, en l'appliquant aux exemples donnés par l'auteur du livre en question, et sur d'autres exemples qu'il se proposera lui-même, mais tels qu'il puisse vérifier l'exactitude de ses calculs par des résultats déjà connus d'une autre manière. Ensuite il lira les définitions des lignes trigonométriques qui se trouvent au commencement du paragraphe XVI, page 24, se les gravera bien dans la mémoire, et poursuivra la lecture de ce paragraphe jusqu'à ce qu'il cesse de comprendre ce qu'il lit; et alors il passera au paragraphe XVII, page 31, lira les articles 1 et 2, passera les articles 3 et 4; viendra à la lecture du paragraphe XVIII, page 36, dont il lira de même les articles 1 et 2; ayant le soin de faire des applications du calcul des logarithmes sinus, cosinus, etc., à un grand nombre d'exemples, comme il l'a fait dans le calcul des logarithmes des nombres.

Notre marin s'étant ainsi bien préparé à l'usage qu'il doit faire de ce *Traité de Navigation*, s'en servira de la manière suivante :

Premier livre. Il lira avec attention les chapitres I et II, et se rendra familières les définitions qui s'y trouvent, ainsi que les règles énoncées à l'art. 22, et passera tout ce qui a rapport à la théorie. Le troisième chapitre doit être lu en entier. Il ne lira dans le chapitre IV que les définitions et les énoncés des principes démontrés aux articles 43, 44 et 45 qui sont très-essentiels.

Le chapitre V doit être entièrement lu, et le navigateur s'exercera

beaucoup sur toutes les solutions par le calcul et les solutions graphiques qui y sont enseignées; mais moins sur les dernières que sur les premières, dont il doit toujours se servir préférablement. Il doit, en s'exerçant aux solutions graphiques, suivre les procédés que nous lui indiquons, sur un quartier de réduction ordinaire, et non sur celui de la figure 12, qui est beaucoup trop petit.

Second livre. Notre navigateur lira les deux premiers chapitres, dans lesquels il trouvera beaucoup de définitions qui lui seront utiles. Il ne lira que l'article 92 du troisième chapitre. Il pourra de même ne pas lire le quatrième chapitre. Passant tout ce qui est calcul analytique dans le cinquième chapitre, il ne s'attachera qu'aux définitions qui se trouvent dans les articles qui ne sont pas précédés d'un astérisque, et il se rendra bien familier le principe essentiel énoncé à la fin de la page 94. Après cela il passera tout de suite à l'article 120, et enfin il fera son possible pour se bien graver dans la mémoire les équations (35) et (36), dans lesquelles le signe + remplace le mot *plus;* celui — le mot *moins;* et enfin le signe = remplace le mot *égal;* car ces équations sont extrêmement essentielles et d'un usage continuel. Le chapitre VI renferme des choses extrêmement utiles aux navigateurs; mais comme cette théorie est mise en pratique dans le troisième livre, le navigateur de troisième classe pourra ne lire de ce chapitre que les définitions. Il pourra de même ne lire du chapitre VII que les définitions, et il s'exercera dans la pratique enseignée à l'article 153 pour calculer les phases de la lune. Il trouvera aussi au chapitre IX, art. 168, une méthode pour déterminer l'heure de la haute mer dans un port dont il connoîtra l'établissement par le moyen de la table X, ce qui est fort essentiel.

Troisième livre. Notre navigateur de troisième classe lira avec une grande attention tout ce qui est définition et pratique dans le premier chapitre. Il s'exercera beaucoup à l'usage de l'octant ou du sextant, ou du cercle de réflexion, s'il en a un : nous lui avons enseigné les mé-

thodes d'observations; mais ce n'est que par beaucoup de pratique qu'il acquerra le coup d'œil et l'adresse nécessaires pour faire des observations exactes.

Le second chapitre doit être lu avec la plus grande attention jusqu'à l'article 204, qui peut être passé comme beaucoup moins utile; et notre marin ira tout de suite à l'article 206, qu'il lira ainsi que celui 207, en négligeant tout ce qui ne tient pas à la pratique.

Le chapitre III renferme une méthode assez bonne pour obtenir la latitude du vaisseau par deux hauteurs du soleil prises hors du méridien; et le navigateur de troisième classe passant tout de suite à l'article 214, suivra exactement la méthode d'observation et de calcul qui y est enseignée. Enfin il trouvera aux pages 175, 176 et 177 les types de tous les calculs appliqués à un exemple. Mais cette méthode étant un peu longue, il se servira préférablement de celle enseignée au chapitre IV, qui est la plus simple que je connoisse, lorsque l'on veut obtenir beaucoup d'exactitude dans le résultat.

Il passera le chapitre V, et ne lira dans le chapitre VI que ce qui tient à la pratique.

Notre navigateur s'exercera beaucoup sur le calcul de l'angle horaire du soleil, enseigné et appliqué au chapitre VII; il pourra aussi lire l'article 244 qui est dans ce même chapitre.

Tout ce qui est pratique dans le chapitre VIII devra être lu : mais le chapitre IX pourra être passé; et venant au chapitre X, le lecteur trouvera à l'article 263 et suivans, ainsi que dans le tableau en regard de la page 240, tout ce qui peut le guider d'une manière sûre dans le calcul de la longitude du vaisseau, par le moyen de l'observation de la distance du soleil à la lune. Enfin, s'il veut beaucoup abréger tous ses calculs, il se servira pour la réduction des distances, de la méthode démontrée aux articles 275 et suivans, et réduite en pratique sur deux exemples dans le tableau en regard de la page 263. Par le moyen de ce procédé, les logarithmes ne se prennent qu'avec cinq décimales, et se répètent en partie. Enfin, la simplicité de cette méthode est telle,

que le temps qu'elle emploie, n'est guère qu'un tiers de celui employé par la méthode ordinaire de Borda. Il est vrai qu'elle seroit susceptible de quelques inexactitudes, si les données du calcul n'étoient pas comprises dans certaines limites que nous indiquons, et qui heureusement s'étendent fort loin.

Le navigateur de troisième classe pourra enfin se servir de la pratique enseignée au chapitre XI dans le cas énoncé au titre de ce chapitre.

Seconde classe de navigateurs. Cette classe est la plus considérable, surtout parmi les officiers de la marine impériale: et quel avantage n'a-t-elle pas sur la troisième! Cette dernière agit machinalement, et par conséquent péniblement; au lieu que l'autre éclairée par la théorie, sait se rendre raison de tous les procédés, aperçoit les difficultés qui peuvent se rencontrer, et sait les éviter, ou les aplanir. Mais un navigateur de seconde classe perdroit tous ses avantages, si par paresse ou par insouciance, il s'en tenoit au mécanisme des pratiques, comme les navigateurs de troisième classe. Il doit à une première lecture ne lire que les articles du texte qui ne sont pas précédés d'un astérisque; ne jamais passer d'un article à l'autre, sans bien comprendre ce qui précède; se bien familiariser avec tous les calculs et les observations lorsqu'il est en mer, et même à terre, surtout si c'est à Paris; car il trouvera toutes les facilités qu'il pourra désirer à l'observatoire Impérial, ou à celui de l'École Militaire, pour apprendre à observer les distances avec le cercle de réflexion ou un sextant, ce qui est l'opération la plus difficile pour les marins.

Après une première lecture, notre navigateur pourra, en relisant l'ouvrage, ne pas passer les articles marqués d'un astérisque, et même tenter de lire quelques notes, surtout de celles où se trouvent démontrées des méthodes dont la seule pratique est enseignée dans le texte.

Première classe de navigateurs. Ce que nous avons dit pour la seconde classe, sera exécuté par la première; et, de plus, celle-ci

lira toutes les notes; mais ce ne sera d'abord que les notes qui démontrent certaines méthodes de corrections, dont il n'y a que l'énoncé et la pratique dans le texte; et ce sera à une seconde lecture de l'ouvrage, que le navigateur de première classe pourra lire toutes les notes, dans l'ordre indiqué par celui des matières du texte. Enfin j'engage ce navigateur de ne rien négliger dans le cours de ses voyages pour perfectionner nos cartes hydrographiques, soit en déterminant, le plus rigoureusement possible, la latitude et la longitude de certains lieux de la terre, dont les positions ne sont pas bien connues; soit en dessinant les vues de certaines côtes, après avoir déterminé, d'après les procédés enseignés dans ce *Traité de Navigation,* la position du vaisseau relativement à cette côte; soit enfin lorsque les circonstances de la navigation lui en donneront le temps, en levant des cartes des Archipels nouveaux ou peu connus, dans lesquels il se trouvera. Enfin je lui conseille, pour se former dans cette espèce de travail et en acquérir le goût, de lire le *Voyage de Bougainville autour du monde,* qui est fécond en découvertes dont se sont enrichies la Géographie et l'Histoire naturelle. Qu'il lise aussi les voyages de Borda et de Fleurieu, tous anciens officiers de la marine; et surtout un ouvrage de ce dernier savant, intitulé : *Découvertes des François, en 1768 et 1769, dans le sud-est de la Nouvelle-Guinée,* etc., lequel est rempli de choses utiles à la navigation, et bien fait pour inspirer aux marins le désir de s'appliquer à des travaux semblables.



TRAITÉ
DE NAVIGATION.

L'OBJET que nous nous proposons dans cet ouvrage est la solution du problème général : Étant en mer, *déterminer dans un instant quelconque le point du globe terrestre où se trouve le vaisseau, et diriger sa route de manière à se rendre, le plutôt possible, au lieu de sa destination*. Différentes circonstances modifient la solution de ce problème ; et même, elle est tout à fait différente lorsque l'on navigue le long de la côte et toujours en vue de la terre, de ce qu'elle est lorsque l'on navigue en pleine mer où l'on ne voit que le ciel et l'eau. Dans le premier de ces deux cas, la navigation est appelée *cabotage*, et n'exige qu'une grande connoissance des circonstances du cours de la côte, telles que ses caps, rades, hâvres, écueils, etc., qui ne s'acquiert que par la pratique ; aussi voit-on souvent des simples pêcheurs être excellens *pratiques d'une côte* (*). Mais on peut suppléer en partie à ce manque de pratique, en ayant des cartes où se trouve tracée la description exacte de ces côtes. Nous ferons connoître la manière de construire ces cartes (**).

Dans le second des deux cas mentionnés ci-dessus, c'est-à-dire, lorsque l'on navigue en pleine mer, la navigation s'appelle *hauturière*, parce que l'on est obligé de se diriger par le moyen de certaines opérations astronomiques, dont une des principales est la mesure de la hauteur des astres. Cette navigation, dont nous nous occuperons particulièrement, se sert encore de quelques méthodes d'approximation, lorsque les nuages ou la brume empêchent de voir les astres.

La navigation hauturière a particulièrement besoin de cartes qui représentent fidèlement les parties de la surface de la terre sur lesquelles on navigue, afin de pouvoir y déterminer la position du vaisseau, et en déduire la route qu'il doit

(*) Expression marine, qui signifie bien connoître une côte.

(**) Quelquefois on embarque à bord des vaisseaux des *pilotes-côtiers*, c'est-à-dire, des hommes qui connoissent bien les côtes que l'on doit approcher.

suivre pour parvenir au lieu de sa destination dans le plus court espace de temps possible. Ainsi un des premiers objets qui doivent nous occuper, est la confection des cartes marines : nous commencerons donc par là notre traité de navigation.

LIVRE PREMIER.

CONFECTION DES CARTES MARINES, ET RÉSOLUTION DES QUESTIONS DE NAVIGATION, PAR DES MÉTHODES INDÉPENDANTES DE TOUTES CONNOISSANCES ASTRONOMIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

De la figure de la Terre. Apparences qui résultent de cette figure et du mouvement de rotation du globe terrestre. Des principaux cercles qu'on a imaginés pour fixer la position de ses parties.

1. LA surface de la terre paroît, au premier aspect, être plane ; et c'est ainsi que bien des personnes qui n'ont reçu aucune instruction, et qui n'ont pas voyagé par mer, la considèrent. Mais le marin, le simple matelot qui, avant de naviguer croyoit que la surface de la terre étoit plane, n'est-il pas bientôt désabusé, lorsque le vaisseau sur lequel il est, s'éloignant du rivage, il en voit disparoître les premiers, les objets les plus bas; et que les autres disparoissent successivement jusqu'aux plus élevés qui disparoissent les derniers, quoique très-souvent plus éloignés du vaisseau que ceux qui ont disparu avant? Supposant que dans ce moment notre matelot monte à la grande hune, il reverra certains objets de la côte qu'il ne voyoit plus de dessus le pont, et il continuera à les apercevoir encore quelques momens en montant le long des mâts à mesure que le vaisseau s'éloigne. En voyant ce phénomène, notre marin, s'il est susceptible de quelque réflexion, pourra-t-il faire autrement que d'en conclure que la surface de la partie de la mer qui se trouve entre lui et le rivage dont il s'éloigne est courbe, puisque sa convexité lui cache certains objets de la côte, et lui en laisse encore voir de plus élevés?

D'autres observations astronomiques, et entr'autres la projection circulaire de l'ombre de la terre sur le disque de la lune, lorsque celle-ci est en partie éclipsée, ont prouvé que la terre est, à peu près, sphérique. Je dis, à peu près, parce qu'effectivement elle est un peu aplatie aux extrémités d'un de ses diamètres (voyez la note 1) (*), et qu'elle n'est, rigoureusement parlant, qu'un sphéroïde; mais nous la considérerons dans le texte de cet ouvrage comme parfaitement sphérique, ce qui est suffisant pour le plus grand nombre des navigateurs.

Nous ne considérerons pas comme un obstacle à la sphéricité du globe terrestre, les irrégularités que nous y voyons, telles que les montagnes, les goufres, etc.; puisque les plus hautes montagnes connues, telles que le *Chimboço* et *Pichincha*, qui ont environ 6276 mètres d'élévation au-dessus du niveau la mer, ne sont relativement à la surface convexe de la terre, que ce que seroit une irrégularité d'un centimètre de hauteur sur un globe de 20 mètres de diamètre.

2. Ce qu'on appelle *ciel* ou *univers*, ou quelquefois le *monde*, peut être considéré comme une sphère immense parsemée de corps radieux, et de corps éclairés par les premiers, compris sous la dénomination générale d'*astres*.

Les corps radieux, parmi lesquels est compris le soleil, s'appellent généralement *étoiles;* et, en en exceptant le soleil, tous ces astres nous paroissant toujours conserver sensiblement leurs positions respectives, s'appellent encore *étoiles fixes*.

Les autres astres tels que la terre, qui sont des corps opaques dont la clarté n'est que la réflexion de la lumière des étoiles, s'appellent *planètes*, ou *corps errans*, parce qu'ils changent sans cesse de places et de positions.

Ceux des corps errans que l'on ne voit qu'un court espace de temps, augmenter sensiblement de grandeur, et diminuer ensuite dans un rapport à peu près semblable à celui de l'augmentation, et enfin disparoître, après avoir parcouru un certain espace, s'appellent *comètes*. Ces astres nous paroissent dans le ciel, comme un point lumineux, enveloppé d'une espèce de *nébulosité* mal terminée, qu'on nomme *chevelure;* outre cela, les comètes sont ordinairement précédées ou suivies d'une longue trace de lumière blanchâtre, assez semblable à celle de leur chevelure, qu'on appelle *queue* de la comète.

(*) Les notes qui sont à la fin de cet ouvrage, et auxquelles nous renverrons de la même manière dans la suite de ce cours, sont faites pour ceux qui aiment, dans les méthodes, la rigueur géométrique, dont on peut sensiblement se passer dans la pratique.

Les planètes se divisent en deux classes, les *principales* et les *secondaires:* ces dernières, qu'on appelle plus souvent *satellites*, tournent autour des premières et sont beaucoup plus petites que les principales.

Les étoiles se distinguent aisément des planètes par le vif éclat de leur lumière qui, leur étant propre, est bien plus vive que celle des planètes, qui ne font que nous réfléchir la lumière des étoiles. D'ailleurs, ce qui prouve bien évidemment à l'observateur que les planètes sont des corps éclairés, et non lumineux, c'est les différens *aspects* sous lesquels nous paroissent quelques-unes d'elles, et qu'on appelle *phases* (*).

Après avoir jeté un coup d'œil rapide sur la voûte céleste, revenons à notre planète, que nous commencerons à considérer seule; ensuite nous examinerons plus particulièrement ses rapports avec les autres astres.

3. Tous les corps placés sur la surface de la terre sont attirés vers son centre par l'effet d'une force que l'on appelle *pesanteur*, et par conséquent ils sont retenus à la partie de la surface sur laquelle ils sont placés, quoique dans des lieux bien différens, et même aux deux extrémités d'un diamètre de la terre. Dans ces positions contraires, le ciel et les étoiles paroissent toujours au-dessus de la terre: car l'élévation et l'abaissement ne sont relatifs qu'à la direction de la pesanteur. Donc, tous les hommes qui habitent notre planète, et qui sont placés dans la position qui leur est naturelle, ont la tête tournée vers le ciel, et les pieds appuyés sur la surface de la terre; ce qui répond à la question du vulgaire, qui demande comment deux *antipodes*, c'est-à-dire deux hommes placés aux deux extrémités d'un diamètre de la terre, peuvent rester en même temps, dans une position si gênante pour l'un des deux, et comment il peut se faire que chacun de ces deux hommes considère la voûte céleste comme étant au-dessus de lui.

4. On appelle *horizon* ce vaste contour du ciel qui paroît autour de l'observateur en forme de cercle, et qui termine sa vue de tous côtés lorsqu'il est dans un lieu découvert, et surtout en mer, hors la vue de toute terre. Ce plan réellement tangent à la surface de la terre, au point de cette surface où l'on suppose l'œil de l'observateur, s'appelle *horizon sensible*; de manière que, si l'on suppose deux observateurs antipodes, il est évident 1.° que la partie du ciel, vue par l'un des deux, sera entièrement invisible pour l'autre, et réciproquement; 2.° qu'outre ces deux horizons sensibles, il y a une zône céleste dont la hauteur

(*) Ces phases ne sont sensibles que dans Vénus, Mercure, et très-peu dans Mars.

est celle du diamètre de la terre, et qui, géométriquement parlant, est invisible aux deux observateurs; d'où il suit que chacun de ces observateurs voit la moitié de la voûte céleste, moins la zône céleste comprise entre son horizon sensible et un grand cercle de la sphère céleste qui passe par le centre de la terre, et est parallèle à l'horizon sensible. Ce grand cercle s'appelle *horizon rationel*, et peut, sans une erreur sensible, être considéré comme se confondant avec l'horizon sensible, à cause de l'immensité de la sphère céleste. Ainsi, nous considérerons dorénavant l'horizon de l'observateur comme divisant la voûte céleste en deux hémisphères parfaitement égaux.

5. Puisque la direction de la pesanteur est vers le centre de la terre, et que l'horizon est tangent à la surface du globe terrestre, il suit que la direction de gravité est suivant une ligne perpendiculaire à l'horizon, on l'appelle *verticale* (*). Le point supérieur où elle rencontre le ciel s'appelle *Zénith*; le point opposé s'appelle *nadir*; de manière que les antipodes ont réciproquement les mêmes zénith et nadir. La verticale s'appelle encore ligne *zénith et nadir*. Les deux points dont nous venons de parler sont les pôles de l'horizon.

6. Des définitions précédentes il suit qu'à mesure que l'observateur change de place, il change d'horizon, de zénith et de nadir; et, découvrant une nouvelle partie de la voûte céleste, il perd de vue une partie de cette voûte égale à celle qu'il a découverte. Sans même changer de place, il aperçoit de pareils changemens dans l'aspect de la voûte céleste; ce qui tient à des causes que nous allons expliquer dans l'article suivant.

7. Le phénomène le plus remarquable aux yeux de l'observateur, est la révolution entière et diurne de tout le globe céleste autour de lui, d'*orient* en *occident*, c'est-à-dire, de gauche à droite pour l'observateur françois et même européen lorsqu'il est tourné vers le soleil à l'heure du midi. Cependant cette apparence de mouvement de rotation de la *sphère céleste* n'est que l'effet d'une illusion des sens de l'observateur, qui rapporte à cette sphère le mouvement vrai de rotation diurne d'*occident* en *orient* du globe terrestre autour d'un de ses diamètres qu'on appelle l'*axe* de la terre. Telle est l'apparence illusoire de la

(*) Dans le sphéroïde terrestre, cette verticale ne passe pas par le centre de la terre, et nous avons fait voir à l'article 8 de la première note, que la tangente de l'angle formé par cette verticale et le rayon terrestre qui aboutit au même point de la surface de la terre, est sensiblement égal au produit de l'aplatissement du sphéroïde par le sinus du double de la latitude vraie au point en question.

marche des objets fixes qui sont sur la côte, pour l'observateur placé dans une barque qui longe de près cette même côte.

8. Les deux extrémités de l'axe terrestre autour duquel se fait la révolution de la terre, s'appellent *pôles terrestres;* le pôle vers lequel se dirige l'ombre de l'observateur (que nous supposerons toujours en Europe tant que nous ne préviendrons pas du contraire) à midi, s'appelle le pôle *nord,* ou *arctique*, ou *boréal,* ou *septentrional*, et le pôle opposé s'appelle pôle *sud,* ou *antarctique*, ou *austral*, ou *méridional.*

9. La section circulaire qui passe par le centre de la terre et qui est perpendiculaire à son axe, s'appelle *équateur terrestre.* Ce grand cercle du globe terrestre divise la terre en deux *hémisphères* dont les noms respectifs sont les mêmes que les pôles qu'ils renferment; l'Europe entière, une grande partie de l'Asie, l'Afrique et l'Amérique, se trouvent dans l'*hémisphère septentrional.* Mais ces trois dernières parties de la terre, étant coupées par l'équateur, se prolongent du côté de l'*hémisphère méridional.*

10. Tous les cercles dont les centres sont sur l'axe de la terre, et qui sont parallèles à l'équateur s'appellent *parallèles*, et vont évidemment en diminuant à mesure qu'ils s'approchent des pôles.

11. Tous les grands cercles du globe terrestre qui passent par les deux pôles, ont évidemment pour intersection commune l'axe de la terre, et par conséquent sont perpendiculaires à l'équateur. Ces grands cercles s'appellent *méridiens.* Celui de ces grands cercles qui passe par un lieu déterminé de la terre, est le méridien de ce lieu.

12. On appelle *latitude géographique*, ou simplement *latitude* d'un lieu de la terre, l'angle formé dans le plan du méridien qui passe par ce lieu, par la verticale et le rayon de l'équateur. La terre étant supposée sphérique, la latitude d'un lieu est le nombre de degrés et parties de degrés du méridien compris entre l'équateur et ce lieu-là. La latitude est *septentrionale* ou *méridionale*, suivant que le lieu en question est dans l'hémisphère septentrional ou dans l'hémisphère méridional. La latitude de Paris est de 48° 50′ 14″ septentrionale; celle du Cap de Bonne-Espérance est de 33° 55′ 15″ méridionale. Il est aisé de voir que la latitude se comptant depuis l'équateur vers chacun des deux pôles, ne peut être $> 90°$.

13. La *longitude géographique*, ou simplement la *longitude* d'un lieu de la terre, est le nombre de degrés et parties de degrés de l'équateur qui mesure l'angle formé au pôle par le méridien du lieu en question, et *le premier méri-*

dien. Les François font passer le premier méridien par l'Observatoire de Paris. Il est assez naturel que chaque nation le fasse passer par la capitale du pays qu'elle habite. Cependant il seroit à désirer que toutes les nations policées convinssent de le faire passer par un seul lieu; alors les communications géographiques et astronomiques entre ces nations se feroient plus facilement, puisqu'on ne seroit plus obligé de faire les réductions des longitudes comptées depuis un certain méridien à celles comptées depuis un autre premier méridien.

La longitude se compte depuis o degrés jusqu'à 180° du côté de l'orient et du côté de l'occident. Ainsi, le méridien de Nankin (Chine) formant avec celui de Paris, et du côté de l'orient, un angle de $116^\circ 27'$; on dit que la longitude de Nankin est de $116^\circ 27'$ orientale. De même l'angle formé par le méridien de Mexico (Mexique) formant avec celui de Paris, du côté de l'occident, un angle de $101^\circ 21' 55''$, on dit que la longitude du Mexico est de $101^\circ 21' 55''$ orientale. Enfin, généralement, le méridien que l'on regarde comme le premier, c'est-à-dire, celui d'où l'on compte les longitudes, divisant le globe terrestre en deux hémisphères, l'un *oriental*, l'autre *occidental*, la longitude d'un lieu est toujours de même dénomination que l'hémisphère où il se trouve.

14. Si nous imaginons par la pensée tous les cercles terrestres que nous avons considérés, c'est-à-dire, l'équateur, les parallèles et les méridiens prolongés jusqu'à leur rencontre avec la voûte céleste; ces cercles du globe céleste conserveront leur même dénomination, en leur ajoutant l'adjectif *céleste*. De même l'axe de rotation de la terre étant prolongé jusqu'au ciel, sera celui autour duquel le monde nous paroît faire une révolution entière d'orient en occident dans un seul jour; et, quoique le mouvement diurne de rotation ne soit qu'apparent, puisqu'il n'est dû qu'à la rotation réelle de la terre en sens inverse; cependant les effets qui en résultent étant évidemment les mêmes que si l'apparence étoit une réalité; nous supposerons, pour plus de simplicité, que la terre étant fixe dans l'espace, le ciel fait une révolution entière autour de son axe dans vingt-quatre heures, et d'orient en occident.

15. Cela posé, soit *c* le centre de la terre, L*q*L'*ap* le méridien terrestre d'un lieu L de la terre, Z Q N A P le méridien céleste du même lieu, E Q l'équateur céleste (*) A B, M D etc., A' B', M' D' etc., les parallèles célestes, H O l'horizon Fig. 1.

(*) Nous ne mettons dans la figure première que les projections rectilignes de l'équateur, des parallèles et de l'horizon sur le méridien céleste, afin de la simplifier.

Fig. 1. de l'observateur, Z N sa ligne zénith et nadir, P P' l'axe du monde (*). Le pôle P qui est le seul visible par l'observateur en L, puisque l'autre P' est au-dessous de l'horizon, s'appelle *pôle élevé*; l'invisible P' s'appelle *pôle abaissé*. Supposons, pour fixer les idées, que P représentant le pôle élevé des Européens, c'est-à-dire le pôle nord du monde; l'observateur en L lui tourne le dos, c'est-à-dire qu'il regarde directement vers le sud; alors le ciel lui paroîtra tourner de gauche à droite, puisqu'à sa gauche est le point d'intersection de l'horizon avec l'équateur qu'on appelle le *vrai point d'orient*, et qu'à sa droite est le point d'intersection de l'horizon avec l'équateur, qu'on appelle le *vrai point d'occident* (**). Ces points s'appellent encore respectivement les points d'*est* et d'*ouest*, et sont évidemment les extrémités du diamètre de la sphère céleste qui est l'intersection des plans de l'équateur et de l'horizon; puisque ces deux cercles sont des grands cercles de la sphère, et conséquemment se coupent en deux parties égales. Donc, tout astre placé à l'équateur sera successivement visible et invisible à l'observateur, puisque dans la rotation diurne du ciel autour de son axe, l'astre en question parcourra uniformément la moitié de l'équateur, qui est entièrement au-dessus de l'horizon, et dont la projection est c Q; ensuite il parcourra toute l'autre moitié de l'équateur, ayant pour projection c E qui est au-dessous de l'horizon, et par conséquent invisible à l'observateur en L. Ainsi ce dernier, voyant paroître ou se *lever* l'astre à sa gauche, au vrai point d'est qui, par cette raison s'appelle *levant*, le verra douze heures après disparoître, ou se *coucher* au vrai point d'ouest qui, par cette raison, s'appelle encore *couchant*.

Mais les parallèles A B, M D, etc., A' B', M' D', etc., étant des petits cercles de la sphère, sont coupés inégalement en ζ, δ, etc., ζ', δ', etc., par l'horizon; donc les astres qui parcourent ces parallèles sont plus long-temps visibles qu'invisibles; ou l'inverse, suivant que les parallèles qu'ils parcourent sont dans le même hémisphère que celui de l'observateur, ou dans l'hémisphère opposé; et l'inégalité du temps de la présence et de l'absence d'un astre est d'autant plus grande que le parallèle que décrit cet astre, est plus éloigné de l'équateur. Enfin, si

(*) Nous avons seulement pointé les lignes Z N et P P', qui ne sont que des diamètres de la sphère, afin de les distinguer des droites qui indiquent des projections de cercles sur le méridien céleste.

(**) Le point c qui est le centre de la terre, et par conséquent aussi de la sphère céleste, est évidemment la projection sur le plan du méridien Z O N H des vrais points d'orient et d'occident, ou d'est et d'ouest.

le parallèle que décrit cet astre est tout à fait au-dessus de l'horizon, tel que celui R K, alors l'observateur voit toujours cet astre ; mais, si le parallèle décrit est tout à fait en-dessous de l'horizon, tel que le parallèle R'K', alors l'astre qui le parcourt est toujours invisible à l'observateur en L. Fig. 1.

16. La durée du temps de la présence ou de l'absence d'un astre, dépend non-seulement de la distance du parallèle de cet astre à l'équateur, mais encore de l'angle d'inclinaison Q c O du plan de l'horizon avec celui de l'équateur ; car il est évident que plus cet angle sera petit, plus aussi les parties élevées et abaissées des parallèles différeront entr'elles ; et lorsque cet angle augmentera, les deux parties des parallèles tendront vers l'égalité ; mais l'angle d'inclinaison Q c O, dont nous venons de parler, est évidemment le complément de la latitude Z c Q de l'observateur : donc, à mesure que les latitudes augmentent, la différence des temps de la présence et de l'absence augmente ; c'est le contraire lorsque les latitudes diminuent : de manière que l'observateur, qui seroit placé au pôle de la terre, et dont conséquemment la latitude seroit de 90°, verroit sans cesse tourner autour de lui les astres qui décriroient les parallèles placés dans le même hémisphère que lui, et ne verroit jamais les astres qui parcourroient les parallèles placés dans l'autre hémisphère ; car, dans cette position, l'observateur auroit pour ligne zénith et nadir l'axe du monde, et par conséquent pour horizon l'équateur céleste. Mais, si l'observateur étoit à l'équateur, c'est-à-dire si sa latitude étoit nulle, alors il est évident qu'ayant pour horizon un méridien qui seroit perpendiculaire au sien, et qui diviseroit conséquemment l'équateur et tous les parallèles en deux parties égales, le temps de la présence de tous les astres, dont aucun ne lui seroit invisible, seroit égal à celui de l'absence.

Dans le premier des deux cas que nous venons d'examiner, la sphère céleste est dite *parallèle ;* dans le second elle est dite *droite*. Dans les cas intermédiaires, c'est-à-dire lorsque l'équateur coupe obliquement l'horizon, alors la sphère est dite *oblique*.

17. Le méridien de l'observateur passant par sa ligne *zénith et nadir,* qui est perpendiculaire à l'horizon, et par l'axe du monde, qui est perpendiculaire à l'équateur, est évidemment perpendiculaire à l'horizon et à l'équateur ; donc l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la ligne *est* et *ouest* est perpendiculaire sur le plan du méridien : d'où il suit que ce dernier grand cercle divise la partie élevée de l'équateur, et par conséquent aussi la partie élevée de ses parallèles en deux parties égales. Il en est de même pour les parties abaissées. Donc lorsqu'un astre passe au méridien *élevé*, c'est-à-dire à la partie visible du méri-

dien, il est au milieu de sa course visible, et à son plus haut point d'élévation; il est alors *midi* lorsque l'astre est le soleil. Mais lorsque l'astre passe au méridien abaissé, c'est-à-dire à la partie invisible du méridien, il est au milieu de sa course invisible, et à son plus bas point d'abaissement; il est alors *minuit* lorsque l'astre est le soleil.

18. L'intersection du plan du méridien avec celui de l'horizon, qui, conséquemment est la projection du premier de ces deux plans sur le second, et en fait connoître la direction horizontale, est ce qu'on appelle la *méridienne de ce lieu*. La trace de cette ligne est la première opération, et la plus essentielle de l'astronome qui veut se former un observatoire.

19. Le méridien, et par conséquent la méridienne, qui est sa projection sur le plan horizontal, étant perpendiculaire à l'intersection de l'équateur et de l'horizon, c'est-à-dire de la ligne *est et ouest;* il sera aisé, lorsque la méridienne sera tracée, c'est-à-dire lorsque l'on aura sur un plan horizontal la ligne *nord et sud*, de tracer la ligne *est et ouest*. Ces quatre points, nord, sud, est et ouest, sont ce qu'on appelle les quatre points *cardinaux*. Chercher la position de l'un de ces quatre points, d'où l'on déduira aisément celle des trois autres, est ce qu'on appelle *s'orienter*.

20. L'intervalle de temps entre le passage et le retour du soleil au méridien abaissé, est ce qui détermine la durée du jour civil. Ce jour se compose de 24 heures, l'heure de 60 minutes, la minute de 60 secondes, la seconde de 60 tierces, etc., en suivant toujours cette division sexagésimale (*). Les douze premières heures, qui sont l'intervalle de temps du passage du soleil au méridien abaissé à son passage au méridien élevé, sont les heures du matin; les douze autres sont les heures du soir. Les astronomes comptent les 24 heures d'un midi à l'autre, et de suite.

21. Puisque les vingt-quatre heures qui composent le jour, se comptent depuis le passage du soleil à un méridien jusqu'au retour de cet astre au même méridien; il s'ensuit que le soleil parcourt 560° autour de la terre dans les vingt-quatre heures; ce qui fait 15° par heure, 15′ par minute de temps, 15″ par seconde de

(*) Dans la nouvelle division du temps, le jour est divisé en 10 heures, l'heure en 100 minutes, la minute en 100 secondes, etc., en suivant toujours cette division centisimale. De manière qu'en représentant respectivement par h, m, s, t, etc., les anciennes heures, minutes, secondes, tierces, etc., et par H, M, S, T, etc., les nouvelles heures, minutes, secondes, tierces, etc., on aura $H = \frac{12}{5}h$, $M = \frac{36}{25}m$, $S = \frac{108}{125}s$, $T = \frac{324}{625}t$, etc.

temps, etc. Donc, supposant que le soleil, dans un instant quelconque, passe par le méridien d'un lieu P, il est clair qu'une heure après, il passera par le méridien d'un lieu A′ dont la longitude sera plus occidentale de 15° que celle du lieu P, puisque le mouvement de rotation diurne de la terre étant d'occident en orient, le mouvement apparent de révolution diurne du soleil autour de la terre est d'orient en occident, et que conséquemment il parvient successivement à des lieux qui sont à l'occident de ceux qu'il a déjà abandonnés. Par la raison contraire, si le soleil a passé au méridien d'un lieu A′ une heure avant de parvenir à celui du lieu P, on en conclura que la longitude du lieu A′ est de 15° plus orientale que celle du lieu P.

De même, si le soleil passe deux heures, trois heures......, douze heures après aux méridiens des lieux A'', A'''...... A^{xII}, on en conclura que ces derniers lieux sont respectivement à des longitudes plus occidentales que le lieu P de 30°, 40°....., 180°; et si le soleil a passé aux méridiens des lieux $''A$, $'''A$...... ^{xII}A deux heures, trois heures......, douze heures avant d'avoir passé au méridien du lieu P; on en conclura que ces premiers lieux sont respectivement à des longitudes plus orientales que celle du lieu P de 30°, 40°......, 180°.

Ce que nous disons pour les différences des temps des passages du soleil aux divers méridiens en heures entières, a évidemment lieu pour les fractions d'heures: par exemple, si l'on sait que lorsque le soleil est au méridien de Paris, il y a $1^h\,55'\,54''$ qu'il a passé au méridien du Caire (Egypte), on en conclura que la longitude de cette dernière ville est plus orientale que celle de Paris de $1 \times 15° + 55 \times 15' + 54 \times 15'' = 15° + 825' + 810'' = 28°\,58'\,30''$. Donc si, comme nous en sommes convenus, nous comptons la longitude depuis Paris, nous en conclurons que la ville du Caire est par $28°\,58'\,30''$ de longitude orientale.

22. De ce que nous avons dit précédemment, il suit 1.° que l'on peut toujours réduire les degrés de longitude, ou, ce qui est la même chose, les degrés de l'équateur, puisque ces derniers mesurent les angles formés au pôle par les méridiens, en temps, et réciproquement. Ce calcul est des plus simples. En effet, s'agit-il de réduire le temps en degrés, on pourra se servir de la méthode employée précédemment (art. 21); ou, encore plus simplement, *on réduira les heures en minutes de temps que l'on ajoutera avec les minutes que l'on avoit déjà, on mettra respectivement les indices des degrés, minutes de degré, secondes de degré, etc., aux minutes, secondes, tierces, etc., que l'on avoit; et prenant le quart du tout, on aura le résultat demandé*. En effet, représentant par M les minutes de temps, par S les secondes de temps, par T les tierces de

temps, et respectivement par δ, m et s les degrés, minutes de degré, et secondes de degrés, dont l'ensemble $\delta+m+s$ est la réduction en partie de l'équateur du temps $M+S+T$; on aura

$$\delta+m+s=M\times 15'+S\times 15''+T\times 15'''=\frac{M\times 1^\circ}{4}+\frac{S\times 1'}{4}+\frac{T\times 1''}{4}=\tfrac{1}{4}M^\circ+\tfrac{1}{4}S'+\tfrac{1}{4}T''$$

ce qui revient à la régle prescrite. Ainsi, pour réduire $1^h\,55'\,54''$ en parties de l'équateur, je réduis d'abord l'heure en minutes de temps, ce qui me donne $115'\,54''$; mettant respectivement les indices des degrés et minutes de cercle à la place des indices des minutes et secondes de temps, j'ai $115^\circ\,54'$; et prenant le quart, j'ai $28^\circ\,52'\,30''$, qui est la réduction demandée. S'il s'agit de réduire les parties de l'équateur en temps, on fera l'inverse de l'opération précédente, c'est-à-dire *qu'on mettra respectivement les indices des minutes de temps, secondes de temps, tierces de temps à la place des indices des degrés, minutes de degré, secondes de degré, ensuite on multipliera par 4, ce qui donnera le résultat de la réduction demandée*. En effet, la notation précédente restant la même, on tirera de l'équation $\delta+m+s=M\times 15'+S\times 15''+T\times 15'''$, celle $M+S+T$ $=\frac{\delta}{15}+\frac{m}{15}+\frac{s}{15}=\frac{4\delta}{60}+\frac{4m}{60}+\frac{4s}{60}=(4\delta)'+(4m)''+(4s)'''$. Ainsi, pour réduire $47^\circ\,35'\,28''$ de l'équateur en temps, j'écris cette quantité sous la forme $47'\,35''\,28'''$, et multipliant par 4, j'ai $188'\,144''\,112'''$ ou $3^h\,10'\,25''\,52'''$. (*Voyez* la note II pour des réductions semblables dans la division centisimale du cercle et du temps).

On peut s'épargner la peine de ces calculs par le moyen des tables qui se trouvent toujours dans le livre appelé *Connoissance des Temps* (*), et où toutes ces réductions sont faites. (*Voyez*, par exemple, *la Connoissance des Temps* de 1806, pag. 158).

2.° Que si l'on avoit un signal instantané, qui fût aperçu en même temps dans deux lieux, on pourroit aisément connoitre la différence en longitude de ces deux lieux, puisqu'elle seroit directement donnée par la différence des heures comptées dans chacun de ces lieux, à l'instant en question. Or, ce signal instantané est très-souvent un phénomène céleste, tel qu'un commencement, ou fin, ou généralement une époque instantanée d'une éclipse de lune, et enfin d'autres phénomènes astronomiques dont nous parlerons dans la suite.

(*) Ce livre, que le bureau des longitudes publie tous les ans pour l'usage des astronomes et des navigateurs, renferme tous les mouvemens des corps célestes qui doivent avoir lieu cette année-là, relativement à l'Observatoire impérial de Paris.

Supposons, par exemple, que le commencement de l'éclipse de lune du 26 janvier 1804 a été observé à Paris à 8h 16'; mais qu'à Vienne (Allemagne) il n'a été observé qu'à 9h 12' 10", on en conclura que Vienne est à l'orient de Paris, puisqu'au même instant on y compte plus qu'à Paris; et la différence 56' 10" de temps fait connoître, en réduisant le temps en parties de l'équateur, que la longitude de Vienne est de 14d 2' 30" orientale.

23. La seule connoissance de la longitude ne suffit pas pour déterminer la position d'un lieu sur la surface de la terre, il faut encore connoître sa latitude, puisque l'on sait que pour déterminer la position d'un point sur une surface, il faut déterminer la distance de ce point à deux lignes fixes prises sur ce plan, c'est-à-dire, au premier méridien, et à l'équateur dans le cas qui nous occupe. Or, pour avoir cette dernière distance, c'est-à-dire, la latitude, on observe *la hauteur* PH du pôle élevé P au-dessus de l'horizon OH, et cette hauteur PH sera la latitude demandée. En effet, à cause des deux angles droits P*c*Q, Z*c*H, on aura, en retranchant l'angle commun P*c*Z, les deux angles restans Z*c*Q, P*c*H qui seront égaux; mais l'angle Z*c*Q ou l'arc ZQ est la latitude de l'observateur placé en L; donc l'angle P*c*H, ou la hauteur PH du pôle élevé sur l'horizon, est égale à la latitude demandée. Donc la latitude d'un observateur placé à un lieu quelconque de la surface de la terre, *est égale à l'élévation du pôle au-dessus de son horizon.* Fig. 1.

Pour avoir cette hauteur du pôle, on se sert quelquefois du moyen suivant:

On choisit une étoile qui décrive dans le mouvement apparent de rotation diurne du ciel d'orient en occident, un parallèle tel que KR, qui soit entièrement au-dessus de l'horizon HO; ensuite on observe la plus grande hauteur HK de l'étoile et sa plus petite hauteur HR; enfin prenant la moitié de la somme de ces deux hauteurs HK, HR, on a celle HP du pôle, et par conséquent la latitude du lieu de l'observateur. On appelle étoiles *circompolaires* celles qui, ne se couchant jamais pour l'observateur, servent aux observations dont nous venons de parler. On se sert en mer, pour observer la hauteur du pôle élevé, d'autres moyens dont nous parlerons dans le troisième Livre. Nous verrons aussi dans le même Livre d'autres méthodes astronomiques pour déterminer la longitude du vaisseau; ceux que nous avons foiblement indiqués précédemment ne pourront guère servir que pour les astronomes qui sont à terre.

24. Connoissant la latitude et la longitude d'un lieu, sa position sur la surface de la terre est déterminée. Ainsi, ayant les positions géographiques ou tables des latitudes et longitudes des différens lieux de la terre, on pourra construire un

globe terrestre artificiel, c'est-à-dire, un corps rond ou sphérique de 5 décimètres, par exemple, de diamètre, sur lequel est d'abord tracé un grand cercle, qui représente l'équateur et qui est divisé en ses 360°. Par les pôles de ce grand cercle, qui représentent les pôles de la terre, on fait passer un axe autour duquel le globe tourne librement, et qui a ses extrémités fixées dans l'épaisseur d'un anneau circulaire dont le diamètre de la circonférence de la concavité est presque égal à celui du globe, mais cependant un peu plus grand, afin que le globe puisse tourner librement, et sans éprouver de frottement de sa surface avec celle intérieure de l'anneau circulaire. Cet anneau, d'environ 3 centimètres de largeur, et qui est toujours dans le plan d'un méridien du globe artificiel, se place sur un pied qui supporte deux demi-anneaux circulaires, se coupant à angles droits et dans une position verticale, de manière que les quatre extrémités de ces deux demi-anneaux se trouvent sur un plan horizontal et à des distances du point où ils se réunissent, et sont fixés au pied, de 90 degrés. Sur les quatre extrémités de ces deux demi-anneaux, est placé horizontalement un anneau circulaire plus large que ceux qui lui servent de supports; dans la partie intérieure de cet anneau, et aux deux extrémités de l'un de ses diamètres, sont pratiquées deux échancrures de même largeur que l'anneau adapté au globe, et dans lesquelles ce dernier anneau entre librement, ainsi que dans une échancrure de pareille largeur pratiquée dans la partie supérieure du pied, et horizontalement; de manière que l'anneau vertical, et par conséquent tout le globe, peut tourner dans le sens vertical. L'anneau horizontal représente l'horizon; le vertical se plaçant successivement dans le plan des méridiens de tous les points du globe, à mesure que l'on fait tourner celui-ci autour de son axe, peut être appelé *méridien universel*. Le matériel du globe artificiel étant ainsi construit, et ayant déjà tracé sur la sphère l'équateur, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus; on tracera de même un premier méridien, c'est-à-dire un grand cercle passant par les pôles, que l'on graduera; et par tous les autres degrés de l'équateur, on fera passer d'autres méridiens non gradués. Enfin, des extrémités de l'axe de rotation du globe comme pôles, et par tous les degrés du premier méridien, on tracera des parallèles à l'équateur. Cela posé, prenant sur l'équateur, à partir du premier méridien du côté de l'orient ou du côté de l'occident (*), selon que la longitude du lieu que l'on veut marquer sur le globe est orientale ou occidentale, un arc égal à la lon-

(*) Le globe étant tourné de manière que l'on ait le méridien élevé de Paris devant soi, c'est à droite pour l'orient, à gauche pour l'occident.

gitude de ce lieu : ensuite, suivant le méridien qui passe par cette division de l'équateur, du côté du nord ou du côté du sud, selon que la latitude du lieu en question est nord ou sud, jusqu'à ce qu'on parvienne au parallèle qui passe par le même point de division du premier méridien que celui donné par la latitude; l'intersection de ce parallèle et du méridien que l'on a suivi, sera le point demandé où doit être tracé le lieu que l'on veut placer sur ce globe, comme il l'est sur la surface de la terre.

25. Mais, quoique cette manière de représenter la surface de la terre soit la plus fidèle, puisqu'elle est sensiblement conforme à la vérité (*) cependant elle devient incommode, et d'un usage presqu'impraticable, lorsqu'on veut représenter avec quelqu'étendue et détails une partie de la surface de la terre; car il faut alors donner jusqu'à environ 3 centimètres de longueur aux degrés du grand cercle, ce qui exige un globe, ou du moins un segment sphérique d'environ 17 mètres de rayon, et est conséquemment fort embarrassant, surtout à bord d'un vaisseau, où l'on sait que l'on doit être économe de la place.

On a donc cherché à représenter sur un plan la surface de la terre entière ou d'une partie de la terre, en conservant, le mieux qu'il a été possible, les figures des contours des terres, des hâvres, etc.; mais surtout, on s'est appliqué à placer les lieux que l'on a tracés sur ces plans, de manière qu'ils y conservassent leur vraie latitude et longitude; c'est-à-dire qu'ils y conservassent les mêmes distances respectives aux lignes rectilignes qui représentent l'équateur et le premier méridien que celles qu'ils avoient sur le globe.

Ces figures planes s'appellent *cartes*. On distingue les *géographiques* ou *terrestres;* et les *hydrographiques* ou *marines*. Les premières cartes, dans lesquelles est comprise la carte générale de la surface de la terre, que l'on appelle *mappemonde*, se construisent par le moyen des *projections stéréographiques*, c'est-à-dire en supposant l'œil de l'observateur placé à la surface de la terre, et regardant à travers le grand cercle de la sphère, qui est le plan de projection, et qui a pour pôle le point où est placé l'œil, tout l'hémisphère opposé. La projection stéréographique est *polaire* ou *équatoriale*, suivant que l'œil de l'observateur est placé à l'un des pôles ou à l'équateur. Dans le premier cas, le plan de projection est l'équateur; dans le second, il est le méridien qui a pour un de ses

(*) Pour une plus grande exactitude, il faudroit que le corps convexe en tout sens, sur lequel on représente la surface de la terre, fût un ellipsoïde, dont le rapport du petit axe au diamètre de l'équateur seroit $\frac{333}{334}$. (*Voyez* la note 1.)

pôles le point de la surface de la terre où est supposé placé l'œil de l'observateur. (*Voyez* la note III). La construction de cartes marines, qui est l'objet de la science qu'on appelle *hydrographie*, tient à d'autres considérations que nous allons développer dans le chapitre suivant.

CHAPITRE SECOND.

De la construction des Cartes plates et des Cartes réduites.

Fig. 2. 26. Soit EMQN l'équateur terrestre, FHIK un parallèle à l'équateur placé par une latitude quelconque EF, que nous représenterons par L. Nous aurons d'après la similitude de tous les cercles, la proportion cir. EMQN : cir. FHIK :: EC : AF. Mais AF=EC×sin. PF=EC×cos. EF=EC×cos. L. Donc, représentant respectivement par C et *c* les circonférences EMQN de l'équateur et FHIK du parallèle, on aura C : *c* :: EC : EC×cos. L :: 1 : cos. L; et par conséquent

$$\frac{1}{n}C : \frac{1}{n}c :: 1 : \cos. L \ldots\ldots. (A).$$

Faisant en premier lieu $n=360$ ce qui donne $\frac{1}{n}C$ = un degré de l'équateur, et $\frac{1}{n}c$ = un degré du parallèle dont la latitude est L : enfin, représentant respectivement par Δ et δ les longueurs absolues de ces degrés, on aura la proportion (A) qui deviendra $\Delta : \delta :: 1 : \cos. L$; d'où on tire l'équation

$$\delta = \Delta \cos. L \ldots\ldots\ldots (1),$$

Fig. 3. que l'on construira de la manière suivante. Prenez sur une droite AM une longueur AB égale à la longueur absolue que vous voulez donner a un degré de l'équateur dans les cartes que vous vous proposez de construire. Du point A comme centre et avec la droite AB prise pour rayon, décrivez l'arc indéfini BEH; prenez sur cet arc à partir du point B un arc BE égal à la latitude L du parallèle; enfin du point E abaissez sur AB la perpendiculaire ED, ce qui vous donnera une longueur AD égale à longueur absolue du degré du parallèle. En effet, on a dans le triangle rectangle ADE la proportion 1 : AE :: sin. AED : AD, ou 1 : AB :: cos. EAD : AD. Mais AB=Δ, EAD=L, donc AD=Δ cos. L, et comparant cette équation avec celle (1), on aura AD=δ. C'est ce qu'il falloit démon-

trer. Il est évident que les mêmes construction et démonstration auroient eu lieu, s'il avoit été question d'autres parties aliquotes des mêmes cercles, telles que des minutes, secondes, etc.

27. Etant impossible de pouvoir figurer sur un plan le système de plusieurs cercles du globe terrestre comme il l'est sur ce globe, en conservant, en même temps, entre les parties semblables des grands et petits cercles les vraies valeurs qui doivent exister entr'elles (éq. 1), on a imaginé pour l'usage des marins deux espèces de cartes. La première, qu'on appelle *carte plate*, est peu exacte, et ne peut être de quelqu'avantage que lorsqu'elle représente une très-petite partie de la surface de la terre. La seconde, qu'on appelle *carte réduite*, sert aux opérations les plus exactes d'hydrographie, et peut représenter un espace quelconque de la surface de la terre. Nous allons successivement faire connoître la construction de ces deux cartes.

28. *Construction des cartes plates.* Pour rendre plus sensible la manière dont se construisent ces cartes; nous allons nous proposer de tracer sur un plan, la partie de la surface de la terre comprise entre les 50 et 52 degrés de latitudes nord, et entre les 30 minutes et 3 degrés de longitudes occidentales.

Soit AB (*fig. 3*) la longueur que nous voulons donner aux degrés de latitude. Nous construisons, comme nous l'avons dit à l'article 26, le degré AD du parallèle qui passe par la latitude moyenne 51° entre les latitudes extrêmes 50° et 52° de la carte, et qu'on appelle *moyen parallèle*. Cela fait, nous menons une droite horizontale AE (*fig. 4*), sur laquelle nous portons, à commencer du point E, premièrement une longueur EF qui soit égale à la moitié de celle de AD (*fig. 3*), à cause des 30 premières minutes de longitude; secondement deux longueurs FH, HA (*fig. 4*), égales à celle de AD (*fig. 3*), pour les deux autres degrés en longitude. Au point E (*fig. 4*), nous élevons sur l'horizontale EA la perpendiculaire EL que nous prenons d'une longueur égale au double de AB (*fig. 3*); ensuite finissant le parallélogramme rectangle ALEB (*fig. 4*), et subdivisant les degrés de latitudes et de longitudes en minutes de leur espèce, comme on le voit dans la figure 4, nous n'aurons plus qu'à placer les différens lieux de la surface de la terre qui sont compris dans ces limites, suivant leurs latitudes et longitudes respectives. Par exemple, pour placer convenablement sur cette carte la ville de Boulogne, dont la latitude est 50° 43'$\frac{1}{2}$ nord, et la longitude 43'$\frac{1}{2}$ occidentale, nous prendrons avec un compas et sur l'échelle EL des latitudes, à partir du point E, une longueur Eb=43'$\frac{1}{2}$; avec un second compas nous prendrons, à partir du point E, sur l'échelle AE de longitudes une longueur Ea Fig. 3 et 4.

$= 13' \frac{1}{2}$: ensuite, mettant l'une des deux pointes du premier compas au point a, et l'une des deux pointes du second compas au point b, nous ferons coïncider les deux autres pointes des deux compas, ce qui nous donnera le point demandé où doit être placé Boulogne. On opérera de même pour tous les autres lieux que leurs latitudes et longitudes permettent de placer dans cette carte.

29. Il est aisé de voir à la première inspection, combien ces cartes seroient défectueuses, si elles avoient une trop grande étendue en latitude, puisque les degrés de longitudes y étant tous égaux à ceux du moyen parallèle, les degrés des parallèles qui ont une latitude moindre que la moyenne sont trop petits; et c'est le contraire pour les degrés des parallèles placés par des latitudes plus grandes que la moyenne.

Fig. 1. Représentant par δ, δ' et δ'' les longueurs respectives d'un degré du parallèle le plus près de l'équateur, d'un degré du moyen parallèle et d'un degré du parallèle le plus éloigné de l'équateur; par L, L' et L'', les latitudes respectives de ces parallèles, par Δ la longueur d'un degré de l'équateur, on devroit avoir $\delta = \Delta \cos. L$, $\delta' = \Delta \cos. L'$, et $\delta'' = \Delta \cos. L''$ (*éq.* 1). Or, dans les cartes plates, il n'y a que la seconde de ces trois équations qui soit satisfaite; et puisque l'on y a fait $\delta = \delta'$ et $\delta'' = \delta'$, l'on a δ trop petit de la quantité $\Delta (\cos. L - \cos. L') = 2 \Delta \sin. \frac{(L' + L)}{2} \times \sin. \frac{(L' - L)}{2}$, et δ'' trop grand de la quantité $2 \Delta \sin. \frac{(L'' + L')}{2} \sin. \frac{(L'' - L')}{2}$: cette erreur n'est que d'environ $- 48'', 5$ pour les degrés du parallèle AE (*fig.* 4) dans l'exemple que nous avons pris précédemment, et de $+ 49'', 2$ pour les degrés du parallèle BL.

Mais pour une carte plate, telle que celle d'Olivier, dont se servoient autrefois les navigateurs de la Méditerranée, qui représenteroit toute la partie de cette dernière mer, comprise entre la côte orientale et une partie de la côte méridionale de l'Espagne, la côte méridionale de la France, toute la côte occidentale de l'Italie et une partie de la côte septentrionale de l'Afrique, et qui conséquemment seroit comprise entre les parallèles de 35° 44' 27'' de latitude nord, qui est celle d'Oran, et de 44° 25' nord, qui est celle de Gênes, on auroit pour les degrés de longitudes du parallèle qui passe par Oran, une erreur de $- 2' 47'', 5$; et pour les degrés de longitudes du parallèle qui passe par Gênes, on auroit une erreur de $+ 3' 3'', 5$.

Les cartes plates les moins défectueuses, sont celles qui représentent des lieux voisins de l'équateur, parce que par ces petites latitudes, les cosinus des latitudes diffèrent fort peu entr'eux.

Abandonnons ces cartes défectueuses, pour ne nous occuper que de la seule espèce de cartes dont se doivent servir les marins.

30. *Construction des cartes réduites.* Dans ces cartes, les méridiens sont parallèles entr'eux, comme dans les cartes plates, c'est-à-dire, que les degrés des parallèles sont égaux aux degrés de l'équateur. Mais afin de conserver entre les degrés des parallèles et ceux du méridien ou de latitudes, le même rapport que celui qui existe sur le globe terrestre, on fait croître les degrés du méridien suivant la même loi qui doit exister dans le décroissement des degrés des parallèles; c'est-à-dire, que les degrés des parallèles devant décroître comme les cosinus des latitudes, on conserve les degrés des parallèles égaux à ceux de l'équateur, et on fait croître les degrés de latitudes dans le rapport du cosinus des latitudes à l'unité, ou, ce qui est la même chose, on les fait croître comme les sécantes des latitudes, et par ce moyen, le rapport du degré d'un parallèle à celui correspondant du méridien, est toujours égal au cosinus de la latitude de ce parallèle.

Pour rendre ceci plus sensible, reprenons l'équation (1), art. 26,

$$\delta = \Delta \cos. L, \text{ d'où } \frac{\delta}{\cos. L} = \Delta,$$

qui exprime le vrai rapport entre δ et Δ sur le globe. Mettant cette équation en proportion, on a $\delta : \Delta :: \cos. L : 1$, et divisant les deux termes du premier rapport par cos. L, comme on le fait dans la construction des cartes réduites, on aura $\frac{\delta}{\cos. L} : \frac{\Delta}{\cos. L} :: \cos. L : 1$; mais le premier terme de cette proportion est $= \Delta$, le second est $= \Delta$ séc. L, donc $\Delta : \Delta$ séc. $L :: \cos. L : 1$; d'où l'on voit que faisant tous les degrés des parallèles égaux à celui Δ de l'équateur, et faisant croître les degrés du méridien comme les sécantes des latitudes, on conservera entre les degrés des parallèles et ceux correspondans du méridien le même rapport cos. L que celui qui existe réellement sur le globe.

Remarque. Cependant si l'on n'opéroit ces accroissemens que de degré en degré, on auroit le degré du méridien qui commenceroit à la latitude L, et finiroit à la latitude $L + 1°$, qui seroit trop petit ou trop grand, suivant que l'on multiplieroit le degré Δ de l'équateur par séc. L, ou par séc. $(L + 1°)$. Ce seroit en vain que l'on croiroit remédier entièrement à cet inconvénient, en multipliant Δ par séc. $(L + 30')$, puisque l'on sait que les accroissemens des sécantes ne sont pas proportionnels à ceux des arcs; il faut donc, pour plus d'exactitude, opérer de minute en minute, en suivant la même méthode que la précé-

dente, relative aux degrés; et quoiqu'il y ait encore le même inconvénient entre les arcs d'une minute, cependant il peut être considéré comme sensiblement nul. D'ailleurs, l'analyse fournit des moyens pour faire croître les parties du méridien, quelque petites qu'elles soient, suivant une même loi d'accroissement continu. *Voyez* pour cela la note IV, où nous avons même eu égard à l'aplatissement de la terre vers ses pôles.

31. Représentant respectivement par m', m'', m''' etc., la première, seconde, troisième etc., minute croissante, et par m la minute de l'équateur, on aura successivement $m' = m$ séc. $1'$, $m'' = m$ séc. $2'$, $m''' = m$ séc. $3'$ etc. Donc pour avoir l'étendue qu'on doit donner à une partie M du méridien qui doit appartenir sur la carte réduite à une certaine latitude, on sommera toutes les équations précédentes, ce qui donnera $m' + m'' +$ etc., on $M = m$ (séc. $1' +$ séc. $2' +$ séc. $3'$ etc.)

Les latitudes dont nous venons de parler, et qui vont toujours en croissant, s'appellent *latitudes croissantes*. La droite, qui représente une partie du méridien, et qui est divisée suivant les latitudes croissantes, s'appelle *échelle des latitudes croissantes*. Enfin, on appelle *tables des latitudes croissantes* celles qui renferment les valeurs de tous les degrés de latitudes croissantes en minutes de l'équateur. Telle est la table II.

Lorsque des deux droites contiguës qui forment l'encadrement de la carte réduite que l'on veut construire, l'horizontale a été divisée en parties égales qui représentent les parties de l'équateur terrestre, et la droite verticale suivant la loi des latitudes croissantes que nous avons fait connoître ci-dessus, on placera chaque lieu de la terre qui doit être tracé sur cette carte d'après sa latitude et longitude, comme nous l'avons fait pour les cartes plates.

32. Quoiqu'en dernier raisonnement, toutes les distances sur mer, telles que les points de partance et d'arrivée d'un vaisseau dans un temps quelconque, les distances des caps, etc., se réduisent à des parties de circonférence de l'équateur; cependant on exprime encore ces distances en *myriamètres*, suivant la nouvelle division décimale des longueurs, ou en *lieues*, suivant l'ancienne division des longueurs. Mais, ainsi que l'a dit M. de Fleurieu dans son *Application du Système métrique décimal à l'Hydrographie*, page 85, on ne pourra se servir en mer de cette première et simple division, que lorsque nous serons parvenus à posséder des tables à l'usage de la navigation, qui soient calculées pour le cercle décimal; et des cartes marines graduées pour la division décimale du cercle. Ainsi, d'après cet auteur et notre propre conviction, nous continuerons à nous servir, quoiqu'à regret, de l'ancienne division, et nous ne parlerons que

de la *lieue marine*, qui est la vingtième partie d'un degré terrestre, et qui, conséquemment, vaut 3 minutes de degré. Or, le degré terrestre (*) est de 57008^t; donc la lieue marine est de 2850^t,4, et le *mille marin*, qui est le tiers d'une lieue, est de 950^t, 13.

De cette relation qui existe entre les degrés de grand cercle du globe terrestre et les lieues marines, il suit qu'on pourra aisément convertir en degrés et minutes un nombre de lieues proposé, et réciproquement. En effet, soit N le nombre de lieues, $\frac{N}{20}$ sera le nombre de degrés; mais si N n'est pas multiple de 20; alors représentant par Q le quotient, et par n le nombre de lieues restantes, on aura $N = Q^\circ + (3n)'$, puisque chaque lieue vaut 3 minutes. Ainsi, règle générale, pour convertir les lieues en parties de cercle, *divisez ce nombre par* 20, *ce qui vous donnera les degrés, et multipliez les lieues restantes par* 3 *pour avoir les minutes.*

Ainsi, 237 lieues $= 11^\circ + (3 \times 17)' = 11^\circ 51'$.

Par la raison contraire, si on veut réduire les parties de cercle en lieues marines, *on multipliera les degrés par* 20, *et on divisera les minutes par* 3.

Ainsi, $31^\circ 27'$ réduits en lieues, me donneront $31 \times 20 + \frac{1}{3} 27 = 620 + 9 =$ 629 lieues.

CHAPITRE TROISIÈME.

De la manière de mesurer le chemin que fait le vaisseau, et de diriger sa route sans le secours des astres, et description des instrumens qui servent à ces opérations.

33. Les cartes dont nous avons parlé dans le chapitre précédent, ne peuvent être utiles aux marins, qu'en tant qu'ils savent quelle est, dans un temps déterminé, la longueur de la route du vaisseau et sa direction.

L'instrument qui sert à connoître la première, c'est-à-dire, à mesurer le che-

---

(*) C'est le degré du méridien qui est par 50° (nouvelle divis.), ou 45° (anc. divis.) de latitude vraie, et qui est moyen entre tous les autres, ainsi que nous l'avons démontré à la note 1, art. 18.

min, s'appelle *sillomètre*, et celui qui sert à connoître la direction de la route, s'appelle *boussole*.

34. De tous les sillomètres connus, le meilleur, sans doute, quoique l'un des premiers découverts, est celui qu'on appelle *loch* et dont voici la forme :

Fig. 5. Le loch se compose d'un petit secteur de cercle en bois ABQ, à peu près égal à un sixième du cercle, ayant pour rayon AB d'environ 14 centimètres. L'épaisseur de cette pièce est de 7 millimètres, et va en diminuant un peu vers la base BQ; sur la surface convexe BQ de la base circulaire, est fixée une petite plaque de plomb, de même largeur que le secteur. Cette pièce s'appelle le *bateau du loch*. Trois cordons NB, NQ, NA de même longueur (à peu près 4 décimètres) se réunissant à un nœud N, ont leurs extrémités attachées aux trois angles B, Q, A; les deux premiers fixément, le dernier par une simple cheville *c*, qui entre un peu forcément dans un trou pratiqué exprès au sommet A du bateau du loch. Au nœud N de ces trois cordons est attaché un autre cordon N*boqdn'n''n'''*, etc., qui est fort long et de même diamètre que les trois premiers, c'est-à-dire, d'environ 6 millimètres de diamètre. Ce quatrième cordon, qui s'appelle *ligne du loch*, s'enroule sur un dévidoir *aa*, qu'on appelle *tour du loch*, et qui tourne facilement autour d'un essieu ou axe ED, tenu horizontalement.

Voici maintenant la manière de se servir du loch : On jette de la poupe du vaisseau et du côté opposé au vent, c'est-à-dire, *sous le vent*, le bâteau du loch à la mer; il est évident qu'il doit y tomber verticalement et s'y tenir de même, puisque la base est, par construction, plus pesante que les deux côtés rectilignes du secteur. De plus, la plaque de plomb est d'une épaisseur suffisante pour que les neuf dixièmes de la hauteur du bateau soient dans l'eau, et que conséquemment, il puisse offrir une résistance à ce dernier fluide qui l'empêche de suivre le vaisseau, et que le vent n'ait point de prise sur lui. Mais lorsque le bateau du loch tombe dans la mer il a toute la vitesse du vaisseau qu'il ne perd que peu à peu dans l'eau; ainsi il suit pendant quelques instans le vaisseau, mouvement auquel se joint encore celui occasionné par le *remoux* du vaisseau, c'est à-dire, par les tourbillons d'eau que laisse en arrière de lui le vaisseau lorsqu'il marche, et qui indiquent la vraie direction de la route. Ce remoux, qu'on appelle encore *houache*, étant occasionné par la remonte des filets d'eau qui, venant à s'échapper des deux bords du vaisseau, pour remplir le vide qu'il laisse derrière lui lorsqu'il marche, s'entrechoquent et tourbillonnent, doit de nécessité communiquer un mouvement très-irrégulier au bateau du loch; mais

ce mouvement, qui a déjà servi à détruire celui communiqué par la vitesse du vaisseau sur le bateau du loch, devient à peu près nul, lorsque ce dernier est à une distance égale à la longueur du vaisseau. On laisse donc filer une longueur No de la ligne du loch égale à la longueur du vaisseau que l'on marque par un morceau de drap rouge fixé au point o; et c'est de ce point-là que commence la mesure de la longueur de la route du vaisseau pendant 30 secondes de temps, lorsque la vitesse du vaisseau est modérée, ou pendant 15 secondes de temps lorsque la vitesse du vaisseau est très-grande. Ce temps se compte par le moyen d'un petit *sablier* ou *ampoulette* dont la durée est de 30 ou 15 secondes, suivant les circonstances. Ainsi, à mesure que le principal observateur, qui est celui qui jette le loch, file la ligne de loch et compte la longueur de la route, sent le morceau de drap o passer dans ses mains, il crie à celui qui tient l'ampoulette : *vire*; et ce second observateur tournant aussitôt le sablier, le tient verticalement, la partie vide en bas. A l'instant où tout le sable a passé de la partie supérieure dans l'inférieure, le second observateur crie : *stop*; et aussitôt le premier observateur arrête la ligne de loch; et, souvent obligé de se faire aider, il donne quelques fortes secousses au cordon pour faire sortir la petite cheville c de son trou, opération nécessaire pour que le bâteau du loch, ne présentant plus que l'épaisseur de sa base à l'eau, puisse se retirer aisément à bord du vaisseau. La ligne de loch à partir du point o, est divisée en parties égales on', $n'n''$, $n''n'''$, etc. dont nous déterminerons tout à l'heure la longueur, et qui s'appellent *nœuds*. Chacun de ces nœuds est divisé en demi-nœuds en *d*, et en quarts de nœuds en *q*. Les nœuds n', n'', n''', etc., sont marqués par un petit bout de ficelle, qui a autant de nœuds qu'elle marque de divisions égales o n', c'est-à-dire, que la petite ficelle attachée au point n', a un seul nœud; celle attachée à n'' en a deux, et ainsi de suite. Les demi-nœuds *d* et les quarts de nœuds *q* sont marqués par de simples bouts de ficelles, ceux en *d* étant doubles de ceux en *q*, afin de les distinguer : de manière qu'à la fin de l'opération dont nous venons de parler, le premier observateur voit quelle est la division de la ligne de loch la plus voisine de la main avec laquelle il facilite le déroulement de cette ligne; d'où il conclut que le vaisseau *file tant de nœuds par heure*, expression qui signifie que le vaisseau parcourt autant de milles marins ou tiers de lieue qu'il y a eu de nœuds de la ligne de loch qui se sont dévidés de dessus le tour dans les 30 ou 15 secondes qu'a duré l'opération. En effet, nous avons vu que la lieue marine est de 2850^t,4, et le mille marin de 950^t,13, ou 5700,8 pieds. Or, si le vaisseau faisoit d'un mouvement uniforme, un mille par heure, il est évident que dans 30″ de Fig. 5.

temps, ou la cent vingtième partie d'une heure, il ne feroit que la cent vingtième partie d'un mille marin, ou $\frac{5700^{pi}}{120} = 47^{pi.},5$. Donc, faisant les divisions de la ligne de loch de 47 pieds et demi, le vaisseau fera autant de milles marins par heure qu'il y aura eu de nœuds de filés dans la demi-minute de temps qu'a duré l'opération.

Lorsqu'on n'emploie que le quart de minute dans l'opération, alors chaque nœud filé pendant ce temps-là indique deux milles de chemin par heure, puisque 15″ ne sont que la 240.me partie d'une heure. (*Voyez* la note V.)

35. Mais afin que l'opération dont nous venons de parler ait toute l'exactitude dont elle est susceptible, il faut prendre des précautions, sans lesquelles on perdroit tous les avantages que l'on en peut retirer. Ces précautions consistent principalement ; 1.° à rectifier de temps en temps la longueur de la ligne de loch, qui est sujette à des allongemens ou raccourcissemens, ou à en tenir compte dans l'évaluation du chemin; par exemple, si l'on s'apercevoit que chaque nœud s'est allongé d'un trentième de sa longueur, il faudroit augmenter d'un trentième le nombre de nœuds filés, puisqu'alors chaque nouveau nœud, ainsi altéré, donneroit, pour le chemin correspondant dans une heure, 120 fois sa valeur actuelle.

2.° A rectifier le sablier qui mesure le temps que dure l'opération, ce qui se fera aisément lorsqu'il y aura à bord du vaisseau une bonne montre à secondes morte. Dans le cas contraire, on peut se servir de la méthode du pendule simple qui se forme avec une balle de plomb de 7 ou 8 millimètres de diamètre, que l'on suspend à l'extrémité d'un fil de soie plate, ou de fil que l'on cire pour l'empêcher de se détordre, et par conséquent de s'allonger; ensuite, passant ce fil dans une fente pratiquée à un solide de forme allongée et placé horizontalement, on fait ensorte que la distance du point de suspension au centre de la balle, soit de 248 $\frac{1}{2}$ millimètres; cet appareil étant fini, on écarte la balle à peu de distance de sa position naturelle et on l'abandonne à elle-même. Il est démontré par les lois du mouvement, qui a pour cause la pesanteur, que chaque vibration de ce corps oscillant sera sensiblement d'une demi-seconde de temps; ainsi on devra compter soixante vibrations dans le temps que le sable de l'ampoulette passera d'un des deux bassins dans l'autre, si elle est exacte. Mais dans le cas contraire, les vibrations que l'on comptera de plus ou de moins seront autant de demi-secondes d'erreur que l'on tâchera de corriger, ou auxquelles on aura égard dans l'opération du loch, comme nous l'avons fait précédemment pour les erreurs dans la ligne du loch.

Avec ces précautions on auroit d'une manière suffisamment exacte, la mesure du chemin parcouru toutes les heures, qui est ordinairement l'intervalle de temps que l'on met d'un jet à l'autre du loch, si la vitesse du vaisseau étoit uniforme; mais il y a tant de circonstances qui l'accélèrent ou la retardent, que l'on doit encore avoir égard dans l'estime du chemin à ces variations. C'est dans ces circonstances que les anciens marins exercés par une longue pratique, ont un grand avantage sur ceux qui ne se dirigent dans leurs opérations que d'après la théorie qui a les mathématiques pour base; mais combien ce désavantage de la part de celui dont l'enseignement pose sur une saine théorie est petit, lorsqu'abandonnant au routier ces pratiques grossières, il lève les yeux vers le firmament, et que, guidé par le flambeau de l'analyse, il y lit la marche du vaisseau et la direction de sa course avec une exactitude que ne pourra jamais atteindre celui qui n'a que son loch, sa boussole, ses cartes et même des yeux exercés à estimer avec précision les déviations des mouvemens du navire.

36. Mesurer le chemin que fait le vaisseau, n'est qu'une partie de ce qu'a à faire le marin; il faut encore qu'il connoisse la direction de sa route, et dans cette opération il est aidé par l'un des phénomènes les plus extraordinaires que nous offre la nature. L'expérience a prouvé qu'une lame de fer, ou d'acier, ayant été aimantée (*), et étant suspendue ou soutenue à son centre de gravité par un pivot sur lequel elle est en équilibre, se dirige toujours dans une direction qui est plus ou moins très-rapprochée de la ligne nord-et-sud. Prenons donc une lame d'acier plate, large d'environ 5 millimètres, et longue de 13 centimètres, aimantons-la, et posons-la en équilibre sur un pivot placé verticalement au

(*) Comme l'on est quelquefois obligé, lorsqu'on est en mer, d'aimanter les règles d'acier qui sont appelées *Aiguilles de Boussoles*, nous allons donner la meilleure manière d'effectuer la communication du magnétisme à ces lames d'acier, et qui est due à M. Coulomb, savant physicien et membre de l'Institut.

Placez la lame d'acier que vous voulez aimanter sur un plan horizontal; prenez deux barreaux aimantés (on en embarque sur tous les vaisseaux de l'empire) que vous placez verticalement sur le milieu de la lame d'acier, de manière que leurs pôles opposés se correspondent, c'est-à-dire, que le pôle austral de l'un des barreaux étant celui de contact avec la lame d'acier, ce devra être le pôle boréal de l'autre barreau qui devra être en contact. Cela fait, inclinez en sens inverse vos deux barreaux, de manière qu'ils forment entr'eux un angle d'environ 71 degrés, et tirez-les en sens contraire l'un de l'autre jusqu'à une petite distance de l'extrémité la plus voisine; puis recommencez en partant toujours du milieu. Après un assez petit nombre de frictions semblables, votre aiguille sera suffisamment aimantée.

fond d'une boîte de cuivre plombée, afin qu'elle puisse tourner librement. Mais afin d'empêcher l'aiguille aimantée de vaciller, ce que les mouvemens du vaisseau pourroient occasionner, chargeons-la d'un carton très-léger, ou d'une feuille de tôle très-mince taillée circulairement et collée entre deux morceaux de papier de même figure et de même diamètre. Traçons sur ce cercle une ligne qui soit dans la direction de l'axe de l'aiguille aimantée; cette ligne sera évidemment la ligne nord-et-sud marquée par l'aiguille, et que l'on appelle le *méridien magnétique;* marquons l'extrémité de cette droite qui se dirige vers le nord par une aigle impériale, dont le bec se dirigera vers le point nord magnétique; l'autre extrémité de cette droite, qui indique le sud magnétique, se marquera par la lettre S. Elevons sur le milieu de cette droite une autre droite qui lui soit perpendiculaire; celle-ci indiquera la ligne est-et-ouest magnétique, ce que nous indiquerons en plaçant la lettre E à l'extrémité de la droite, qui est tournée vers l'est; et celle O à l'autre extrémité, pour indiquer l'ouest. Ainsi, abstraction faite de la petite différence qu'il y a de la vraie ligne nord-et-sud, et de la ligne magnétique nord-et-sud, différence qu'on appelle *déclinaison* ou *variation* de l'aiguille, et dont nous nous occuperons dans la suite, la machine dont nous parlons nous indiquera toujours les quatre points cardinaux, que les marins appellent encore les quatre principaux *rumbs* ou *airs de vent.* Divisons chacun de ces quatre angles droits en deux angles égaux par deux autres droites ou diamètres perpendiculaires entr'eux. Ces quatre nouveaux rayons, formant avec les quatre premiers des angles demi-droits, indiquent quatre nouveaux airs de vent dont les dénominations se composent de celles des quatre principaux rumbs. Ainsi, celui des nouveaux qui tient le milieu entre le nord et l'est, participant autant de l'un que de l'autre s'appelle *nord-est.* De même, le rumb qui tient le milieu entre l'est et le sud, s'appelle *sud-est,* et ainsi de suite pour le troisième intermédiaire entre le sud et l'ouest qui s'appelle *sud-ouest,* ou simplement *suroi,* et le quatrième à égale distance du nord et de l'ouest, qui s'appelle *nord-ouest,* ou simplement *noroi.* Divisons encore chacun de ces huit angles égaux en deux parties égales, par huit nouveaux rayons qui seront huit nouveaux airs de vent, dont les dénominations se déduiront de ceux des huit premiers, c'est-à-dire que celui qui divise en deux angles égaux l'angle formé par le nord et le nord-est, participant plus du nord que de l'est, s'appellera *nord-nord-est;* celui qui divise en deux angles égaux l'angle formé par le nord-est et l'est, participant plus de l'est que du nord, s'appellera *est-nord-est :* et ainsi de suite des six autres qui s'appelleront successivement, et par la même raison, *est-sud-est*, *sud-sud-est*,

sud-sud-ouest ou *susuroi*, *ouest-sud-ouest* ou *ouestsuroi*, *ouest-nord-ouest* ou *ouestnoroi* et *nord-nord-ouest* ou *nornoroi*. Enfin, divisant chacun de ces seize angles égaux en deux angles égaux par huit diamètres ou seize rayons, ceux-ci indiqueront seize nouveaux airs de vent, dont les dénominations se composent seulement de ceux des huit premiers rumbs de vent. Par exemple, celui de ces seize nouveaux rumbs de vent qui divise l'angle formé par le *nord* et le *nord-nord-est* en deux angles égaux, formant avec le nord un angle qui n'est que le quart de celui formé par le nord et le nord-est, et participant plus du premier de ces rumbs de vent que du second, s'appelle *nord* $\frac{1}{4}$ *nord-est:* et ainsi des quinze autres qui, par une raison semblable, s'appellent successivement *nord-est* $\frac{1}{4}$ *de nord*, *nord-est* $\frac{1}{4}$ *d'est*, *est* $\frac{1}{4}$ *nord-est*, *est* $\frac{1}{4}$ *sud-est*, *sud-est* $\frac{1}{4}$ *d'est*, *sud-est* $\frac{1}{4}$ *de sud*, *sud* $\frac{1}{4}$ *sud-est*, *sud* $\frac{1}{4}$ *sud-ouest*, ou *sud* $\frac{1}{4}$ *suroi*, *sud-ouest* $\frac{1}{4}$ *de sud*, ou *suroi* $\frac{1}{4}$ *de sud*, *sud-ouest* $\frac{1}{4}$ *d'ouest*, ou *suroi* $\frac{1}{4}$ *d'ouest*, *ouest* $\frac{1}{4}$ *sud-ouest*, ou *ouest* $\frac{1}{4}$ *suroi*, *ouest* $\frac{1}{4}$ *nord-ouest*, ou *ouest* $\frac{1}{4}$ *noroi*, *nord-ouest* $\frac{1}{4}$ *d'ouest*, ou *noroi* $\frac{1}{4}$ *d'ouest*, *nord-ouest* $\frac{1}{4}$ *de nord*, ou *noroi* $\frac{1}{4}$ *de nord*, enfin *nord* $\frac{1}{4}$ *nord-ouest*, ou *nord* $\frac{1}{4}$ *noroi*. Le cercle fixé à l'aiguille aimantée étant ainsi divisé en 32 angles égaux, qui, conséquemment, sont chacun de $\frac{360°}{32} = 11° 15'$, par les 32 airs de vent, s'appelle *rose des vents*. La figure 6 en représente une: on y voit à l'extrémité de chaque rumb de vent, sa dénomination indiquée seulement par ses lettres initiales; par exemple, N N O exprime le *nord-nord-ouest* ou *nornoroi*; S O $\frac{1}{4}$ S indique le *sud-ouest* $\frac{1}{4}$ *de sud* ou *suroi* $\frac{1}{4}$ *de sud*; et de même pour les autres. (*Voyez* la note v.) Fig. 6.

Tout étant disposé comme nous venons de le dire, fermons la boîte de cuivre plombée qui a la forme d'une demi-sphère évidée, et dans laquelle se trouve le pivot vertical sur lequel est en équilibre l'aiguille aimantée chargée de la rose des vents, par une glace; et nous aurons cet instrument si utile aux marins que l'on appelle *boussole* (*). Mais les mouvemens irréguliers d'un vaisseau à la mer, occasionnés par le tangage et le roulis, pouvant déranger la rose de dessus son pivot; la boussole doit être soutenue au milieu de deux balanciers circulaires placés l'un dans l'autre horizontalement, et réunis par deux petits boutons

(*) L'invention de la boussole, que l'illustre et infortuné Bailly croit avoir plus de 4400 ans d'antiquité chez les Chinois, n'a été connue chez les Européens que vers le douzième siècle; il est à remarquer que cette connoissance n'a pas été transmise par les peuples orientaux qui, depuis si long-temps en étoient en possession; mais qu'elle a été de nouveau découverte, vers l'an 1300, par un Napolitain, appelé *Flavio Gioja*, né à Pusilano, château dans le voisinage d'Amalfi.

opposés, qui permettent le balancement vertical du plus petit autour de ces deux points. De même la boussole doit tenir au plus petit des deux balanciers d'une manière semblable, si ce n'est que les boutons qui réunissent la boussole au plus petit des deux balanciers sont placés à 90° du premier; en sorte que le premier balancement vertical se faisant, je suppose, du nord au sud, et réciproquement, le second balancement aura lieu de l'est à l'ouest, et réciproquement. Par ce moyen-là la boussole se trouve toujours placée horizontalement. C'est de cette manière que l'on construit les supports des lampes marines, et généralement tout ce qui doit conserver sa position horizontale dans les roulis et tangage du vaisseau.

On place ordinairement la boussole et ses supports dans une boîte de bois qui est carrée, et qui a même un couvert dans les temps où l'on ne s'en sert pas.

57. Quoique les marins appellent indifféremment *rumb* ou *air de vent* chacune des 32 pointes de la boussole qui indiquent les 32 divisions égales de l'horizon, et les angles que les 32 rayons qui aboutissent aux 32 pointes forment entr'eux; nous croyons que, pour plus de clarté et de simplicité, nous devons nommer *airs de vent* les 32 pointes de division de la boussole, et *rumbs* les angles que forment les 32 rayons. Ainsi, le NE, S $\frac{1}{4}$ SO, etc. sont autant d'airs de vent différens; et 11° 15', qui est l'angle formé par deux rayons consécutifs de la boussole, est un *rumb de vent*. De manière que nous dirons que du NE au SE $\frac{1}{4}$ S, il y a neuf rumbs de vent.

Nous ne saurions trop engager nos lecteurs à se rendre très-familières toutes ces dénominations, enfin tout ce qui a rapport à la rose des vents.

58. La boussole prend le nom de *compas de route* lorsqu'elle sert à diriger le *cap* du vaisseau (c'est-à-dire, le point de l'avant du vaisseau qui est dans le plan de l'axe de sa quille) à tel air de vent. Alors on place la boussole dans une espèce d'armoire d'environ un mètre de hauteur, quinze décimètres de longueur et quarante-huit centimètres de profondeur, qui s'appelle *habitacle* et se place carrément sur le tillac en avant de la roue du gouvernail; de manière que les caps des deux compas (*) qui sont placés dans les deux compartimens extrêmes

(*) On nomme *cap du compas* le point de la boîte de la boussole qui regarde l'avant, et qui est marqué par une ligne; de sorte que la rose, en tournant sur son pivot, n'a aucun mouvement de rotation horizontale, et cependant, par les différens points de cette rose où correspond le cap du compas, on voit de combien de rumbs de vent et degrés le cap du vaisseau s'est écarté à *tribord* ou à *bâbord* (à droite ou à gauche) de sa première direction.

de l'habitacle soient exactement dirigés sur des parallèles à la quille. Entre les deux compartimens où se trouvent les deux compas, chacun d'eux placé devant chacun des deux timoniers qui sont à la roue du gouvernail, il y a un autre compartiment séparé des deux premiers par un châssis garni de verre, dans lequel se trouve une lampe de cuivre destinée à éclairer les deux premiers compartimens. Il n'entre dans toute la construction de l'habitacle que des chevilles de bois et des clous de cuivre.

D'après les propriétés de l'aimant, il est évident que les deux compas, quoique distans l'un de l'autre d'environ 5 décimètres, doivent se nuire mutuellement. Mais, pour rectifier ces petites perturbations, on place sur le milieu du gaillard d'arrière, et en avant de la *gorge de loup* (*), une habitacle simple, c'est-à-dire, qui n'a qu'un compartiment dans lequel on met un troisième compas de route qui, étant isolé, n'éprouve aucune perturbation.

39. Lorsque la boussole sert à *relever* différens objets éloignés, c'est-à-dire, à déterminer à quels airs de vent répondent ces objets, alors on l'appelle compas de *variation*. Mais, dans ce cas-là, on la garnit de deux pinnules A et B par lesquelles l'œil placé en A vise l'objet Q. Pendant qu'un observateur aligne les deux pinnules A et B avec l'objet Q, un autre examine quel est l'angle que forme la ligne nord et sud du compas à l'égard d'un fil CD tendu d'un bord à l'autre de la boîte perpendiculairement à la ligne A B, qui est sensée passer par les fentes des deux pinnules. Cet angle est celui dont l'objet observé est écarté de la ligne est-et-ouest du compas. Fig. 7.

En effet, soit NS la ligne nord-et-sud; OE la ligne est-et-ouest; ABQ la ligne d'alignement entre les deux pinnules A,B et l'objet Q; CD le fil qui, sur le compas est perpendiculaire à la ligne d'alignement; il est clair qu'on aura l'angle CMO formé par le fil et la ligne est-et-ouest, qui sera égal à l'angle NMQ formé par la ligne d'alignement AMBQ avec la ligne nord-et-sud NS; puisque, si des deux angles droits NMO, CMQ, on retranche l'angle commun CMN, il reste $OMC = NMQ$. Fig. 8.

Mais il faut observer que cette méthode de relèvement, d'ailleurs très-utile dans le cabotage pour connoître le gissement des terres, caps, etc., et déterminer la position du vaisseau, ne doit cependant s'employer que lorsque l'on relève des objets qui sont à l'horizon, ou sensiblement peu élevés au-dessus de

(*) L'escalier par où passent les officiers pour descendre dans la batterie, et qui est abrité par une espèce de tambour.

l'horizon : car, si l'on relevoit un objet élevé au-dessus de l'horizon, tel, par exemple, que le soleil; alors l'angle CMO ne seroit plus l'angle formé par la ligne nord-et-sud avec le rayon visuel qui va de l'œil de l'observateur au soleil; mais ce seroit l'angle formé par la ligne nord-et-sud avec la droite qui iroit du centre M de la rose au point où tomberoit la perpendiculaire abaissée de l'astre sur l'horizon. Au reste on peut obvier à cet inconvénient, soit par le moyen du *compas azimutal* (voyez *Construction et Usage d'un nouveau compas azimutal*, par M. de Gaulle, imprimée au Havre en 1779), soit par des observations des hauteurs, qui est la seule méthode dont nous parlerons lorsqu'il en sera temps; car cette dernière méthode, qui, à la vérité, exige quelques calculs, est plus exacte que celle qui exige un instrument assez compliqué et cher.

40. Par le moyen du gouvernail, on peut toujours, lorsque la direction du vent le permet (*), mettre le cap du vaisseau à tel air de vent déterminé; mais si l'on excepte le cas où le navire est vent arrière ou du moins grand largue (**), la direction de sa route n'est pas sur le même air de vent que celui vers lequel il gouverne, ce qui provient de ce que le vent, frappant le vaisseau par le côté qu'on appelle le *côté du vent*, le pousse plus ou moins vite de l'autre côté qu'on appelle le *côté de dessous le vent*. La quantité dont la direction de la route du vaisseau s'éloigne de celle de l'air de vent auquel on gouverne, s'appelle *dérive*, et il est aisé de déterminer sa valeur, en relevant avec un compas de variation la *houache* ou trace que laisse le vaisseau derrière lui et qui est dans la direction de sa vraie route, l'angle que forme ce relèvement, avec l'air de vent auquel on gouverne, est la dérive du vaisseau : par exemple, je suppose que le vent étant à l'E $\frac{1}{4}$ SE du compas, on gouverne au NE $\frac{1}{4}$ N, et qu'on relève la houache du vaisseau au S $\frac{1}{4}$ SO; nous en conclurons que l'angle formé par la quille du vaisseau qui est dans la direction de la ligne NE $\frac{1}{4}$ N et SO $\frac{1}{4}$ S, et la houache ou la vraie route du vaisseau qui est dans la direction de la ligne N $\frac{1}{4}$ NE et S $\frac{1}{4}$ SO, est de deux rumbs de vent, c'est-à-dire, de 22° 30', ce qui est la dérive du

(*) Il faut, pour pouvoir gouverner à un air de vent indiqué, que l'angle formé par cet air de vent et celui d'où vient le vent, soit au moins de six rumbs de vent, c'est-à-dire, de 67° 30' : cependant les bâtimens gréés en voiles *latines*, c'est-à-dire, en voiles triangulaires, gouvernent jusqu'à cinq rumbs de vent, ou 56° 15' au plus près du vent.

(**) Le vent est *largue*, lorsque sa direction forme avec celle de l'air de vent auquel on gouverne, un angle plus grand que six rumbs de vent; le vent est dit *grand largue*, lorsque l'angle dont nous venons de parler est plus grand que huit rumbs de vent.

vaisseau. On mesure quelquefois cet angle formé par la houache du vaisseau et la quille, en se servant d'une espèce de graphomètre divisé en degrés et placé à demeure sur le milieu de la largeur du vaisseau, à l'endroit le plus commode de la poupe, qui est le milieu de la galerie sur les vaisseaux, ou la fenêtre du milieu de la grande chambre sur les frégates et autres bâtimens plus petits.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Principes fondamentaux de la résolution des problêmes de navigation.

41. Tous ceux qui ont navigué savent qu'il est rare qu'un vaisseau fasse long-temps route sur un même air de vent, et avec une vitesse uniforme; mais, quelque court que soit ce temps-là, c'est pendant ce même temps que nous considérerons la marche du vaisseau, c'est-à-dire la longueur de sa route, l'angle que fait cette route avec la ligne *nord-et-sud*, qu'on appelle *angle du rumb de vent*, et les différences en latitudes et longitudes des points de *départ* et *d'arrivée*, le premier de ces points étant celui où se trouvoit le vaisseau au premier instant du temps pour lequel on opère, le second étant celui où se trouve le vaisseau au dernier instant. On opère de même pour tous les temps suivans, pendant lesquels la route du vaisseau étoit uniforme; ensuite, comme nous l'enseignerons, on réduit toutes ces routes à une seule.

42. Supposons que le vaisseau, étant placé à un point quelconque du globe terrestre, aille droit au nord ou au sud du monde (*), il est évident qu'alors, sa route étant sur la direction de son méridien de partance, il décrira un arc de grand cercle : de même si le vaisseau va droit à l'est ou à l'ouest, sa latitude ne changeant pas, et par conséquent sa distance à chacun des deux pôles étant toujours la même, il est évident qu'il décrira un arc de parallèle à l'équateur; ainsi,

---

(*) J'ajoute *du monde*, parce que, ainsi que nous l'avons déjà dit, la ligne nord-et-sud du compas de route, c'est-à-dire le méridien magnétique, se confond rarement avec celui du monde; et que tout ce que nous disons dans ce chapitre se rapporte aux airs de vent corrigés de la variation: ainsi dorénavant lorsque nous nommerons un air de vent, il sera sous-entendu qu'il est corrigé de sa variation.

dans les deux cas dont nous venons de parler, la route du vaisseau est un arc de cercle; mais si le vaisseau navigue sur un air de vent différent de ces quatre principaux, alors sa route ne sera plus un arc de cercle, mais un arc dont tous les points se trouveront dans des plans différens et qui, conséquemment, appartient à une courbe à double courbure.

Fig. 9. En effet, menons par trois points infiniment près l'un de l'autre I, L et K de la courbe BD, les méridiens PIF, PLH, PKC, il est clair que le vaisseau faisant route sur un même air de vent, et par conséquent coupant tous les méridiens sous un même angle, les angles DIP, DLP, DKP seront égaux entr'eux. Or, par la propriété des plans qui se coupent, il faudroit, pour que les arcs KL, LI fussent dans un même plan, c'est-à-dire, qu'ils appartinssent à un même arc de cercle, que les grands cercles auxquels appartiennent respectivement les arcs des méridiens PC, PH, PF fussent parallèles; mais c'est ce qui n'est pas, puisque tous les méridiens se coupent aux pôles; donc tous les arcs infiniment petits IL, LK, etc., de la courbe BD, sont dans des plans différens, et par conséquent cette courbe est à double courbure. On l'appelle *loxodromie* ou ligne *loxodromique*.

Il est aisé de voir que cette courbe prolongée indéfiniment du côté d'un des pôles P, s'en approchera sans cesse en tournant autour de lui sans pouvoir jamais l'atteindre; car, si elle l'atteignoit, elle auroit un de ses points qui seroit en même temps sur tous les méridiens, et par conséquent elle couperoit tous les méridiens à la fois sous un même angle; ce qui est impossible.

La loxodromie est conséquemment une espèce de spirale à double courbure, dont chaque spire est comprise entre deux points consécutifs de sa section avec un même demi-méridien.

43. Cherchons maintenant quelles seront les différences en latitude et longitude d'un vaisseau parti d'un point B et arrivé à un point D, après avoir parcouru l'arc de loxodromie BD.

Par les points B et D de partance et d'arrivée, faisons passer, 1.° les deux quarts de méridiens PQ, PE, en supposant que QE est l'arc de l'équateur compris entre ces deux méridiens; 2.° les deux arcs de parallèles à l'équateur BA et DT. Il est évident que BQ étant la latitude du point de partance B, et DE ou TQ celle du point d'arrivée, la différence de ces deux latitudes sera l'arc TB. Or, si nous supposons la loxodromie BD divisée en un nombre infini d'arcs infiniment petits IL, LK, etc.; que par les points I, L, K, etc., on fasse passer des méridiens PF, PH, PC, etc., et qu'enfin par les points L, K, etc., on fasse passer des parallèles à l'équateur, il est évident qu'on formera de cette manière autant

de triangles infiniment petits LaI, KLa', etc., que l'on pourra considérer Fig. 9.
comme autant de triangles rectilignes rectangles infiniment petits, qui nous donneront les proportions $1 : \cos. R :: LI : Ia$, $1 : \cos. R :: LK : La'$, etc., en représentant par R l'angle constant $LIa = KLa' =$, etc., que forme la loxodromie avec tous les méridiens, et que nous appellerons, suivant l'usage, *angle du rumb de vent.* Or, à cause que le premier rapport est le même dans toutes ces proportions, nous aurons la suite de rapports égaux $LI : Ia :: LK : La'$, etc.; et, puisque dans toute suite de rapports géométriques égaux, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent (Alg. §. 95); nous aurons $LI + LK +$ etc., ou $BD : Ia + La' +$ etc., ou $BT :: LI : Ia$. Mais $LI : Ia :: 1 \cos. R$; donc $BD : TB :: 1 : \cos. R$; d'où l'on conclut ce théorème général : *Le rayon des tables est au cosinus de l'angle du rumb de vent couru, comme la longueur de la route faite par le vaisseau sur un même air de vent, est à la différence ou somme des latitudes de départ et d'arrivée.* Donc, représentant par ξ l'arc de loxodromique parcouru BD, ou la longueur de la route du vaisseau, par L' la latitude de partance et par L'' la latitude d'arrivée; on aura

$$\xi = \frac{L'' \mp L'}{\cos. R} \ldots\ldots\ldots (2)\ (*).$$

Mais si nous construisons un triangle rectiligne rectangle DTB, en faisant Fig. 10.
l'angle DBT égal à l'angle R du rumb de vent, et BD égal à la longueur ξ de la route, nous y aurons $TB = \xi \cos. R$; et comparant cette équation avec la précédente (2), d'où on tire $L'' \mp L' = \xi \cos. R$, nous aurons le côté TB du triangle rectiligne, qui sera la longueur du chemin fait en latitude; et réduisant les lieues de ce chemin en degrés de grand cercle terrestre (art. 52), on aura la différence en latitude.

44. Les mêmes triangles infiniment petits LIa, KLa', etc., donnent la suite Fig. 9.

(*) La proportion $1 : \cos. R :: LI : Ia$ pouvoit être mise sous cette forme $1 : \cos. R :: d\xi : \pm dL''$, le signe positif lorsque la latitude va en croissant, le signe négatif dans le cas contraire; donc $d\xi = \pm \frac{dL''}{\cos. R}$, et intégrant on a $\xi = \pm \frac{L''}{\cos. R} + const.$; mais lorsque $\xi = 0$, il est clair que $L'' = L'$, donc $const. = \pm \frac{L'}{\cos. R}$; et par conséquent on a complétement $\xi = \frac{L'' \pm L'}{\cos. R}$. Le signe + est pour le cas où les deux latitudes seroient de dénominations différentes, car alors étant des signes différens, on a $L'' - (-L') = L'' + L'$.

Fig. 9. de proportions 1 : sin. R :: L I : L a; 1: sin. R :: KL : K a', etc. Donc, à cause du rapport commun 1 : sin. R de toutes ces proportions, on aura la suite de rapports géométriques égaux LI : L a :: KL : K a', etc.; et appliquant ici le même principe d'algèbre que nous avons rappelé dans l'article précédent, on aura LI + KL + etc. : L a + K a' + etc. :: LI : L a :: 1 : sin. R. Mais LI + KL + etc. est la longueur de la loxodromie, ou route BD du vaisseau; L a + K a' + etc. est le chemin fait en longitude; donc représentant par λ ce chemin fait vers l'est ou vers l'ouest, on aura 1 : sin. R :: ξ : λ, ou

$$\xi = \frac{\lambda}{\sin. R} \ldots\ldots\ (3)\ (*).$$

D'où l'on conclut ce théorème : *Le rayon des tables est au sinus de l'angle du rumb de vent, comme la longueur de la route du vaisseau est au chemin qu'il a fait en longitude.*

Fig. 10. Mais le triangle rectiligne rectangle DTB, étant construit comme dans l'article précédent, donne $BD = \frac{DT}{\sin DBT}$, ou $\xi = \frac{DT}{\sin R}$; et comparant cette équation avec celle (3), on trouvera $DT = \lambda$. On peut donc, par le moyen de ce seul triangle rectiligne rectangle DTB, trouver deux des quatre choses suivantes : la longueur de la route, l'angle du rumb de vent, la différence des latitudes de départ et d'arrivée, enfin le chemin fait en longitude, lorsqu'on connoît les deux autres.

45. Cependant l'objet principal du marin est de déterminer la position de son vaisseau sur le globe terrestre. Or, par le moyen de l'équation (2), il a sa latitude; mais l'équation (3) ne peut lui faire connoître la différence des longitudes

Fig. 9. de départ et d'arrivée. En effet, le chemin qu'a fait le vaisseau en longitude est plus petit que la longueur de l'arc de parallèle AB; car, pour qu'il lui fût égal, il faudroit que la latitude QB n'eût pas changé; de même, ce chemin est plus grand que la longueur de l'arc de parallèle TD; car, pour qu'il lui fût égal, il faudroit que le vaisseau fût parti du point T, et n'eût pas changé de latitude; donc, le chemin réellement parcouru en longitude par le vaisseau est égal en longueur

(*) La proportion 1 : sin. R :: LI : L a étant mise sous la forme 1 : sin. R :: $d\xi : d\lambda$, d'où $d\xi = \frac{d\lambda}{\sin. R}$, on aura en intégrant, $\xi = \frac{\lambda}{\sin. R}$ sans constante : car, lorsque $\xi = o$, c'est-à-dire au point B, on a $\lambda = o$.

à celle d'un arc de parallèle placé entre ceux AB et TD ; or, si nous connoissions la latitude de ce parallèle, rien ne seroit plus aisé que de trouver la différence en longitude des points de partance et d'arrivée, puisqu'il n'y auroit qu'à multiplier le chemin fait en longitude par la sécante de cette latitude, et réduire le nombre de lieues trouvées en degrés (art. 52). Mais quelle est cette latitude ? Est-ce celle *du moyen parallèle*, c'est-à-dire, du parallèle qui est à égale distance des parallèles de départ et d'arrivée, dont on pourroit croire que l'arc intercepté entre les deux méridiens PQ, PE, lequel est $<$ AB et $>$ DT, est la longueur du vrai chemin fait en longitude ? Non ; car on verra à la note VI que la vraie différence en longitude est plus grande que celle que donneroit le moyen parallèle ; mais, avant de lire la note VI, finissez de lire cet article. Fig 9.

L'un des triangles infiniment petits, par exemple, celui L I a donne la proportion $1 : \text{tang. R} :: a\text{I} : a\text{L}$, d'où $a\text{L} = a\text{I} \times \text{tang. R}$; mais aL, arc d'un parallèle dont la latitude est aF, et qui est semblable à l'arc HF de l'équateur, est $= \text{HF cos. } a\text{F}$; donc $\text{HF cos. } a\text{F} = a\text{I tang. R}$, d'où $\text{HF} = a\text{I séc. } a\text{F} \times \text{tang. R}$; mais aI séc. aF est la partie des latitudes croissantes correspondante à l'arc aL ; ou, en d'autres termes, est la différence des latitudes croissantes correspondante à la différence des latitudes vraies aI ; donc représentant respectivement par $(mr)'$, $(mr)''$, etc., les différences en latitudes croissantes aI séc. aF, a'L séc. a'H etc., on aura successivement $\text{FH} = (mr)' \text{tang. R}$, $\text{CH} = (mr)'' \text{ tang. R}$, etc. ; donc $\text{FH} + \text{CH} + \text{etc.} = \text{tang. R} \times [(mr)' + (mr)'' + \text{etc.}]$; mais le premier membre de cette équation est la différence QE des longitudes, et la somme renfermée entre parenthèses carrées dans le second membre, est la différence des latitudes croissantes qui correspond à la différence BT des latitudes vraies. Donc, représentant cette première différence par $(\text{M}r)'$ et représentant par Γ' la différence vraie QE des longitudes de départ et d'arrivée ; on aura l'équation

$$\Gamma' = (\text{M}r)' \text{ tang. R} \quad \ldots\ldots\ldots (4)\ (*)$$

(*) L'équation $\text{FH} = (\text{M}r)' \text{ tang. R}$ auroit pu s'écrire sous la forme $d\Gamma' = \frac{d\text{L}''}{\text{cos. L}''} \times \text{tang. R} = \text{tang. R} \times \frac{\text{cos. L}'' d\text{L}''}{\text{cos.}^2 \text{L}''} = \text{tang. R} \times \frac{d \text{sin. L}''}{1 - \text{sin.}^2 \text{L}''} = \frac{\text{tang. R } d \text{ sin. L}''}{2(1 + \text{sin. L}'')} + \frac{\text{tang. R } d \text{ sin. L}''}{2(1 - \text{sin. L}'')}$; donc $\Gamma' = \frac{1}{2} \text{tang. R} [\text{log.}(1 + \text{sin. L}'') - \text{log.}(1 - \text{sin. L}'')] = \frac{1}{2} \text{tang. R log.} \left(\frac{1 + \text{sin. L}''}{1 - \text{sin. L}''}\right) + const.$ Mais lorsque $\Gamma' = 0$, on a la latitude d'arrivée L'' = à la latitude de départ L' ; donc $const. = -\frac{1}{2} \text{ tang. R log.} \frac{1 + \text{sin. L}'}{1 - \text{sin. L}'}$, et complètement $\Gamma' = \frac{1}{2} \text{tang. R log.} \left(\frac{1 + \text{sin. L}''}{1 - \text{sin. L}''} \times \frac{1 - \text{sin. L}'}{1 + \text{sin. L}'}\right) \ldots\ldots (Q).$

D'où l'on déduit le théorème général suivant, qui est de la plus grande utilité : *Le rayon des tables est à la tangente de l'angle du rumb de vent, comme la différence des latitudes croissantes des points de départ et d'arrivée est à la différence en longitudes des mêmes points.* Il est essentiel d'observer que si les points de départ et d'arrivée étoient de part et d'autre de l'équateur; c'est-à-dire, l'un au nord et l'autre au midi; alors il faudroit dire, *la somme des latitudes croissantes, etc.*, au lieu de dire *la différence des latitudes croissantes, etc.*

Fig. 10. Pour construire l'équation (4), il ne faut que prolonger le côté BT, qui est le chemin fait en latitude, d'une quantité TC, telle que BC soit égale à la différence des latitudes croissantes qui correspond à la différence des latitudes vraies; ensuite au point C élevant une perpendiculaire CM, dont la longueur est limitée en M par le prolongement de l'hypoténuse BD; cette perpendiculaire CM, réduite en minutes à raison de 3' par parties égales qui représentent les lieues, donnera la différence en longitude des points de départ et d'arrivée, puisque dans le triangle rectiligne rectangle BCM, on a MC = tang. MBC × BC; mais par construction MBC = à l'angle R du rumb de vent, et BC = à la différence $(Mr)'$ en latitudes croissantes; donc MC $= (Mr)'$ tang. R $= r'$: ce qu'il falloit démontrer.

46. A cause des triangles semblables DTB, MCB, le nombre des lieues sur CM est plus grand que celui sur TD, c'est-à-dire, des lieues vraiment courues en longitude, dans le même rapport que la différence CB des latitudes croissantes à celle des latitudes vraies; c'est par cette raison que, quoique les lieues soient de même longueur sur DT que sur MC, cependant on appelle les premières lieues *mineures*, et les secondes lieues *majeures*, voulant exprimer par là que le nombre de lieues TD courues en longitudes est moindre que le nombre de lieues

---

Or, faisant attention que $1 + \sin. L'' = 1 + \cos.(90° - L'') = 2\cos.^2(45° - \frac{1}{2}L'')$, et que $1 - \sin. L'$ $= 1 - \cos.(90° - L'') = 2\sin.^2(45° - \frac{1}{2}L'')$, on aura $\frac{1 + \sin. L''}{1 - \sin. L''} = \cot.^2(45° - \frac{1}{2}L'')$: mais cot. $(45° - \frac{1}{2}L'') = \frac{1 + \text{tang.}\,45°\ \text{tang.}\,\frac{1}{2}L''}{\text{tang.}\,45° - \text{tang.}\,\frac{1}{2}L''} = \frac{1 + \text{tang.}\,\frac{1}{2}L''}{1 - \text{tang.}\,\frac{1}{2}L''}$; et cette dernière fraction est la valeur de tang. $(45° + \frac{1}{2}L'')$; donc $\cot.^2(45° - \frac{1}{2}L'') = \text{tang.}^2(45° + \frac{1}{2}L'')$. On démontrera de même que $\frac{1 - \sin. L'}{1 + \sin. L'} = \cot.^2(45° + \frac{1}{2}L')$; donc $r' = \text{tang. R log.} \left(\frac{\text{tang.}(45° + \frac{1}{2}L'')}{\text{tang.}(45° + \frac{1}{2}L')}\right)$. Mais nous avons vu dans la note IV (art. 1, eq. 2), que le second facteur de l'équation précédente est, dans l'hypothèse de la sphéricité de la terre, $= (Mr)'$; donc $r' = (Mr)'$ tang. R, comme nous venons de le trouver.

CM que l'on a après avoir fait les opérations nécessaires pour obtenir la différence en longitude. Il me semble qu'il vaudroit mieux appeler les lieues vraiment courues vers l'est ou vers l'ouest, *lieues en longitude*, et les autres qui servent à trouver la différence en longitude, *lieues de longitude*.

CHAPITRE CINQUIÈME.

Application des principes démontrés dans le Chapitre précédent, à la résolution des problèmes de Navigation.

47. L'OBSERVATEUR embarqué sur un vaisseau qui part d'un mouillage pour aller naviguer en pleine mer, ne compte pas son point de départ de celui où son vaisseau étoit à l'ancre; mais il attend qu'il soit à quelque distance de la côte, de manière cependant à pouvoir bien distinguer sans le secours d'une lunette de longue vue, les points les plus remarquables, tels que des clochers, moulins, caps, sommets de rochers, etc. Ensuite, relevant avec la boussole, au moins deux de ces points dont les positions bien connues sont exactement représentées sur une carte plate de la côte, il fait concourir sur cette carte, par le moyen de deux compas, les lignes de relèvement; et le point de rencontre de ces deux lignes est celui où se trouve le vaisseau dont il est aisé, par cette opération, de déterminer la latitude et la longitude dans l'instant de relèvement. Par exemple, supposons que le vaisseau étant au point V, l'observateur relève les deux points Q et R de la côte, le premier au N$\frac{1}{4}$NE, le second au NO; alors, pour connoître la position du vaisseau en V, il tire du point Q une droite QV, parallèle à la ligne N$\frac{1}{4}$NE et S$\frac{1}{4}$SO; et du point R une droite RV, parallèle à la droite NO et SE; le point V, où ces deux droites se rencontrent, est évidemment le lieu du vaisseau, puisqu'il doit être sur l'une et l'autre de ces deux lignes. Nous observerons cependant que cette opération n'est pas rigoureuse; car l'air de vent auquel reste un objet vu sur la surface du globe, n'est pas celui qu'il faudroit suivre pour aller à cet objet, puisque l'arc de courbe que décriroit le vaisseau, en suivant cet air de vent, est un arc de loxodromie, qui diffère de l'arc de grand cercle qui passe par le vaisseau et l'objet relevé dans le moment de l'opé- Fig. 4.

ration (*); mais cette différence est insensible dans un si petit espace que celui qui permet de voir distinctement à l'œil nu les objets.

Fig. 11. 48. Il peut arriver qu'il n'y ait à terre qu'un seul objet dont on puisse prendre le relèvement; par exemple, lorsqu'on est en vue d'un seul îlot, ou rocher dont la position est déterminée. Voici alors comment on fait: Soit I le seul objet que l'on puisse relever à terre, et V le vaisseau. On aura par le relèvement, l'angle IVO que forme l'air de vent VI auquel on a relevé le point I avec un des quatre airs de vent principaux VO. Quelque temps après, le vaisseau étant en V', et ayant eu l'attention de mesurer le plus exactement possible le chemin VV' que l'on a fait dans cet intervalle de temps, et de tenir compte du vrai air de vent sur lequel s'est faite cette route, on relèvera le même objet I; on aura donc dans le triangle rectiligne rectangle VMV', l'angle MVV', et par conséquent son complément VV'M; on a de plus l'angle MV'I par le second relèvement : donc, dans le triangle VV'I, on connoîtra l'angle IV'V, le côté VV' et l'angle IVV', et conséquemment on aura la distance IV', ainsi que sa direction; donc on aura déterminé la position du point de partance V', c'est-à-dire, sa latitude et sa longitude.

Exemple. En navigant le long d'une côte, on a relevé un cap dans le NE $\frac{1}{4}$ N; après avoir fait 5 lieues ou 15 milles à l'E $\frac{1}{4}$ NE, ce cap restoit dans l'ONO: on demande la distance de ce cap à chacune des deux stations.

On a IVO=56° 15'; VV'=15; V'VO=11° 15'; VV'M=78° 45'; MV'I =112° 30'; donc VV'I=MV'I−MV'V=33° 45', et IVV'=56° 15'−11° 15'=45°. Cela posé, voici le calcul :

IVV'+IV'V=78° 45'	....	com. log. sin.	0, 0084261.
IVV'=45	....	log. sin.	9, 8494850.
VV'=15	....	log.	1, 1760913.
Somme	....		0, 0340024, qui est le

log. de IV'=10, 81 milles.

(*) En effet, le rayon visuel qui, dans le moment du relèvement, va de l'œil de l'observateur à l'objet relevé, étant une ligne droite placée dans le plan du grand cercle qui passe par ces deux points, il est évident que si le vaisseau doit aller à l'objet relevé, il faut qu'il gouverne dessus, et alors la trace de sa route sera un arc de grand cercle qui coupera tous les méridiens intermédiaires et celui de l'objet relevé sous des angles qui iront toujours en augmentant, à mesure que le vaisseau s'éloignera du point de départ. Mais si ce même vaisseau avoit gouverné à l'air de vent du relèvement que

Substituant dans le calcul précédent le logarithme sinus de l'angle I V'V qui est 9, 7447390 à la place de celui de I V V', on trouvera I V = 8, 496 milles.

49. Le marin ayant, par de pareilles opérations qu'il répète plusieurs fois, déterminé son point de départ, doit encore tous les jours chercher à connoître celui où se trouve le vaisseau à midi (*), et marquer ce point sur la carte réduite; ce qui s'appelle *pointer* la carte, ou *faire son point*. Donc, puisque par le moyen du loch il mesure le chemin du vaisseau, et que par le moyen de la boussole il connoît la direction de sa route, il est évident que le problème le plus important à résoudre est le premier de ceux dont nous allons successivement donner les solutions.

PROBLÈME I. *Connoissant le point de départ, c'est-à-dire, sa latitude et sa longitude, l'air de vent qu'a couru le vaisseau, et le chemin qu'il a fait, ou les lieues de distance; on demande la latitude et la longitude du point d'arrivée.*

Pour résoudre ce problème, ainsi que les suivans, on peut se servir du calcul ou de certaines opérations graphiques qui sont au nombre de trois, savoir: 1.° En formant sur la carte réduite les triangles rectangles, dont deux des parties sont données d'après les conditions du problème. 2.° En formant le même triangle sur une feuille de papier à part, ainsi que nous l'avons fait aux articles 43 et suivans (*fig.* 10). 3.° Par *le quartier de réduction*, dont nous ferons connoître tout à l'heure la construction et l'usage. De ces trois méthodes graphiques la première n'est guère praticable; car, au bout de quelque temps de navigation, la carte réduite dont on se serviroit seroit tellement chamarrée de lignes ou d'écorchures formées par les pointes des compas que l'on ferait courir le long des airs de vent, et coïncider en certains points, qu'elle ne pourroit plus servir. Je ne l'ai jamais vu pratiquer, et je n'en parlerai pas. La seconde méthode vaudroit mieux; mais la troisième dans laquelle on se sert du quartier de réduction, y supplée de la manière la plus avantageuse, et évite beaucoup de peines. Ainsi, nous ne parlerons que de la méthode par le calcul, et de

nous supposons n'être pas un des cardinaux, il auroit décrit un arc de loxodromie qui, coupant tous les méridiens sous un même angle, couperoit celui de l'objet relevé par une latitude plus grande que celle de ce dernier point; donc il n'arriveroit pas au point où se trouve cet objet. Ceci ayant également lieu pour les deux points du relèvement, il s'ensuit que, par la méthode enseignée précédemment, et faisant attention que la figure 4 représente une carte plate, le point donné n'est pas, rigoureusement parlant, la vraie position du vaisseau.

(*) Nous ferons connoître dans la suite la raison qui nous fait fixer l'heure à midi.

la méthode graphique par le quartier de réduction. Nous commencerons toujours par la première, parce qu'elle est la plus exacte, et que généralement de deux méthodes que l'on apprend, la première est ordinairement celle que l'on sait le mieux, et que l'on pratique le plus souvent.

SOLUTION *par le calcul.*

L'équation (2) art. 43, traduite en logarithmique, nous donne

Log. de la diff. ou som. des latitudes de départ et d'arrivée = log. du nombre de lieues faites par le vaisseau + log. cos. de l'angle de rumb de vent....... (5).

Ayant la différence ou somme des latitudes, on cherche dans la table II la différence ou somme des latitudes croissantes (*) qui lui correspond; et alors, par le moyen du théorème démontré à l'article 45, ou de l'équation (4) traduite en équation logarithmique, on aura celle:

***Log. de la différence des longitudes des points de départ et d'arrivée = log. de la différence des latitudes croissantes des mêmes points + log. tang. de l'angle du rumb de vent*....... (6).**

Ayant la latitude et la longitude du point d'arrivée, on le placera suivant sa vraie position sur la carte réduite, et faisant de même tous les jours, on aura, à la fin d'un voyage sur mer, toute la route du vaisseau tracée sur la carte réduite dont on s'est servi.

EXEMPLE. Etant parti de 49°25′ de latitude de nord, et de 25°6′ de longitude occidentale (méridien de Paris, ce qui sera toujours sans que nous en prévenions davantage), on a fait 43 lieues dans le SO¼S 5°45′S du monde; on demande la latitude et la longitude du point d'arrivée.

Nous avons l'angle du rumb de vent compté depuis le sud, qui est de 28 degrés. Cela posé, voici d'abord le calcul de la latitude d'arrivée (éq. 5).

Longueur de la route 43 lieues, ou 129′. . . .	log.	2, 1105897.
Angle du rumb de vent 28°.	log. cos. . .	9, 9459349.
	Somme	2, 0565246, qui est le log. de 113′,9.

(*) Quoique, dans la théorie qui nous a occupés dans le chapitre précédent, nous ayons supposé la terre sphérique; cependant, pour ne pas multiplier le nombre de tables, nous nous servons de celle des latitudes croissantes calculée pour l'ellipsoïde terrestre, ce qui, bien loin de nuire à l'exactitude du résultat, la rend encore plus grande.

Donc la différence en latitude est de 1° 53′ 54″ vers le sud.
Latitude de départ . . . . 49° 25′ 0″ nord.

Différence . . . 47° 31′ 6″ qui est la latitude nord du point d'arrivée de vaisseau.

Voici maintenant le calcul de la longitude du point d'arrivée (éq. 6).

Latit. de départ 49° 25′ . . latit. croiss. qui lui correspond (tabl. II) 3404, 1.
Latit. d'arrivée 47° 31′ 6″ latit. croissante qui lui correspond. . . . 3232, 8.

Différence . . . . 171, 3 log. 2, 2337574.
Angle du rumb de vent 28° log. tang. . . . . 9, 7256744.

Somme. . . . . 1, 9594318.
qui est le logarithme de 91′, 08. Donc la différence en longitude = 1° 31′ 5″ ouest.
Longitude de depart = 25 6 0 ouest.

Somme 26 37 5
qui est la longitude ouest du point d'arrivée du vaisseau.

Solution *graphique*. Le quartier de réduction dont nous allons nous servir, est un parallélogramme rectangle ACBD divisé en petits carrés égaux par des lignes parallèles à deux côtés contigus AC, CB du parallélogramme; en sorte que les parallèles verticales sont divisées en parties égales par les parallèles horizontales et réciproquement. Le côté CA représente la ligne N et S, CB représente la ligne E et O. Les sept droites intermédiaires qui concourent au même point C, représentent les sept airs de vent compris entre le nord et l'est ou l'ouest, ou entre le sud et l'est ou l'ouest. D'un des angles C du parallélogramme pris pour centre, et avec un rayon qui est successivement égal aux distances respectives de chaque point de division au centre C, on décrit des arcs de cercles qui sont des quarts de circonférences, tant que le rayon n'est pas plus grand que le plus petit côté AC du parallélogramme. Quelquefois on divise le plus grand des quarts de circonférence AB en 90 degrés. Je crois que, pour simplifier et rendre plus nette la figure, il vaut mieux tirer en dehors du quartier les droites EF, FH parallèles à deux côtés contigus du parallélogramme ACBD, et diviser ces droites en parties qui correspondent aux 90 degrés du quart de la circonférence du cercle : au reste, c'est à peu près indifférent. Cette figure doit être tracée sur un carton d'une épaisseur suffisante, et par le centre C on fait passer deux fils qui y sont fixés et qui, conséquemment, peuvent prendre la direc- Fig. 12.

Fig. 12. tion d'un rayon quelconque du quart de circonférence, en les tendant sur le plan de la figure.

Voici maintenant l'usage de cet instrument dans la solution du problème que nous avons déjà résolu par le calcul : et pour l'expliquer d'une manière plus claire, nous allons tout de suite en faire l'application à l'exemple proposé précédemment. Je tends le premier fil sur l'air du vent couru S O $\frac{1}{4}$ S 5° S, c'est-à-dire, le long de CI. Ensuite, considérant chaque espace comme représentant 2 lieues ou 6 milles, je compte à partir du centre C, et le long du fil $\frac{43}{2}$, ou 21 $\frac{1}{2}$ espaces; et plantant une épingle au point I où se termine cette longueur, je compte le nombre d'intervalles compris entre ce point I et chacune des lignes *nord et sud* et *est-et-ouest;* le premier I K est la moitié du nombre de lieues courues à l'ouest; le second K C = 18 $\frac{2}{3}$ espaces, est le sixième du nombre de minutes courues en latitude; donc la différence en latitude est 112′ ou 1° 52′ sud. Or, la latitude de départ étoit de 49° 25′ nord; donc la latitude d'arrivée est = 47° 33′ nord.

Prenant la latitude moyenne entre celles de départ et d'arrivée, je la trouve de 48° 29′, et plaçant le second fil sur le point M qui correspond à ce degré, je fais descendre l'épingle placée en I parallèlement à la ligne nord-et-sud jusqu'à sa rencontre en n du second fil : enfin, comptant les intervalles d'arcs compris entre le point C et le point n, j'en trouve 15 $\frac{2}{3}$, qui, à raison de 6′ par intervalle, me donnent 94′ ou 1° 34′ de différence en longitude du côté de l'ouest. Or, la longitude de départ étoit de 25° 6′ ouest; donc la longitude d'arrivée est de 26° 40′ ouest.

Pour démontrer cette méthode graphique, nous observerons que dans le triangle rectiligne rectangle C K I, l'angle I C K est celui du rumb de vent, I C est la longueur de la route, et l'on y a $KC = IC \times \cos. ICK = \xi \cos. R$; et $IK = IC \sin. ICK = \xi \sin. R$; donc K C est le chemin fait en latitude, et I K est le chemin fait en longitude. On a ensuite dans le triangle rectangle Cpn, l'angle nCp qui est celui de la latitude du moyen parallèle et Cp $(= KI)$ qui est le chemin couru en longitude. Or, ce même triangle donne $Cn = Cp \times \text{séc.}\, nCp$; donc la droite Cn représente le nombre de lieues ou milles en longitude, et par conséquent donne, à peu de chose près, la différence en longitude des points de départ et d'arrivée.

On peut encore, lorsqu'il y a une échelle de latitudes croissantes jointe au quartier de réduction, ce qui a souvent lieu, porter de C en Q la différence des latitudes croissantes correspondante à la différence des latitudes vraies CK; ensuite faire glisser depuis le point Q une épingle parallèlement à la ligne *est-et-*

ouest, jusqu'à sa rencontre en r du fil qui est tendu dans la direction de l'air de vent couru, ce qui donnera la distance Qr qui sera la différence des longitudes demandées, puisque dans le triangle rectangle rQC, on a 1 : tang. QCr :: CQ : $Qr = CQ$ tang. $QCR = (Mr)'$ tang. R ; donc, etc. Fig. 12.

50. Problème II. *Etant connues les positions des points de départ et d'arrivée, on demande la distance qu'il y a de l'un à l'autre, et l'air de vent qu'il faut suivre pour aller du premier au second.*

Solution *par le calcul.* Puisqu'on connoît la différence des latitudes vraies des points de départ et d'arrivée, on connoîtra la différence des latitudes croissantes des mêmes points. De plus, on connoît leur différence en longitudes; donc, avec l'équation (4) d'où l'on tire tang. $R = \frac{r'}{(Mr)'}$, on trouvera la valeur de R par le moyen des quantités connues r' et $(Mr)'$. Connoissant R, on aura la longueur ξ de la route, par le moyen de l'équation (2). (Art. 43.)

Exemple. Trouver la distance qu'il y a du Cap-Finistère, dont la latitude est de 42° 54′ nord, et la longitude de 11° 36′ 15″ occidentale, à l'île de Porto-Santo, dont la latitude est de 33° 5′ nord, et la longitude est de 18° 37′ 30″ occidentale. Trouver de même l'air de vent que doit suivre un vaisseau, pour que, favorisé par les vents, il aille directement du premier de ces deux points au second.

Long. de départ . . . . 11° 36′ 15″
Idem d'arrivée 18 37 30

Différence . . . . 7 1 15 ou 421′, 25 log. 2,6245399 +
Latitude de départ. . . . . 42° 54′ latitude croissante. . 2840, 33.
Idem d'arrivée. . . . . 33 5 *Idem* . . . . . 2093, 81.

Différence . . . . 9 49 Différence . . . . 746, 52 log. 2,8730414 —

Différence. 9,7514985
qui est le logarithme tangente de 29° 26′ 7″ log. cos. 9,9399740 —
Differ. des latitudes vraies 9° 49′ ou 589′ log. 2,7701153 +

Différence . . . 2,8301413. qui est le log. de 676,3 milles ou 225 ½ lieues, ce qui est la distance demandée.

Puisque le point d'arrivée est au sud et à l'occident de celui de départ, l'air de vent que doit suivre le vaisseau devra être entre le sud et l'ouest; mais nous avons trouvé l'angle du rumb de vent = 29° 26′ 7″; donc la route du vaisseau doit se faire dans le S O ¼ S 4° 18′ 55″ S.

Fig. 12. **Solution** *graphique*. Nous allons enseigner cette méthode en l'appliquant tout de suite à l'exemple précédent.

Prenant la latitude moyenne entre celles de départ et d'arrivée, j'ai la latitude du moyen parallèle $= 37° 59' 30''$. Je tends un des fils suivant CL, qui correspond au 38me degré pris sur la verticale FH; et considérant chaque espace comme représentant 6 lieues ou 18 milles, je divise la différence en longitude 421 par 18, ce qui me donne $23\frac{1}{3}$. Je prends donc le long de la droite CL une longueur $Ca = 23\frac{1}{3}$ intervalles de cercles. Ensuite, divisant 589', qui est la différence en latitude, par 18, j'ai $32\frac{2}{3}$; je prends sur CA une longueur Cb de $32\frac{2}{3}$ espaces; enfin, faisant mouvoir l'épingle placée au point a parallèlement à la ligne *nord-et-sud*, et celle placée en b parallèlement à la ligne *est-et-ouest* jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point d où je plante une des deux épingles; et tendant l'un des deux fils de C en d, je compte le nombre d'intervalles d'arcs compris entre C et d, j'en trouve $37\frac{1}{2}$. Multipliant ce nombre par 6, pour avoir celui des lieues de la distance, je trouve que cette dernière est de 225 lieues. De plus, le fil tendu qui passe par C et par d va couper la ligne EF au point e, qui répond au 29° degré depuis la ligne *nord-et-sud*, et qui indique conséquemment l'air de vent qui tient à peu près le milieu entre le SO$\frac{1}{4}$S et le SSO, et est celui que doit suivre le vaisseau. Ces résultats sont à peu près ceux que nous a donnés le calcul.

Pour démontrer les procédés dont nous nous sommes servis, nous observerons que dans le triangle rectangle afC, nous avons l'angle aCf qui est la latitude du moyen parallèle; aC qui est la différence en longitudes des points de départ et d'arrivée; donc Cf, ou $bd (= aC \times \cos aCf) =$ à la différence en longitude multipliée par le cosinus de la latitude du moyen parallèle = au chemin couru en longitude. Mais dans le triangle rectangle dbC les deux côtés db, Cb de l'angle droit b étant respectivement les chemins faits en latitude et en longitude, l'hypoténuse Cd doit être la longueur du chemin que doit faire le vaisseau, et l'angle bCd opposé au chemin bd fait en longitude, est l'angle du rumb de vent.

Si, au lieu d'employer le moyen parallèle, on vouloit se servir des latitudes croissantes, on prendroit sur la ligne CB, à partir du point C, une longueur égale à la différence des latitudes croissantes qui correspond à celle des latitudes vraies; et de l'extrémité de cette longueur élevant une perpendiculaire de même longueur que la différence en longitude, on joindroit son extrémité avec le centre C, ce qui donneroit un angle en C égal à celui du rumb de vent, puisque dans le

triangle rectangle ainsi formé, les deux côtés de l'angle droit sont respectivement égaux à la différence des latitudes croissantes et à la différence en longitudes.

Prenant sur le côté de ce triangle qui représente les différences en latitudes croissantes, une longueur égale à la différence en latitudes vraies, et du point où se termine cette longueur élevant une perpendiculaire prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre l'hypoténuse du premier triangle, cette parallèle à la ligne *nord-et-sud* sera le chemin vraiment couru en longitude. Il n'y aura donc plus qu'à trouver la longueur du chemin, ce qui se fera comme précédemment. Fig. 12.

51. **Problème III.** ***Connoissant le point de départ, le rumb de vent et la latitude d'arrivée, trouver la longueur du chemin qu'a fait le vaisseau et la longitude de l'arrivée.***

Solution *par le calcul.* Par le moyen de l'équation (2) on a la longueur demandée du chemin.

La table II fait connoître la différence des latitudes croissantes des points de départ et d'arrivée, donc l'équation (4) (art. 45) fera connoître la différence des longitudes des mêmes points.

Exemple. On est parti de 31° 19′ latitude nord, et de 21° 17′ longitude occidentale; l'air de vent suivi est le SSO 3° O, et l'on est arrivé par 1° 38′ de latitude méridionale; il faut trouver la longueur du chemin et la longitude d'arrivée.

Angle du rumb de vent. . . 25° 30′ log. cos. 9,9554882 –
Latitude de départ . . . . . 31 19 N.
Idem d'arrivée. . . . . . . 1 38 S.

Somme . . . 32 57 ou 1977′ log. 3,2915908 +

Différence. . . . . . 3,3361026 log. de 2168′ ou 722 ⅔ lieues;

ce qui est la longueur du chemin.

Lat. croiss. de départ. . 1969, 1.
Idem d'arrivée . . . . . 97, 4.

Somme . . . 2066, 5. log. 3,3152354
Angle du rumb de vent. 29° 30′ log. tang. 9,6784961

Somme. . . . 2,9937315 log. de 985′, 67 ou 16° 25′ 40″, 2.
Longit. de départ 21 17 0

Somme. . . . 37 42 40, 2.

qui est la longitude occidentale du point d'arrivée.

Fig. 12. SOLUTION *graphique*. Je prends sur la ligne nord-et-sud une longueur C*o* égale à la somme 52° 57′ des latitudes de départ et d'arrivée (ce seroit la différence si les latitudes étoient de même dénomination), en considérant chaque division comme représentant un degré ou 20 lieues. Je plante une épingle au point *o* : ensuite, tendant vers le point *m*, qui répond à 25° 50′ des divisions de la ligne EF, l'un des deux fils, il sera dans la direction de l'air de vent court SSO 3° O. Je fais courir une épingle parallèlement à la ligne *est-et-ouest*, depuis le point *o* jusqu'à sa rencontre du fil C*m*, et la plantant au point *c*, je compte le nombre d'intervalles d'arcs compris entre les points C et *c*; j'en trouve $36\frac{1}{2}$ (*), ce qui fait, à raison de 20 lieues par intervalles, 730 lieues dont se compose la longueur du chemin.

La somme des latitudes croissantes étant 2066′, 5 ou 34° 26′, 5, je prends sur la ligne CA une longueur Cg=$34\frac{4}{7}$ espaces; au point *g* je plante une épingle, ensuite j'en conduis une autre parallèlement à la ligne *est-et-ouest* jusqu'à sa rencontre avec le fil C*m* au point *q* où plantant cette épingle, je finis par compter le nombre d'intervalles compris entre les points *g* et *q*; je trouve qu'il est de 17 espaces, ce qui fait 17° et est la différence en longitudes : l'ajoutant donc à la longitude de départ 21° 17′, on aura, pour longitude d'arrivée, 38° 17′.

On voit que ces résultats sont assez sensiblement différens de ceux trouvés par le calcul, ce qui provient de ce que, dans cet exemple, nous avons été obligés de faire représenter à chaque espace une longueur de vingt lieues, et que la moindre petite erreur, soit dans l'estime des fractions d'espace, soit dans les irrégularités de l'instrument même qui ne peut être d'une exactitude rigoureuse, en cause une assez grande dans les résultats des opérations. Généralement, le quartier de réduction ne doit servir que lorsqu'il ne s'agit que de résoudre graphiquement des triangles dont les côtés représentent des longueurs qui ne dépassent pas 60 lieues : car, si l'on fait représenter à un seul espace plus d'une lieue, on se met dans le cas de commettre des erreurs assez considérables.

(*) Le quartier de réduction représenté par la figure 12, étant environ cinq fois plus petit que ceux dont se servent les marins, et par conséquent ne pouvant pas donner une exactitude suffisante à nos résultats, surtout dans la solution du problème actuel; il est à propos que le lecteur suive les opérations que nous indiquons sur un quartier de réduction ordinaire.

Il est aisé d'apercevoir la raison du procédé dont nous nous sommes servis pour résoudre le problème proposé par le quartier de réduction ; en effet, nous avons d'abord formé un triangle rectangle coC, dont l'un des côtés Co de l'angle droit est égal à la différence des latitudes vraies des points de départ et d'arrivée, et dont l'angle adjacent oCc est égal à celui du rumb de vent ; donc l'hypoténuse Cc de ce triangle doit être égale à la longueur du chemin. Fig. 12.

Nous avons ensuite formé un autre triangle rectangle Cgq, dont nous avons fait le côté Cg égal à la différence des latitudes croissantes, et l'angle gCq égal à l'angle du rumb de vent. Donc le côté gq, opposé à ce dernier angle, doit être égal à la différence des longitudes.

52. PROBLÈME IV. *Etant données la position du point de partance, la latitude d'arrivée et la longueur de la route, on demande quel est l'air de vent que l'on a suivi et la longitude du point d'arrivée.*

SOLUTION *par le calcul.* De l'éq. (2), art. 43, on tire $\cos. R = \frac{L'' \pm L'}{\xi}$ ce qui fera connoître R. Mais le problème reste indéterminé si, outre les données que l'on a, l'on ne sait encore si l'on a été dans l'est ou dans l'ouest, puisque la longitude d'arrivée étant inconnue ne peut l'apprendre.

Ayant la différence ou somme des latitudes vraies, la table II donne la différence ou somme des latitudes croissantes des points de départ et d'arrivée ; donc l'équation (4) (art. 45) fera connoître la différence en longitude des mêmes points, et par conséquent la longitude du point d'arrivée.

EXEMPLE. On est parti de 30° 30′ latitude sud, et de 60° 20′ de longitude orientale. On a couru 50 lieues entre le sud et l'est, et on est arrivé par 31° 50′ latitude sud : on demande l'air de vent suivi et la longitude du point d'arrivée.

Latitude d'arrivée 31° 50′. . . . . lat. crois. . . 2005, 31
Latitude de départ 30 30. . . . . *id.* 1912, 24

Diff. . . . . . 1 20, ou 80 mil. log. 1, 9030900 + } diff. . . 93, 07. . . log. 1, 9688097
Chemin 50 lieues ou 150 milles. . . . log. 2, 1960713 — }

Diff. . . . . 9, 7269987, log. cos. de 57° 46′ 9″ log. tang. 0, 2003249

Somme. 2, 1691346

qui est le logarithme de 147, 62, ou 2° 27′ 37″, et qui est la différence en longitude ; et l'ajoutant à la longitude 60° 20′ de départ, puisqu'on a fait route vers

l'orient, on aura pour celle de l'arrivée 62° 47′ 37″: De plus, nous avons trouvé que l'angle du rumb de vent est de 57° 46′ 9″; donc l'air de vent couru, étant compris entre le sud et l'est, est le SE$\frac{1}{4}$E 1° 31′ 9″ E.

Fig. 12. Solution *graphique*. Faisant valoir à chaque espace 4 milles, et la différence des latitudes de départ et d'arrivée étant 80 milles, je prends sur la ligne *nord-et-sud* C A une longueur C 20; et la longueur du chemin étant 150 milles, je compte, à partir du point C, $\frac{150}{4}$ ou 37 $\frac{1}{2}$ intervalles d'arcs; de manière que l'extrémité *h* de cette longueur se trouve sur le vingtième parallèle à la ligne *est-et-ouest*. Ensuite, tendant le fil fixé en C, de manière qu'il passe par le point *h*, je vois que ce fil coupe F H au point *i*, c'est-à-dire, au 57° degré par rapport à la ligne *nord-et-sud*; donc l'air de vent couru C*i* est le S. E. $\frac{1}{4}$ E. 1° 45′ E: ce qu'il falloit d'abord trouver.

Actuellement, tenant toujours le fil C *i* tendu, et la différence des latitudes croissantes des points de départ et d'arrivée étant 93′, je prends de C en A une longueur $CT = \frac{93}{4} = 23\frac{1}{4}$ espaces, et à partir du point T, faisant parcourir à la pointe d'une épingle une droite parallèle à la ligne *est-et-ouest* jusqu'à sa rencontre en *s* avec la ligne C*i*; je compte les espaces compris entre T et *s*, que je trouve de 36 $\frac{3}{4}$, et multipliant par 4, j'ai 147′ ou 2° 27′ pour la différence en longitude orientale; d'où je conclus que la longitude demandée du point d'arrivée est 62° 47′ à l'orient de Paris.

La raison de ce procédé est bien simple à voir. En effet, dans le triangle rectangle C20C*h*, on a C*h*, qui est la longueur de la route, et C20, qui est la différence des latitudes; donc l'angle compris 20 C *h* est celui du rumb de vent; et dans le triangle rectiligne rectangle CT*s*, on a CT qui est la différence des latitudes croissantes, et l'angle TC*s* qui est celui du rumb de vent; donc le côté T*s* qui lui est opposé est la différence en longitude des points de partance et d'arrivée.

53. Problème v. *Connoissant la position du point de partance, la longitude du point d'arrivée et l'air de vent que le vaisseau a couru, trouver la longueur de la route et la latitude du point d'arrivée.*

Solution *par le calcul*. L'éq. (4) d'où l'on tire $(M\,r)' = \frac{r'}{\text{tang. R}}$ fait connoître la différence (*) des latitudes croissantes des points de départ et d'arrivée.

(*) On doit se rappeler que c'est la somme, lorsque les latitudes sont ou doivent être de dénominations différentes, ce qui seroit facile de connoître dans ce cas-ci, d'après l'air de vent que l'on a suivi, et la valeur de $(M\,r)'$ que l'on a calculée.

Ajoutant cette différence à la latitude croissante du point de départ, on a la latitude croissante du point d'arrivée, et par conséquent la latitude vraie de ce dernier point. Connoissant la différence des latitudes vraies et l'angle du rumb de vent, on a la longueur du chemin par le moyen de l'équation $\xi = \frac{L'' \mp L'}{\cos. R}$ (éq. 2).

Exemple. On est parti de 35° 50′ de latitude méridionale et 90° 40′ de longitude orientale; et après avoir couru pendant 24 heures, avec le vent de NNO, au SO$\frac{1}{4}$S, on est arrivé par 88° 58′ de longitude orientale; on demande quelle a été la longueur du chemin, et quelle est la latitude d'arrivée.

La différence occidentale en longitude est 90° 40′ — 88° 58′ = 1° 42′, et l'angle du rumb de vent est de trois rumbs ou 33° 45′; cela posé, voici le calcul:

Differ. en longitude 102′ log. 2, 0086002 +
Ang. du rumb de vent 33° 45′ log. tang. 9, 8248926 —

Diff. . . . . . 2, 1837076, ce log. est celui de la différence des latitudes croiss. 152, 65
Lat. croiss. de départ 2293, 11

Somme. . . . . 2445, 76, qui correspond dans la table II à 37° 52′
Donc la latitude vraie d'arrivée est 37° 52′ méridionale.
Latitude de depart. . . 35 50

Differ. . . . . . 2 2 ou 122′ log. 2, 0863598 +
Ang. du rumb de vent 33° 45′. . . . . . log. cos. 9, 9198464 —

Differ. . . 2, 1665134, qui est le log. de 146′, 78.
Donc la longueur du chemin est 48, 9 ou 49 lieues.

Solution *par le quartier de réduction*. Considérant chaque espace comme représentant 5′; je prends sur AD une longueur Ax = à la différence en longitude $\frac{102}{5} = 20\frac{2}{5}$, et du point x je suis avec la pointe d'une épingle la verticale xz jusqu'à sa rencontre en z du SO$\frac{1}{4}$S; et observant que le point z est sur le 31ᵉ parallèle à la ligne *est-et-ouest*, je multiplie 30 par 5, ce qui me donne pour la différence des latitudes croissantes 155′. Ajoutant cette différence à la latitude croissante de départ, j'ai celle d'arrivée; et la table II, dont on a besoin, même lorsque l'on veut se servir du quartier de réduction pour résoudre ce problème, Fig. 12.

donne la latitude vraie d'arrivée. Ayant les latitudes de départ et d'arrivée, et l'angle du rumb de vent, on trouve le chemin fait, comme dans les cas précédens.

Cette manière de trouver la latitude d'arrivée est facile à démontrer, en observant que dans le triangle rectangle $z\,3o\,C$, le côté $z\,3o$ est la différence en longitude, et l'angle $3o\,C\,z$ est celui du rumb de vent. Donc l'autre côté $C\,3o$ de l'angle droit, doit être la différence des latitudes croissantes.

54. REMARQUE. Dans les cinq problèmes précédens, nous avons trouvé deux des quatre choses suivantes : la longueur du chemin, l'angle du rumb de vent, la latitude et la longitude d'arrivée, lorsqu'on connoissoit les deux autres, et la position du point de départ. Mais quatre choses combinées de deux en deux, donnent $\frac{4 \cdot 3}{2}$ ou six résultats différens; et puisque nous n'avons résolu que cinq de ces six cas, il nous en reste encore un à résoudre. Ce sixième cas est celui où connoissant le point de partance, la longueur du chemin et la longitude d'arrivée, on demanderoit la latitude d'arrivée et l'angle du rumb de vent. Mais malheureusement, ce problème ne peut être résolu directement comme les autres; car, dans le triangle rectangle BTD, on ne connoît que l'hypoténuse BD qui est la longueur du chemin, et dans le triangle rectangle BCM, on ne connoît que la différence des longitudes MC. Cependant voici comment on pourroit parvenir à la solution de ce problème. Nous avons BT ou λ qui, comme nous l'avons démontré, est dans certaines limites sensiblement $= r' \cos.\left(\frac{L''+L'}{2}\right)$ (*Voy.* la note VI.) $= r' \cos.[L'+\frac{1}{2}(L''-L')]$, L' représentant la plus petite des deux latitudes. Mettant dans cette équation $\frac{1}{2}\xi$ à la place de $\frac{1}{2}(L''-L')$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$BD à la place de $\frac{1}{2}$BT, ce qui rendra le cosinus qui multiplie r' trop petit, j'aurai d'abord $\lambda = r' \cos.(L'+\frac{1}{2}\xi)$. Cette première valeur de λ donnera une première valeur de R, par le moyen de l'équation $\sin. R = \frac{\lambda}{\xi}$, et une première valeur de $L''-L'$, par le moyen de l'équation $L''-L' = \xi \cos. R$. Substituant maintenant cette valeur de $L''-L'$ dans l'équation $\lambda = r' \cos.[L'+\frac{1}{2}(L''-L')]$; et de cette seconde valeur déduisant, comme précédemment les valeurs de R et de $L''-L'$, celles-ci seront assez ordinairement sensiblement exactes. Dans le cas où l'on en voudroit de plus exactes, on continueroit la même marche jusqu'à ce qu'on parvînt à deux résultats consécutifs qui seroient égaux, ou sensiblement égaux.

Fig. 10.

EXEMPLE. On est parti de 50° 30′ latitude sud, et 60° 20′ longitude orientale; et après avoir fait 50 lieues en s'éloignant de l'équateur, on est arrivé par

62° 47′ 37″ de longitude orientale. On demande la latitude d'arrivée, et l'air de vent qu'a suivi le vaisseau.

Nous avons donc $\xi = 50$ lieues $= 150'$, $L' = 30° 30'$ et $r' = 62° 47' 37'' - 60° 20' = 2° 27' 37''$. Cela posé, voici le calcul :

$r' = 147', 62$. . . log. 2,1691452
$L' + \frac{1}{2}\xi = 31° 45'$ log. cos. 9,9295989

Somme. . . . . . 2,0987441 +
$\xi = 150$. . . . . log. 2,1760913 — 2,1760913

Différence. . . . 9,9226528, qui est le log. sin. de 56° 48′ 36″ log. cos. 9,7383184

Somme. 1,9144097

qui est le log. de 82′, 11 ou 1° 22′, 11, ce qui est la première valeur de $L'' - L'$. Recommençant le calcul, en mettant cette valeur de $\frac{1}{2}(L'' - L') = 41', 05$ à la place de $\frac{1}{2}\xi = 75'$, on aura

$r' = 147,62$. . . . . log. 2,1691452
$L' + \frac{1}{2}(L'' - L') = 31° 11' 3''$ log. cos. 9,9322238

Somme. . . . . . . 2,1013690 +
$\xi = 150'$ . . . . log. 2,1760913 — 2,1760913

Différence . . . . . 9,9252777 log. sin. de 57° 20′ 41″ log. cos. 9,7320585

Somme 1,9081498

qui est le log. de 80′, 94, ou 1° 20′ 56″, 4, ce qui est une seconde valeur de $L'' - L'$, et en s'en servant on aura

$r' = 147,62$. . . . . log. 2,1691452
$L' + \frac{1}{2}(L'' - L') = 31° 10' 28''$ log. cos. 9,9322683

Somme. . . . . . . 2,1014135 +
$\xi = 150$. . . . . log. 2,1760913 — 2,1760913

Différence . . . . . 9,9253222 log. sin. de 57° 21′ 16″ log. cos. 9,7319435

Somme 1,9080348

qui est le log. de 80′, 91 ou 1° 20′ 54″, 6 ; ce résultat ne différant du précédent que de 1″, 8, nous devons regarder ce dernier comme sensiblement exact : donc,

puisque le vaisseau s'est éloigné de l'équateur, nous aurons la latitude d'arrivée $= 30° 30' + 1° 20' 55'' = 31° 50' 55''$ sud, et l'air de vent compris entre le sud et l'est formant avec la ligne nord-et-sud un angle de $57° 21' 16''$, cet air de vent sera le SE$\frac{1}{4}$E $1° 6' 16''$ E.

55. Les solutions des cinq premiers problèmes que nous avons traités, étant plus simples et plus exactes *par le calcul* que par le quartier de réduction; on ne doit jamais se servir de ce dernier instrument pour résoudre les problèmes en question, lorsque la longueur du chemin ou la différence des latitudes et longitudes sont des quantités un peu grandes; mais on peut l'employer de la manière la plus avantageuse dans les réductions de plusieurs petites routes faites sur des airs de vent différens à une seule route sur un même air de vent. Voici en quoi consistent ces réductions:

Dans le premier problème que nous avons résolu (art. 49), nous n'avons considéré qu'une seule longueur de chemin fait sur un même air de vent, pendant les 24 heures écoulées d'un midi à l'autre. Mais dans cet intervalle de temps l'intensité du vent peut varier, ainsi que sa direction; la voilure du vaisseau peut augmenter ou diminuer; et l'air de vent sur lequel court le vaisseau peut aussi changer. Il est même rare que quelques-unes, où toutes ces circonstances n'aient lieu dans les 24 heures; l'officier de quart (*), attentif à observer toutes ces variations, les fait noter d'heure en heure, et même plus souvent, si le cas l'exige, sur un cahier de papier destiné à cet usage, qu'on appelle *cahier au loch* ou *cazernet*. A la fin du quart, l'officier ou plutôt le pilote de quart, réduit, par le moyen du quartier de réduction, tous les nœuds ou milles courus sur divers airs de vent aux seuls nœuds courus dans le nord ou dans le sud, et dans l'est ou l'ouest : de là, il lui est aisé, avec le même instrument, de trouver la route unique qui résulte de la composition des routes partielles, et l'air

(*) On appelle *quart* le temps que la moitié de l'équipage fait le service du vaisseau, lorsque l'autre moitié de l'équipage se repose. L'une de ces moitiés s'appelle le quart de tribord, l'autre celui de bâbord. Le temps de quart est de six heures ou de quatre heures; et les vingt-quatre heures, à partir de midi, sont divisées pour les quarts ainsi qu'il suit : de midi à six heures, de six à minuit, de minuit à quatre heures, de quatre à huit heures et de huit heures à midi; cette division de vingt-quatre heures en cinq quarts, fait que le quart de tribord est de service les mêmes heures qu'il étoit en repos la veille, et réciproquement pour le quart de bâbord. L'officier de quart est celui qui est chargé de la manœuvre du vaisseau pendant une des cinq divisions des vingt-quatre heures. Sur les vaisseaux de guerre les officiers sont à quatre quarts.

de vent sur lequel a été faite cette route unique. Nous allons expliquer cette réduction en l'appliquant à un exemple.

HEURES.	AIRS de vents courus.	NOMBRE de nœuds courus.	N	S	E	O
1.	SE$\frac{1}{4}$S	5.		$4\frac{1}{5}$	$2\frac{3}{4}$	
2.	SO	4.		$2\frac{5}{6}$		$2\frac{4}{5}$
3.	NNE	11.	$10\frac{1}{8}$		$4\frac{1}{5}$	
4.	ENE	10.	$3\frac{3}{4}$		$9\frac{1}{4}$	
			$13\frac{7}{8}$	$7\frac{1}{30}$	$16\frac{1}{8}$	$2\frac{4}{5}$
RÉSULTAT. Air de vent . . . . . ENE 4° 30′ N. Longueur du chemin. . . 15 $\frac{1}{3}$ nœuds			$7\frac{1}{30}$		$2\frac{4}{5}$	
			$6\frac{18}{19}$		$13\frac{2}{5}$	

Sur une petite planche carrée peinte en noir, ou encore mieux, sur une ardoise de même forme, qu'on appelle *table de loch*, sont tracés les lignes et les titres que l'on voit dans la table précédente ; les chiffres 1, 2, 3 et 4 de la première colonne verticale indiquent les première, seconde, troisième et quatrième heures du quart; dans la seconde colonne, on écrit l'air de vent que l'on a suivi à chaque heure; et dans la troisième, le nombre de nœuds que l'on a courus dans l'heure correspondante; d'où l'on déduit, pour chaque heure, le nombre de nœuds courus dans le nord ou dans le sud, et dans l'est ou dans l'ouest par le moyen du quartier de réduction, et ainsi qu'il suit: Pour la première heure, prenant sur la droite qui représente le SE$\frac{1}{4}$S, et à partir du centre, une longueur égale à cinq intervalles d'arcs qui représentent chacun un seul nœud ; je trouve que les distances respectives du point où se termine cette longueur aux lignes du *nord-et-sud* et *est-et-ouest*, sont $4\frac{1}{6}$ espaces, et $2\frac{3}{4}$ espaces; donc, dans cette heure-là le vaisseau a fait $4\frac{1}{5}$ milles dans le sud, $2\frac{3}{4}$ milles dans l'est, ce que j'écris respectivement dans les colonnes verticales qui ont en titre les lettres initiales des

mots sud et est. J'opère de même pour les trois autres heures, et faisant successivement l'addition de chaque colonne, je vois que le nombre des nœuds courus dans le nord est plus grand que celui couru dans le sud; je retranche donc ce dernier du premier, et je trouve que, dans les quatre heures, le vaisseau a réellement fait $6\frac{14}{15}$ ou $6\frac{4}{5}$ milles dans le nord. De même le nombre des nœuds courus dans l'est, étant plus grand que celui des nœuds courus dans l'ouest, je retranche ce dernier du premier, et je trouve que le nombre de milles réellement courus dans l'est pendant les 24 heures, est $13\frac{2}{5}$. Prenant donc sur la ligne *nord-et-sud* du quartier de réduction, et à partir du centre, une longueur $=6\frac{4}{5}$ espaces, et sur la ligne *est-et-ouest* à partir du même point, une longueur égale à $13\frac{2}{5}$ espaces; je fais concourir ces deux points en un seul, par une verticale et une horizontale qui se coupent en un seul point, sur lequel tendant le fil, j'ai la direction de l'air de vent couru que je trouve être l'E N E 4° 30′ N. Enfin, comptant le nombre d'intervalles d'arcs compris entre ce point et le centre du quartier, j'en trouve $15\frac{1}{5}$; donc le vaisseau a fait, dans les quatre heures, $15\frac{1}{5}$ nœuds, ou $5\frac{1}{24}$ lieues dans l'E N E 4° 30′ N.

Opérant de même aux cinq quarts, on aura cinq routes partielles que l'on réduira à une seule par un même procédé. Mais remarquons que, quoiqu'il soit à propos de calculer et noter à chaque quart le *résultat*, afin que le capitaine du vaisseau puisse voir tout de suite dans le cazernet quel a été le chemin que le vaisseau a fait dans tel ou tel autre quart, ainsi que la direction de la route; cependant, il vaut mieux, à la fin des 24 heures, ne pas considérer les résultats de chaque quart, mais additionner partiellement tous les nœuds faits dans les cinq quarts au nord, sud, est et ouest; et par la construction, obtenir le vrai nombre de nœuds courus dans les 24 heures au nord ou au sud, et à l'est ou à l'ouest; d'où l'on déduira, comme nous l'avons fait pour un seul quart, la route totale et l'air de vent couru. Par exemple, nous avons trouvé que dans un quart le vaisseau a couru $6^{n}\frac{4}{5}$ au nord et $13^{n}\frac{2}{5}$ à l'est; supposons que, dans les quatre autres quarts on trouve de la même manière les résultats suivans, auxquels nous ajouterons celui déjà trouvé.

	N	S	E	O
		$17\frac{3}{4}$	8	
		11	7	
	14			6
		16		3
	$6\frac{4}{5}$		$13\frac{3}{5}$	
Faisant l'addition on a......	$20\frac{4}{5}$	$44\frac{3}{4}$	$28\frac{3}{5}$	9
		$20\frac{4}{5}$	9	
Soustrayant on a.........		$23\frac{19}{20}$	$19\frac{3}{5}$	

Donc le chemin fait dans le sud est sensiblement $=$ 24 milles ou 8 lieues, et celui fait dans l'est est $19\frac{3}{5}$ milles, ou à très-peu de choses près $6\frac{1}{2}$ lieues. D'où l'on déduit, comme nous l'avons fait pour avoir le résultat d'un seul quart, que la longueur de la route, dans les 24 heures, est $=$ 31 milles, ou $10\frac{1}{3}$ lieues, et que l'air de vent couru est le SE$\frac{1}{4}$S 5° 15′ E.

On épargne, de cette manière, la peine de revenir des résultats de chaque quart aux lieues faites dans le même quart au nord ou au sud, et à l'est ou à l'ouest. J'ai cru devoir faire remarquer cette abréviation, parce que j'ai observé dans mes voyages par mer, qu'elle étoit négligée par les pilotes.

Il est évident que l'on pourroit faire toutes ces réductions par le calcul. Mais elles seroient bien plus pénibles, car il faudroit dans les 24 heures chercher 84 logarithmes, faire 48 additions de logarithmes, 6 soustractions; et enfin chercher à quels nombres, ou fonctions trigonométriques appartiennent 54 logarithmes différens. D'ailleurs le résultat total n'en seroit guère plus exact; car les routes que l'on réduit dans les cas dont nous venons de parler, n'étant que de peu de milles, chaque division ou intervalle du quartier de réduction ne représente qu'un mille. On peut même prendre deux ou trois de ces espaces pour représenter un seul mille, et par conséquent les erreurs commises dans les réductions, sont presque insensibles en se servant du quartier de réduction,

nom qui a été donné à cet instrument par ceux qui ont, avec raison, jugé qu'il n'étoit réellement utile que dans cette espèce d'opération.

Nous remarquerons, à cette occasion, que c'est mal à propos que plusieurs auteurs de traités de navigation ont compris, sous le nom de réductions de routes, les solutions des cinq problèmes que nous avons résolus aux articles 49.....53; car, on ne doit donner ce nom-là qu'aux opérations dont nous nous sommes occupés dans cet article.

56. Nous n'avons pas eu égard dans ce qui précède, à la variation de l'aiguille aimantée et à la dérive du vaisseau; c'est-à-dire que nous avons considéré l'air de vent sur lequel navigue le vaisseau, comme corrigé de ces deux déviations. Cependant il est nécessaire que nos jeunes marins s'accoutument de bonne heure à ces corrections, et nous allons leur donner deux exemples où nous corrigerons nous-mêmes l'air de vent; ensuite nous leur proposerons d'autres questions semblables que nous les engageons à résoudre avant de passer outre.

Exemple I. Le vaisseau étoit hier à midi par 40° 21′ de latitude nord et par 104° 35′ de longitude orientale; il a fait jusqu'à aujourd'hui à la même heure, 68 lieues au SE $\frac{1}{4}$E 4° E du compas de route. Les vents ont été au S $\frac{1}{4}$SO et SSO du compas, joli frais, et la mer belle. La dérive a été de 12 degrés, et la variation de l'aiguille aimantée est de 19° NO. On demande quelle est aujourd'hui à midi la latitude et la longitude du vaisseau.

Puisque la direction du vent forme avec celle de la quille du vaisseau un angle d'environ 7 rumbs de vents, et vient du côté de tribord, c'est-à-dire, que le vaisseau est tribord amures, la dérive 12 degrés doit être du côté de l'est. Ainsi, abstraction faite de la variation de l'aiguille, la route corrigée de la dérive n'est que le SE $\frac{1}{4}$E 16° E, ou l'ESE 4° 45′ E. Actuellement j'observe que la variation de l'aiguille étant de 19° vers le NO, c'est-à-dire de 19° sur la gauche du nord, la direction de la quille du vaisseau est toujours celle de l'air de vent du monde qui est de 19 degrés sur la gauche de celui marqué sur le compas de route. Ainsi, dans le cas présent où la direction de la route du vaisseau corrigée de la dérive est l'ESE 4° 45′ E; il ne devra être après la correction de la variation que cet air de vent 19° vers le nord, c'est-à-dire, l'E 1° 15′ N. Le reste de la solution comme à l'article 49.

Dans cet exemple la dérive et la variation sont contraires, c'est-à-dire qu'elles portent l'une et l'autre sous le vent de la direction du vaisseau marquée par le compas de route.

Exemple II. Le vaisseau étoit hier à midi par 47° 42′ de latitude nord, et

29° 18′ de longitude occidentale; il a fait jusqu'à aujourd'hui à la même heure 70 lieues au N O $\frac{1}{4}$ N du compas de route: les vents ont soufflé grand frais à l'OSO du compas : la dérive a été de 9° et la variation est de 16° 15′ N O. On demande quelle est aujourd'hui à midi la latitude et la longitude du vaisseau.

Par la direction de la route et du vent, il est aisé de voir que le vaisseau a navigué au plus près du vent bâbord amures, et que, conséquemment, la direction de la route du vaisseau corrigée de la dérive 9°, doit être sur la droite de celle marquée par le compas de cette même quantité 9°. Mais d'un autre côté la variation du compas étant de 16° 15′ N O, c'est-à-dire, à la gauche du nord, la route du vaisseau corrigée de cette variation doit être de 16° 15′ sur la gauche de celle marquée par le compas; donc l'effet de la variation, étant en sens inverse de la dérive, la deviation totale de la route du vaisseau comptée sur le compas de route est $=16°\ 15′-9°=7°\ 15′$ sur le bâbord de celle N O $\frac{1}{4}$ N comptée sur le compas; donc le vrai air de vent couru est le N O 4° N. Le reste de la solution, comme à l'article 49.

Exemple III. On est parti de 7° 15′ de latitude sud, et du méridien de Paris. On a fait depuis hier à midi 84 lieues au N 5° O; la variation étant de 4° N E, et ayant eu les amures à tribord avec 5° de dérive, on demande la latitude et la longitude d'arrivée, et l'air de vent sur lequel a cinglé le vaisseau.

Exemple IV. On étoit hier à midi par 37° 21′ de latitude nord, et 67° 36′ de longitude occidentale. Le vaisseau a fait route jusqu'à 5 heures du matin au S E 5° S, et a parcouru dans ces 17 heures 42 lieues : la variation étant de 12° N O, et les vents ayant régné du S O au S S O, la dérive estimée a été de 9°. On demande la latitude et la longitude du vaisseau à 5 heures du matin.

Exemple V. Le vaisseau étoit hier à midi par 14° 49′ de latitude N, et 68° 12′ de longitude occidentale. Les vents étant de la partie de l'E N E, nous avons gouverné au N $\frac{1}{4}$ N O; la variation étoit de 4° N E; nous avons constamment filé 8 nœuds par heure jusqu'à 4 heures du matin, que les vents ayant fraîchi, nous avons filé 9 nœuds jusqu'à midi. Notre dérive a été de 6° : on demande la latitude et la longitude du vaisseau avec le vrai air de vent de la route.

57. Cependant, à cause que la dérive du vaisseau est plus ou moins forte, suivant que le vent est plus ou moins près, que la voilure est plus ou moins considérable, que la mer est plus ou moins grosse, et que toutes ces circonstances peuvent varier souvent; il est à propos à chaque fois que l'on jette le loch d'estimer la dérive par le relèvement, et de corriger tout de suite, l'air de vent

couru par le vaisseau depuis la fois précédente qu'on a jeté le loch, de la dérive et de la variation de l'aiguille aimantée : de manière que par la réduction des routes (art. 55), on aura à chaque quart le nombre de nœuds courus dans le nord ou dans le sud du monde, et dans l'est ou l'ouest du monde. L'on parviendra ainsi dans la réduction générale des réductions particulières, à avoir la longueur du chemin dans les 24 heures, et l'angle formé par la vraie direction de la route du vaisseau avec la ligne *nord-et-sud* du monde ; d'où l'on conclura la latitude et la longitude du point d'arrivée du vaisseau par les règles enseignées à l'article 49.

58. Le loch ne donne, quelque précaution qu'on prenne, qu'une approximation plus ou moins grande de la longueur du chemin ; de même la boussole ne donne l'air de vent sur lequel le vaisseau a couru, qu'avec une certaine approximation ; donc le point fait avec ces simples données, ne peut avoir toute l'exactitude désirable, et n'est en quelque sorte que le résultat d'une estime de la route et de sa direction. C'est pour cela qu'on l'appelle *point par estime*, et qu'on nomme aussi latitudes et longitudes *estimées*, les latitudes et longitudes trouvées par le seul moyen du loch et du compas de route. Si cette approximation suffisoit, notre cours de navigation seroit, pour ainsi dire, fini ; car nous n'aurions plus qu'à faire connoître la manière de trouver la variation de l'aiguille aimantée. Mais combien seroit défectueuse une telle navigation, dans laquelle les erreurs de tous les jours s'accumulant, en donneroient une énorme au bout de quelque temps que l'on seroit à la mer ! Heureusement que nous allons trouver dans les mouvemens des corps célestes, des moyens sûrs pour nous guider, et que nous chercherions vainement, en ne considérant que notre planète. Il est donc nécessaire que nous acquérions quelques connoissances astronomiques : c'est ce qui va nous occuper dans le livre suivant.

LIVRE SECOND.

QUELQUES NOTIONS D'ASTRONOMIE.

Les savans auteurs des meilleurs cours élémentaires d'astronomie, tels que Lalande, Biot, etc., ont suivi dans ces ouvrages, les méthodes des inventeurs, c'est-à-dire qu'ils ont parcouru la route qui a conduit les hommes qui se sont occupés d'astronomie, des apparences aux réalités astronomiques; et ils n'ont exposé le vrai tableau du système planétaire (*) qu'après avoir ingénieusement préparé leurs lecteurs à être convaincus que ce seul système est conforme aux lois de la nature. Mais dans un ouvrage tel que celui-ci, cette marche seroit trop longue. Ainsi, nous exposerons tout de suite le tableau de notre système planétaire, tel que les observations et les recherches des plus grands géomètres et astronomes l'ont fait adopter par tous les hommes éclairés. Après cela, parcourant assez rapidement les circonstances des mouvemens et élémens des planètes, ainsi que de leurs satellites, nous ne considérerons plus dans notre système que le soleil, la terre et son satellite; et nous ferons voir que les changemens des positions respectives de ces trois astres observés directement, ou par les mouvemens apparens des étoiles, sont la base d'une théorie dont nous ferons, dans le troisième livre, l'application la plus utile à l'art nautique.

(*) J'entends par *tableau du système planétaire*, non-seulement l'exposé des noms des corps opaques qui se meuvent autour du soleil, mais encore celui des circonstances des mouvemens de ces astres, de leur grosseur, distances, etc., ce qui ne doit pas être confondu avec ce qu'on appelle quelquefois en astronomie *système*, et qui est la supposition d'un certain arrangement dans les parties qui composent l'univers. On compte trois systèmes principaux, savoir : celui de *Ptolomée*, qui écrivit son *Almageste* vers l'an 140 de Jésus-Christ; celui de *Copernic* qui est le vrai; enfin, celui de *Ticho-Brahé*. (Voyez l'*Astronomie* de Lalande, ou l'*Histoire de l'Astronomie* par Bailly.)

CHAPITRE PREMIER.

Tableau du système planétaire.

59. De tous les corps ignés répandus en nombre innombrable dans l'immensité de l'univers, le plus remarquable pour les habitans de la terre, est celui que nous avons appelé *soleil*, et qui est le centre de mouvement de 28 planètes et satellites (sans compter les comètes, et peut-être beaucoup d'autres planètes que nous ne connoissons pas encore) qui tournent autour de lui, suivant certaines lois que les géomètres sont parvenus à connoître, et à soumettre à l'analyse. Cet assemblage de corps opaques et du soleil, s'appele *système planétaire;* et quoique par analogie on puisse presque assurer que chaque étoile est le centre d'un système semblable au nôtre; cependant, la distance immense de ces astres à nous, ne nous permettant pas de voir les corps opaques qui circulent autour d'eux, et leur propre mouvement dans l'espace (*): nous ne pouvons les considérer que comme des points fixes du ciel qui nous serviront à déterminer les circonstances des mouvemens des corps qui composent notre système planétaire; de même que dans une escadre qui navigue en vue d'une côte, l'observateur placé sur un des vaisseaux, pourroit déterminer les changemens de positions respectives des autres bâtimens de l'escadre, en observant les différens points de la côte où ces vaisseaux lui paroîtroient correspondre.

60. Le *soleil* qui est au centre de notre système planétaire, est un corps ardent de figure arrondie, à peu près sphérique. Son diamètre est de 142083 myriamètres, sa densité n'est que le quart de celle de la terre. Sur sa surface on découvre des

(*) Si les systêmes planétaires de plusieurs de ces étoiles étoient beaucoup plus rapprochés du solaire, nous pourrions connoître si chaque système a un mouvement qui l'entraîne dans l'espace. Mais dans l'éloignement immense où nous sommes des étoiles, notre système paroît occuper sans cesse le même point de l'univers, parce que l'espace qu'il parcourt est sensiblement nul relativement à la distance du soleil aux étoiles, ce qui nous fait voir ces astres dans les mêmes positions respectives, c'est-à-dire, fixes.

taches qui varient de figures et de grandeurs, et dont les changemens de positions indiquent à l'observateur que cet astre a un mouvement de rotation autour d'un axe, qui se fait d'occident en orient.

La durée d'une rotation complète du soleil est à peu près de 25 jours et 10 heures. Enfin, la figure de cet astre est celle d'un sphéroïde très-peu différent d'une sphère.

Le soleil est au foyer commun des orbites elliptiques (*) que les planètes et comètes décrivent respectivement autour de cet astre radieux dans le temps d'une révolution entière.

Les mouvemens propres des planètes dans leurs orbites, ainsi que leurs mouvemens de rotation, sont tous d'occident en orient. Il n'en est pas de même des comètes qui se meuvent dans tous les sens.

Les astronomes représentent souvent le soleil par le signe ⊙.

61. La première planète qui circule autour du soleil est *Mercure*, dont la révolution se fait dans 88 jours.

62. La seconde planète de notre système planétaire est *Vénus*, qui fait sa révolution dans environ 224 $\frac{2}{3}$ jours.

Les deux planètes dont nous venons de parler, s'appellent *planètes inférieures*, parce qu'elles sont plus près du soleil que la terre.

63. Vient ensuite la troisième planète qui est la *terre*, et qui fait sa révolution autour du soleil dans $365^j 5^h 48^m 48^s$, et dont la durée de la rotation autour de son axe, est d'un jour. Nous avons déjà fait connoître sa figure à la note I.

64. La quatrième planète est *Mars*; sa révolution autour de son axe se fait dans environ 687 jours.

65. La cinquième planète connue est *Vesta*, découverte par M. Olbers, le 25 mars 1807; la durée de sa révolution est de 1582 jours.

66. La sixième planète est *Junon*, découverte le 4 septembre 1804, par M. Harding; sa révolution autour du soleil se fait dans environ 1582 jours.

(*) On appelle *orbite* d'un astre la courbe que décrit ce dernier dans le ciel. Les orbites des planètes figurent des courbes très-ressemblantes à des ellipses, mais ne sont pas parfaitement elliptiques; car les mouvemens des planètes, et surtout ceux de Jupiter et de Saturne sont assujétis à un grand nombre de petites inégalités que l'observation et la théorie ont reconnues et déterminées avec beaucoup d'exactitude. M. De Laplace en a fait connoître les lois : de plus, cet illustre géomètre les a soumises au calcul et a, par ce moyen, procuré aux astronomes l'avantage d'avoir des tables de Jupiter et de Saturne qui sont d'une très-grande exactitude.

67. La septième planète connue est *Cérès*, découverte le 1.er janvier 1802, par M. Piazzi; sa révolution autour du soleil est de 1682 jours.

68. La huitième planète est *Pallas*, découverte le 28 mars 1802, par Olbers; sa révolution autour du soleil se fait dans 1703 jours.

69. La neuvième planète est *Jupiter*, dont la révolution autour du soleil se fait dans 4330 ½ jours. Elle a quatre satellites qui tournent autour d'elle d'occident en orient. L'observation des éclipses de ces petits astres par Jupiter, est de la plus grande utilité pour déterminer les longitudes des différens pays; mais on ne peut s'en servir en mer, parce que ces observations ne se font que par le moyen du télescope, instrument qui, comme on le sait, doit être placé dans un lieu où il n'éprouve aucune sorte de mouvement, quelque petit qu'il soit.

70. La dixième planète connue est *Saturne*, qui fait sa révolution entière autour du soleil dans environ 10747 jours. Cette planète est particulièrement remarquable par un anneau mince qui l'entoure, et dont la largeur est un peu moindre que le tiers du diamètre de la planète.

Saturne est encore accompagné de sept satellites qui tournent presque circulairement autour de lui.

71. Enfin, la onzième planète connue, et qui est aux confins de notre système planétaire, est *Uranus;* elle fut découverte en 1781, par Herschel, ou du moins c'est cet astronome qui s'est assuré que cet astre est une planète : car, *Flamsted*, à la fin du dix-septième siècle, *Mayer* et *Le Monier*, dans le dix-huitième siècle, l'avoient déjà observée et considérée comme une petite étoile. La révolution de cette planète autour du soleil est de 30589 ⅓ jours.

Ces huit dernières planètes s'appellent planètes *supérieures*, parce qu'elles sont plus éloignées du soleil que la terre.

72. Les orbites des planètes sont toutes dans des plans différens; les angles respectifs que forment ces plans avec l'*écliptique* (*), s'appellent *inclinaison des orbites à l'écliptique*. Ces angles sont fort petits pour les anciennes planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, et pour les nouvelles Uranus et Vesta: mais ils sont beaucoup plus grands pour les nouvelles planètes Junon, Cérès, et surtout Pallas.

On appelle *nœuds* les deux points où l'orbite d'une planète coupe l'écliptique;

(*) On appelle ainsi un cercle de la sphère céleste, qui est dans le même plan que l'orbite elliptique de la terre, et auquel on rapporte tous les points de cet orbite en prolongeant le rayon vecteur de cette dernière.

le nœud par où passe la planète pour monter dans l'hémisphère septentrional, relativement à l'écliptiele, s'appelle *nœud ascendant*, et son signe caractéristique est ☊; et l'autre nœud, c'est-à-dire, celui par où passe la planète pour descendre dans l'hémisphère méridional relativement à l'écliptique, s'appelle *nœud descendant* et se désigne par le caractère ☋.

On trouvera à la note VIII plus de détails sur notre système planétaire.

73. Si par le centre d'un astre, ou généralement par un point déterminé du ciel, et par les pôles de l'écliptique, on fait passer un grand cercle; l'arc de ce grand cercle compris entre le centre de l'astre, ou le point déterminé et l'écliptique, est ce qu'on appelle la *latitude* de cet astre ou *point céleste*. La latitude astronomique se compte depuis l'écliptique où elle est zéro, jusque vers chacun des deux pôles de ce cercle où elle est de 90 degrés. Cette latitude est dite *boréale* ou *australe*, suivant qu'elle est prise du côté du pôle de l'écliptique qui est dans l'hémisphère boréal, ou qu'elle est prise du côté du pôle de l'écliptique qui est dans l'hémisphère austral. Les cercles sur lesquels se comptent les latitudes, s'appellent *cercles de latitudes*.

La *longitude* d'un astre, ou généralement d'un point céleste, est l'arc de l'écliptique compris entre le cercle de latitude de cet astre, ou point céleste, et le point d'intersection de l'écliptique avec l'équateur par où passe la terre vers la fin de septembre. Ce point et celui qui lui est opposé, s'appellent points *équinoxiaux;* le premier est le point équinoxial du *printemps*, et s'appelle ainsi, parce que par le mouvement propre de translation de la terre autour du soleil, nous voyons ce dernier astre correspondre à ce point-là vers la fin du mois de mars qui, comme on le sait, est l'époque où commence la saison qu'on appelle *printemps*.

Le point équinoxial opposé est surnommé d'*automne* parce que, par la même raison que précédemment, le soleil nous paroît y passer vers la fin du mois de septembre qui, comme on le sait, est l'époque d'où l'on commence à compter la saison appelée *automne*.

La longitude astronomique se compte d'occident en orient depuis le point équinoxial du printemps où elle est zéro jusqu'à 360°.

Nous entrerons dans de plus grands détails sur la position des astres relativement à l'écliptique, au chapitre suivant.

CHAPITRE SECOND.

Des Effets apparens produits par les mouvemens réels de la Terre autour du Soleil, et de la mesure du Temps.

TOUTES les observations et recherches astronomiques ont nécessairement, plus ou moins, quelques rapports avec le soleil, qui est le plus grand de tous les astres de notre système planétaire, le seul lumineux, le centre des forces de tous, l'astre sans la présence duquel nous serions toujours dans les ténèbres, et disons mieux, sans lequel la nature seroit morte dans le point de l'univers qu'occupe notre système planétaire. Occupons-nous donc principalement du soleil, dont la théorie est à l'astronomie ce qu'est ce même astre par rapport à tous ceux qui tournent autour de lui.

74. Nous avons vu dans le chapitre précédent, que la terre a deux mouvemens, l'un de rotation autour de son axe, qui dure un jour; l'autre de révolution autour du soleil, dans $365^j\, 5^h\, 48^m\, 48^s$ (art. 63). Or, si ces deux mouvemens étoient parallèles, c'est-à-dire, si l'axe de la terre étoit perpendiculaire au plan de l'écliptique; alors il est évident que cette orbite et l'équateur étant dans le même plan se confondroient; et puisque l'horizon de l'observateur, quelque part de la surface de la terre où se trouve cet observateur, coupe l'équateur en deux parties égales, il s'ensuivroit qu'alors le soleil, toujours à l'équateur, seroit visible 12 heures de jour à tous les habitans de la terre, et invisible le même temps. Mais l'axe de la terre est incliné d'environ $66° 32'$ sur le plan de l'écliptique (*); ce qui fait former à ce dernier un angle avec le plan de l'équateur d'en-

---

(*) Cette inclinaison n'est pas toujours la même, et cet angle augmente d'à peu près $50''$ par siècle. La théorie a fait voir que cette augmentation a une limite, et qu'après avoir augmenté un certain temps, cet angle diminuera suivant les mêmes lois; ainsi, ce mouvement provenant des actions du soleil et de la lune sur le sphéroïde terrestre, applati vers les pôles, est une petite oscillation de l'extrémité de l'axe terrestre prolongé jusqu'au ciel, sur la circonférance d'une petite ellipse qui, d'après la théorie, a son grand axe qui est au petit, comme le sinus de l'angle d'inclinaison de l'axe de la terre sur l'équateur est au cosinus du double de cet angle. (Voyez la *Mécanique céleste.*).

viron 23° 28′, qu'on appelle *obliquité de l'écliptique;* d'où il suit, qu'excepté les deux époques où la terre se trouve aux points d'intersections de l'équateur avec l'écliptique, qu'on appelle *équinoxes*, les rayons du soleil ne parcourent sur la surface du sphéroïde terrestre, dans le temps que ce dernier fait un tour entier sur son axe, qu'un parallèle à l'équateur, et qui est d'autant plus petit que la terre est plus éloignée des deux points équinoxiaux. Donc, lorsque la terre est aux deux points de son orbite, qui sont chacun éloignés de 90° des points équinoxiaux, et qu'on appelle *points solsticiaux*, ou simplement *solstices*, les deux parallèles que paroît alors décrire le soleil, sont les plus petits de tous ceux qu'il paroît décrire dans le reste de l'*année* (on appelle ainsi la durée de la révolution de la terre autour du soleil). Ces deux parallèles qui, l'un à 23° 28′ au nord de l'équateur, et l'autre à la même distance angulaire au sud de l'équateur, limitent les écarts apparens du soleil de ce dernier grand cercle, s'appellent *tropiques*.

75. Nous avons vu à l'article 15 que l'horizon de l'observateur étant un grand cercle de la sphère céleste qui coupe l'équateur en deux parties égales, et forme avec lui un angle plus ou moins grand, suivant que l'observateur s'avance plus ou moins de l'équateur, ne devra couper les parallèles que paroît décrire chaque jour le soleil qu'en parties inégales, dont la plus grande sera au-dessus de l'horizon, si le soleil est dans le même hémisphère que l'observateur; et le contraire, si le soleil est dans l'hémisphère opposé. Ce qui nous a expliqué l'inégalité des jours, qui pendant six mois sont plus longs que les nuits, et qui pendant les autres six mois sont plus courts que les nuits, en en exceptant pourtant les deux jours où le soleil paroît décrire l'équateur, jours pendant lesquels la durée de la présence du soleil est, pour tous les habitans de la terre, égale à celle de son absence (art. 15).

Lorsque l'angle formé par l'horizon de l'observateur et l'équateur, est plus petit que l'obliquité 23° 28′ de l'écliptique, c'est-à-dire, lorsque la latitude de l'observateur est plus grande que 66° 32′; alors il est évident qu'à deux époques opposées de la même année, les parallèles que paroîtra décrire le soleil seront tout en dessus, ou tout en dessous de l'horizon de l'observateur, suivant que ce dernier est dans le même hémisphère, ou dans l'hémisphère opposé à celui où est le soleil. Ainsi, cet observateur aura pendant un certain temps de l'année, des jours continuels, et six mois après, des nuits continuelles.

Ces variétés ont fait diviser la surface de la terre en cinq *zones*. La première est celle comprise entre les deux tropiques terrestres et qui, conséquemment

est égale au double de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire, est d'environ 46° 56'. Cette partie de la surface de la terre s'appelle *zone torride*, parce que, recevant verticalement les rayons du soleil, elle est la plus chaude de toutes. Les habitans de cette zone voient deux fois par an le soleil passer à leur zénith; une fois lorsque le soleil va d'un tropique à l'autre; la seconde fois, au retour de ce dernier tropique au premier.

Les seconde et troisième zones sont symétriques, et placées de part et d'autre de l'équateur, entre les 23° 28' et 66° 32' de latitude, c'est-à-dire, entre le tropique correspondant et le parallèle qui passe par 66° 32' de latitude dans le même hémisphère. Ainsi, la largeur de chacune de ces deux zones est de 43° 4'. On les appelle zones *tempérées*, parce qu'elles ne reçoivent jamais verticalement les rayons du soleil, ce qui fait qu'elles sont beaucoup moins chaudes que la zone torride, et que, d'un autre côté, elles sont tous les jours plus ou moins échauffées par les rayons obliques du soleil, puisque, quelque part que soit ce dernier astre, le parallèle qu'il paroît décrire est coupé par l'horizon de chacun des habitans des zones tempérées. Les deux parallèles, qui limitent ces deux zones, l'un du côté du pôle nord et l'autre du côté du pôle sud, et dont conséquemment les latitudes respectives sont 66° 32' nord et 66° 32' sud, s'appellent *cercles polaires*.

Enfin, les quatrième et cinquième zones sont encore symétriques, et placées l'une entre le cercle polaire nord et le pôle de même dénomination; l'autre, entre le cercle polaire sud et le pôle de même dénomination. Ainsi, ces zones ou plutôt calotes sphériques ont chacune 23° 28' de hauteur angulaire : on les appelle *zones glaciales*, parce que, fort éloignées de la verticale des rayons du soleil, elles sont extrêmement froides et presque toutes couvertes de glaces, même dans les temps où le soleil y est visible pendant les 24 heures de la journée.

76. Quoique nous soyons presque sûrs (*) que la terre tourne autour du soleil

(*) Nous voyons dix planètes tourner autour du soleil : ainsi, si ce dernier astre tournoit autour de la terre, celle-ci seroit la seule des onze planètes dispensée de la loi générale aux dix autres, et elle jouiroit exclusivement du privilége d'être le centre de mouvement d'un système de 28 corps célestes (non compris les comètes et la lune), dont quatre sont beaucoup plus gros qu'elle, et qui feroient une révolution entière autour de la terre dans un an. Comment expliquer alors ce mouvement révolution de tous ces corps parmi lesquels il en est un, le soleil, qui est d'un volume 1384462 fois plus gros que celui de la terre, autour duquel il tourneroit? La théorie, qui explique d'une ma-

et non ce dernier autour de la première, cependant les apparences sur la surface de la terre sont exactement les mêmes dans l'un et l'autre cas. En effet, soit 1.° considéré le soleil comme fixe au point S, et la terre T comme se mouvant le long de son orbite TT′ d'occident en orient, quelle que soit la figure de cette courbe. Supposons que la terre étant en T, on a observé que le soleil étoit en *conjonction* avec l'étoile E, c'est-à-dire, que l'étoile E étoit sur le prolongement de la ligne TS des centres de la terre et du soleil. Cela posé, il est clair que dans l'instant où la terre sera en T′ la distance angulaire apparente du soleil à l'étoile E sera mesurée par l'angle BSE ou son égal TSP, puisqu'alors le soleil paroîtra répondre au point B du firmament. Donc si l'arc TP décrit du point S comme centre, et d'un rayon égal à la première distance ST du soleil à la terre est une quantité a, la distance angulaire apparente du soleil à l'étoile sera aussi a. Supposons maintenant que la terre T, restant fixe au point T, le soleil S parcourt, d'occident en orient, un arc d'orbite SS′, parfaitement égal et symétrique à celui TT′, ce qui doit nécessairement paroître ainsi lorsque l'on rapporte au soleil le mouvement vrai de translation de la terre; il est clair qu'alors l'arc de cercle SP′, décrit du point T comme centre, et d'un rayon égal à TS, sera parfaitement égal à celui TP. Donc les lignes PSB, TP′B′ seront parallèles; d'où il suit que l'angle B′TE, qui sera la mesure de la dis- Fig. 13.

nière si évidente, et d'après le seul principe de la pesanteur universelle, tous les mouvemens de révolutions des planètes autour du soleil; ne pourroit plus expliquer le mouvement en question. La l. de Kepler, savoir *que les carrés des temps de révolutions des planètes autour du soleil sont proportionnels aux cubes de leurs moyennes distances*, et qui est si conforme à la vérité lorsque l'on suppose que la terre tourne autour du soleil, seroit, dans le cas contraire, fausse seulement pour cette planète. L'observateur, placé à la surface de Jupiter, dont le volume est 13843 fois plus grand que celui de la terre, voit, comme l'observateur placé à la surface de cette dernière planète, le soleil tourner autour de lui; et il est beaucoup plus en droit de croire que le soleil tourne autour de Jupiter, que nous autres de croire que le soleil tourne autour de nous, puisque la grosseur du volume de Jupiter se rapproche plus de celle du soleil que celle de la terre. Cependant, nous qui sommes dans le cas de décider cette question de mouvement entre le soleil et Jupiter, nous savons que c'est cette dernière planète qui tourne autour de ce premier astre. Ces observations sont plus que suffisantes pour nous convaincre que le mouvement de translation appartient absolument à la terre : ce qui est encore démontré d'une manière bien évidente par l'*aberration*, c'est-à-dire, la déviation des rayons de lumière qui nous viennent des étoiles, laquelle est le résultat de la combinaison du mouvement de la lumière avec celui de la terre. Voyez la *Mécanique céleste*, où ce phénomène est expliqué avec une sagacité qui caractérise l'illustre auteur de ce savant ouvrage.

Fig. 13. tance angulaire apparente du soleil à l'étoile dans ce second cas, sera égale à l'angle B S E qui mesuroit la distance angulaire apparente des deux mêmes astres dans le premier cas. Donc les apparences des positions respectives du soleil dans le ciel sont les mêmes, soit qu'on suppose le mouvement de translation au soleil, soit qu'on le suppose à la terre.

Cela posé, et de plus, faisant attention que le mouvement de rotation de la terre d'occident en orient autour de son axe, produit les mêmes effets dans les positions respectives et successives des astres sur l'horizon de l'observateur que si, la terre étant immobile, toute la voûte céleste tournoit dans un jour d'orient en occident autour de l'axe du monde qui est le prolongement de l'axe de la terre, nous supposerons dorénavant, et pour simplifier les théories dont nous nous occuperons, que le soleil parcourt tous les ans d'occident en orient une orbite elliptique dont le centre de la terre occupe un des foyers; et qu'outre cela, il fait tous les jours en sens inverse de la révolution annuelle, c'est-à-dire, d'orient en occident, une révolution autour de la terre.

Avant de passer outre, nous allons, dans l'article suivant, donner quelques définitions qui nous seront utiles.

77. L'orbite apparente du soleil, c'est-à-dire, l'écliptique, se divise en douze parties égales qu'on appelle *signes*, et qui correspondent à des arcs de 30 degrés du cercle circonscrit à cette ellipse. Ces douze signes à partir du nœud ou point *équinoxial* du printemps, et allant suivant le cours annuel du soleil d'occident en orient, ont les noms et caractères suivans :

♈ le Bélier.	♎ la Balance.
♉ le Taureau.	♏ le Scorpion.
♊ les Gémeaux.	♐ le Sagittaire.
♋ l'Écrevisse.	♑ le Capricorne.
♌ le Lion.	♒ le Verseau.
♍ la Vierge.	♓ les Poissons.

Le premier de ces douze signes commence, comme nous l'avons dit précédemment, au nœud ♈, ou première intersection de l'équateur ♈ E ♎ Q avec
Fig. 14. l'écliptique ♈ ♋ ♎ ♑, et se prolonge dans la partie nord ♈ ♋ de l'orbite solaire. Ce nœud ♈, ou point équinoxial du printemps, s'appelle encore premier *point du bélier*. Le point ♋ commencement du quatrième signe l'*écrevisse*, est celui où le soleil est le plus élevé au dessus de l'équateur du côté du nord, et s'appelle *solstice* d'été; le tropique qui passe par ce point-là, prend le nom latin de ce

signe, et s'appelle par conséquent *tropique du cancer.* Le soleil se trouve à ce point solsticial vers le 22 du mois de juin; c'est alors que commence l'été des habitans de l'hémisphère nord de la terre.

Le point ♎ où commence le septième signe *la balance*, est le second nœud ou point équinoxial; c'est lorsque le soleil est à ce point que commence l'automne. Enfin le point ♑ où commence le dixième signe *le capricorne*, est celui où le soleil est le plus abaissé au-dessous de l'équateur; et lorsque le soleil s'y trouve, l'hiver commence pour nous. Ce point ♑ est appelé *solstice* d'hiver, et le tropique qui passe par ce signe en prend le nom, et par conséquent s'appelle *tropique du capricorne.* Tout ce que nous avons dit pour les saisons est évidemment l'inverse, pour les habitans de l'hémisphère méridional de la terre. Fig. 14.

Si l'on imagine que par le pôle P du monde et par les deux équinoxes ♈ et ♎, on fait passer un grand cercle de la sphère; ce cercle s'appellera *colure des équinoxes.* De même, si l'on imagine que par les points solsticiaux ♋ et ♑, on fait passer un grand cercle, ce cercle s'appellera *colure de solstices.* Il est évident que ces colures se coupent à angles droits.

Les six premiers signes ♈ .. ♍ placés au nord de l'équateur s'appellent *signes supérieurs*; et les six autres ♎.. ♓ placés au sud de l'équateur s'appellent *signes inférieurs.*

Les six signes ♑, ♒, ♓, ♈, ♉ et ♊ que le soleil parcourt en montant du point solsticial d'hiver ♑ où il étoit le plus sud, jusqu'au point solsticial d'été ♋ où il est le plus élevé au-dessus de l'équateur, s'appellent *signes ascendans.* Les six autres signes s'appellent par la raison contraire, *signes descendans.*

78. L'arc A D du grand cercle P A D etc., qui passe par les pôles du monde et par le centre d'un astre A, et qui est compris entre le centre de ce dernier et l'équateur, c'est-à-dire, la distance angulaire A D du centre A d'un astre à l'équateur E D Q s'appelle la *déclinaison* de cet astre, elle est surnommée boréale, ou australe suivant que l'astre est dans l'hémisphère *équatorien* (*) boréal, ou qu'elle est dans l'hémisphère équatorien austral. Ainsi, la déclinaison d'un astre quelconque est toujours comprise entre 0 et 90 degrés, soit du côté du nord soit du côté du sud. Il suit de là 1.° que la déclinaison du soleil est boréale, lorsque cet astre

(*) J'ajoute au mot *hémisphère* celui *équatorien*, afin de distinguer les hémisphères qui ont pour base le plan de l'équateur d'avec ceux qui auroient pour base l'écliptique ou l'horizon, ou le premier méridien, que par la même raison l'on peut respectivement appeler *hémisphère écliptiquien*, *hémisphère horizontal* et *hémisphère méridienal.*

parcourt les six signes supérieurs, et qu'elle est australe lorsque le même astre parcourt les six signes inférieurs. 2.° Que la déclinaison du soleil est nulle aux deux points équinoxiaux. 3.° Que les plus grandes déclinaisons du soleil ont lieu lorsque cet astre se trouve aux deux points solsticiaux, mais qu'elle ne peut être plus grande que 23° 28', puisque cette dernière quantité qui est l'obliquité de l'écliptique, mesure l'angle formé par cette orbite et l'équateur.

Fig. 14. Le cercle ou méridien céleste tel que P A D etc., qui passe par le centre A d'un astre, est son *cercle de déclinaison.*

79. On appelle *ascension droite* d'un astre A, l'arc ♈ D de l'équateur, compris entre le point ♈ du bélier, et le point d'intersection D de l'équateur avec le cercle de déclinaison P A D etc., de cet astre. Cette ascension droite se compte depuis le point du bélier, où elle est zéro, jusqu'à 360° en suivant le cours de la marche apparente du soleil, c'est-à-dire, d'occident en orient. Ainsi, l'ascension droite du soleil est zéro à l'équinoxe du printemps; elle est de 90° au solstice d'été; de 180° à l'équinoxe d'automne; de 270° au solstice d'hiver, enfin de 360° ou zéro, lorsque le soleil se retrouve au point du bélier.

On appelle encore *distance du soleil à l'équinoxe* le supplément à 360° de l'ascension droite de cet astre. Cette distance se trouve marquée pour tous les jours de l'année dans la *Connoissance des temps,* mais elle y est réduite en temps, à raison de 15° par heure.

80. Des définitions précédentes, il suit évidemment que, connoissant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre pour un instant quelconque, on connoîtra le point de la sphère céleste où se trouve cet astre dans le même instant. Nous enseignerons au chapitre IV les méthodes dont on se sert pour déterminer les ascensions droites et déclinaisons des corps célestes.

On peut de même déterminer la position d'un astre dans le ciel pour un instant quelconque, lorsque l'on connoîtra pour le même instant la latitude A B et la longitude B ♈ de cet astre (art. 73). Nous enseignerons au chapitre IV la méthode dont on se sert pour déterminer ces latitudes et longitudes astronomiques, et nous nous contenterons d'observer, pour le moment, que le soleil étant toujours sur l'écliptique, n'a pas de latitude.

81. Si les changemens diurnes en déclinaison et longitude du soleil étoient instantanés, c'est-à-dire, si le chemin diurne du soleil sur l'écliptique se faisoit dans le seul instant où le soleil passe par un même méridien; il est évident qu'alors, d'un passage à l'autre par ce méridien, le soleil décriroit, par son mouvement de révolution diurne autour de la terre, un parallèle S I F S à l'équa-

teur. Mais les changemens en longitude et déclinaison du soleil dans un jour se distribuant également sur tous les instans de la journée entière, il est clair que la courbe de révolution entière dans un jour, n'est plus un cercle SIFS, mais une spire SHLS'S'', faisant partie d'une spirale à double courbure, qui est dans l'espace, la trace de la marche du soleil depuis l'équinoxe du printemps jusqu'au solstice d'été. A ce dernier point commence une nouvelle spirale semblable à la première, mais dont les spires vont en croissant, au lieu que celles de la première spirale vont en diminuant. Ces deux courbes ne coïncident pas, mais en se croisant elles forment une espèce de grille convexe. Les mêmes circonstances ont lieu dans l'hémisphère austral. Fig. 14.

82. Si le soleil et une étoile passent en même temps en S au méridien PSN, il est évident que le lendemain, lorsque l'étoile se trouvera sous le même méridien, le soleil n'y sera pas encore, puisque par son mouvement de translation d'occident en orient, il a rétrogradé dans l'intervalle de temps compris entre les deux passages de l'étoile au même méridien d'une quantité SS'; et que conséquemment, lorsque tout l'équateur aura passé sous le méridien de l'observateur, il faudra qu'il y passe encore l'arc $\overline{MN}+\frac{\overline{MN}^2}{360}+\frac{\overline{MN}^3}{(360)^2}+\frac{\overline{MN}^4}{(360)^3}+$ etc. à l'infini $=\frac{MN\times 360}{360-MN}$ (*Alg.* §. 122), MN étant la différence d'ascension droite du soleil pendant la durée d'une rotation entière de la terre autour de son axe, et qu'on appelle *jour sidéral;* $\frac{\overline{MN}^2}{360}$ étant la différence de la même ascension pendant que MN passe un méridien, et ainsi de suite à l'infini; ce qui, évidemment, donne la limite $\frac{MN\times 360}{360-MN}$ de la somme précédente égale à la différence d'ascension droite du soleil dans le *jour solaire*, c'est-à dire dans le temps que le soleil reste depuis son passage à un méridien jusqu'à son retour au même méridien. Si de la formule

$$\frac{360\,MN}{360-MN}$$

on retranche la différence MN d'ascension droite du soleil dans le jour sidéral, on aura la différence d'ascension droite du même astre pendant le temps dont le jour solaire surpasse le jour sidéral, qui sera

$$\frac{\overline{MN}^2}{360-MN}$$

Or, nous observerons que si le mouvement du soleil étoit uniforme, et se fai-

soit parallèlement à l'équateur, alors les différences diurnes en ascension droite seroient toutes égales entr'elles, et par conséquent égales à 360° divisés par le nombre de jours que le soleil reste pour revenir au même point du ciel que celui où il étoit l'année précédente. Ce temps, qu'on appelle *année sidérale*, et qui est un peu plus longue que l'année ordinaire, par des raisons que nous expliquerons au chapitre III, est de $365^{j}\,6^{h}\,9^{m}\,16^{s},26$; donc la différence diurne et uniforme en ascension droite du soleil sera $= \frac{360^{\circ}}{365^{j}6^{h}9^{m}10^{s},26} = 0^{\circ},9856093$, ou sensiblement $= 59'8'',2$. Ainsi, l'arc de l'équateur qui passe par un méridien dans le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil au même méridien, en supposant que cet astre se meut uniformément et parallèlement à l'équateur, est de $360^{\circ}\,59'\,8''$ d'orient en occident. Le temps que cet arc de l'équateur céleste reste à passer par un même méridien, s'appelle *jour moyen*, et les multiples de ce seul jour s'appellent *temps moyen*. Mais, ainsi que nous le démontrerons bientôt, il passe quelquefois plus, d'autres fois moins de $360^{\circ}\,59'\,8''$ de l'équateur céleste par un méridien dans le *jour vrai*, c'est-à-dire dans le vrai temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du centre du soleil à ce méridien. Les multiples et parties de ce jour vrai, telles que les heures, minutes, etc., s'appellent généralement *temps vrai*.

Le temps moyen est constant et uniforme dans sa marche, puisqu'il est proportionnel aux espaces parcourus uniformément par le soleil, lorsqu'on suppose que cet astre se meut uniformément et parallèlement à l'équateur. De même le temps sidéral est constant et uniforme, puisqu'il est proportionnel au mouvement de rotation de la terre autour de son axe, qui est uniforme; mais le temps vrai varie comme les mouvemens vrais du soleil, qui sont quelquefois plus accélérés, d'autres fois plus retardés que les mouvemens uniformes du même astre. Le jour sidéral est plus court que les jours moyen et vrai, et le jour vrai est quelquefois plus long, d'autres fois plus court que le jour moyen: cependant ces deux derniers jours sont les mêmes; ou, pour mieux dire, le temps moyen s'accorde avec le temps vrai quatre fois par an, savoir, lorsque le soleil est dans les premier, troisième, sixième et dernier signes de l'écliptique.

83. La durée d'une révolution diurne moyenne du soleil, ou le jour moyen étant de 24 heures, et le soleil parcourant dans ce temps-là, d'un mouvement uniforme, $360^{\circ}\,59'\,8''$, on aura la durée d'une révolution diurne d'une même étoile autour de la terre, c'est-à-dire, du jour sidéral, en faisant la proportion $560^{\circ}\,59'\,8'',2 : 560^{\circ} :: 24^{h} : \frac{24 \times 360}{360,9856073} = 23^{h}\,56^{m}\,4^{s}$. Ainsi la différence du jour

sidéral au jour moyen est de $3^m 56^s$. Il suit de là que si l'on avoit une horloge réglée sur le mouvement des fixes, c'est-à-dire qui marquât 24 heures sidérales dans l'intervalle de deux passages consécutifs d'une étoile au même méridien, le jour moyen seroit = à la troisième proportionnelle aux deux quantités $23^h 56^m 4^s$ et 24^h, qu'on trouve être $24^h 3^m 56^s,556$; ou plus simplement, $24^h 3^m 57^s$ temps sidéral. 2.° Qu'à chaque heure de cette horloge il passeroit 15 degrés de la voûte céleste par le méridien de l'observateur; et de même à chaque minute sidérale il passeroit 15′ de degré; à chaque seconde sidérale, 15″ de degré, et ainsi de suite.

Donc, si l'horloge sidérale marquoit zéro à l'instant du passage du premier point du Bélier par le méridien, il n'y auroit qu'à observer l'heure de cette horloge à l'instant du passage d'une étoile au même méridien; et convertissant cette heure en parties de l'équateur, à raison de 15° par heure, on auroit tout de suite l'ascension droite de l'étoile observée.

Mais à cause que cette horloge qui, dans l'année entière avanceroit de tout un jour sur le temps solaire, n'indiqueroit l'heure solaire qu'en retranchant de l'heure qu'elle marqueroit, l'ascension droite du soleil réduite en temps pour cet instant, il seroit fort incommode de s'en servir dans les usages civils; car on sait que les actions journalières de l'homme, telles que le travail, les repas, le sommeil, etc., se succèdent ordinairement dans le même ordre que les positions du soleil par rapport au méridien, c'est-à-dire suivant le temps vrai, ou du moins le temps moyen.

84. Puisque dans 24 heures solaires, temps moyen, il passe 360° 59′ 8″ de l'équateur par un même méridien, il est évident qu'il passera dans une heure solaire $\frac{360° 59' 8''}{24} = 15° 2' 27'',8$; dans une minute $15' 2'',5$; dans une seconde $15'',04$, et ainsi de suite. On trouve une table de ces réductions dans toutes les *Connoissance des temps*.

85. L'orbite solaire étant inclinée de 23° 28′ sur le plan de l'équateur, il est évident que, quand même cette orbite seroit circulaire, les différences en ascensions droites varieroient d'un jour à l'autre. A cette cause des variations des ascensions droites du soleil, se réunissent les suivantes : 1.° l'orbite solaire est elliptique, donc les arcs de l'écliptique compris entre les rayons vecteurs prolongés du soleil d'un jour à l'autre, varient; 2.° l'inclinaison de l'orbite de la terre varie d'environ 50″ par siècle (*); 3.° les nœuds de l'orbite solaire avec

(*) Cette variation est négative; mais la théorie a fait voir que la diminution dans l'obliquité de

l'équateur ou points équinoxiaux, ont un mouvement rétrograde, ou d'orient en occident, qui leur fait faire une révolution entière autour de l'équateur dans 25867 années : ce mouvement s'appelle *précession des équinoxes*, et nous en parlerons avec un peu plus de détail dans le chapitre suivant. Toutes ces causes que la nature de cet ouvrage ne permet pas de développer comme elles devroient l'être dans un traité complet d'astronomie, rendent très-sensibles les différences d'ascensions droites du soleil d'un jour à l'autre. Au reste, quelles que soient les variations que peuvent éprouver les différences du temps vrai au temps moyen, ce qu'il importe le plus aux marins, c'est de savoir réduire le temps vrai en temps moyen, et c'est ce que nous leur enseignerons dans le livre III.

CHAPITRE TROISIÈME.

De la précession des Equinoxes; de la nutation de l'Axe; de la durée de l'Année; des Etoiles, et de la manière la plus simple de reconnoître, dans le ciel, les principales.

86. DEPUIS un ou deux siècles avant Jésus-Christ, l'on s'étoit aperçu de la rétrogradation des points équinoxiaux sur l'écliptique ou *précession des équinoxes*, lorsque, près de 19 siècles après, Newton expliqua ce phénomène par la théorie de l'attraction. Ce grand philosophe calcula même, d'après cette théorie, que l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur devoit varier; ce qui se trouva vérifié par les observations du célèbre astronome Bradley, qui vivoit dans le dernier siècle. Ce dernier phénomène est ce qu'on appelle la *nutation de l'axe* (*).

l'écliptique a une limite après laquelle l'angle de l'écliptique et de l'équateur augmentera peu à peu, pour décroître ensuite par les mêmes degrés. M. de La Place a démontré que ces variations dans l'obliquité de l'écliptique, ne peuvent aller en plus et en moins à 1° 48'. Ainsi, ce mouvement se réduit à une petite oscillation autour de l'obliquité moyenne qui fait varier la vraie obliquité de l'écliptique.

(*) Dans un mémoire de d'Alembert, ayant pour titre : *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la terre dans le système Newtonien*, ce savant géomètre a fait voir : 1.° qu'en vertu de la figure applatie de la terre, l'action du soleil et celle de la lune de-

Nous allons dans les deux articles suivans donner une idée de la manière dont on peut concevoir ces deux phénomènes.

* 87. L'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique étant de 23° 28′, il est clair que les axes de ces deux grands cercles formeront aussi un angle de 23° 28′. Supposons donc que l'axe de l'équateur, c'est-à-dire, l'axe de rotation de la terre prolongé, formant toujours avec celui de l'écliptique un même angle, tourne autour de ce dernier axe, en engendrant la surface de deux cônes opposés au centre de la terre, ayant pour axe celui de l'écliptique, et pour base le cercle dont le diamètre est la corde qui soutend un arc de 46° 56′ du cercle de latitude qui passe par les pôles de l'équateur et de l'écliptique. Supposons de plus, que cette révolution totale dure 25867 années, c'est-à-dire que chaque année, l'axe du monde parcourt un arc de la circonférence de la base du cône qu'il engendre, de 50″ 103; il est évident que par ce mouvement de révolution de l'axe de l'équateur d'orient en occident, la ligne des équinoxes, qui est toujours perpendiculaire dans le plan de l'écliptique à la projection ortographique de l'axe, doit toujours rétrograder sur l'équateur de la même quantité que le pôle de l'équateur a rétrogradé sur le cercle qu'il décrit dans 25867 ans, et dont le diamètre est = 2 sin. 23° 28′. Tel est le phénomène de la précession des équinoxes.

* 88. La théorie de la pesanteur universelle apprend encore que le pôle de l'équateur ne reste pas fixément sur la circonférence du petit cercle qui sert de base au cône dont nous avons parlé précédemment, mais que, outre sa révolution parallèle à l'écliptique, il a encore un mouvement qui l'abaisse et l'élève successivement au-dessous et au-dessus du plan de la base du cône, et qui par conséquent, augmentant et diminuant successivement l'angle moyen 23° 28′ des deux axes, cause les mêmes variations dans l'inclinaison des plans de l'écliptique

---

voient produire, dans les points équinoxiaux, un mouvement rétrograde uniforme; 2.° qu'outre ce mouvement, l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique et le mouvement de ses nœuds devoient produire une nutation dans l'axe, et une petite équation dans la précession, telles à peu près que Bradley les avoit observées. Enfin, dans un mémoire postérieur à celui que nous venons de citer, ce géomètre démontra que les mêmes lois de la précession et de la nutation auroient lieu, quand même les méridiens ne seroient pas semblables. Mais, sans recourir à la lecture de ces mémoires, où l'on aperçoit la marche encore un peu embrouillée des premiers inventeurs, il faut lire ces théories dans la *Mécanique Céleste* de La Place, où cet illustre savant démontre tous ces phénomènes de la manière la plus évidente, en employant toutes les ressources de l'analyse qu'il a lui-même portée à un bien plus haut degré de perfection qu'elle ne l'étoit lorsque d'Alembert écrivoit.

et de l'équateur. Le calcul d'accord avec l'observation, figure les effets de ce mouvement, en supposant que le pôle de l'équateur décrit en 19 ans la circonférence d'une ellipse dont le grand axe est tangent au cercle de latitude, et soutend un arc de la sphère céleste de 20",153, et dont le petit axe est de 15",001. Ce balancement de l'axe est ce que nous avons appelé à l'article 86, *nutation de l'axe*, et ne doit pas être confondu avec les variations de l'obliquité de l'écliptique dont nous avons parlé à l'article 85, et dont les retours sont beaucoup plus éloignés.

89. Puisque le point équinoxial du Bélier rétrograde toutes les années de 50",103, il est évident que le soleil, par son mouvement propre d'occident en orient, le rencontrera plutôt que le point du ciel auquel il correspondoit à son passage précédent par l'équinoxe du printemps. En effet, pour revenir à ce point du ciel, il a fallu qu'il parcourût 360°; et pour revenir au point du Bélier, il n'a qu'à parcourir 359°59'9",897. La durée de la première révolution, c'est-à-dire, de la révolution totale, est de 365j 6h 9m 10s,26, et s'appelle *année sidérale*, comme nous l'avons déjà dit à l'article 82. La durée de la seconde révolution, c'est-à-dire, du passage du soleil au point du Bélier à son retour, s'appelle *année tropique*, et est plus courte que l'année sidérale d'une quantité dont il sera aisé de trouver la valeur, en faisant la proportion l'arc 0°,9856093 de l'écliptique que le soleil parcourt uniformément dans 24 heures, temps moyen, est à 50",103, ou 0°,0139175, arc de l'écliptique que le soleil a encore à parcourir, lorsqu'il est parvenu au point équinoxial du Bélier pour finir sa révolution entière, comme 24 heures est au temps que le soleil doit rester à parcourir ce dernier arc. Le calcul donne ce temps de 20m 20s,04; et le retranchant de l'année sidérale 365j 6h 9m 10s,26, on a la durée de l'année tropique, qui est de 365j 5h 48m 50s,22.

90. L'année civile ne pouvant se composer que d'un nombre entier de jours, on ne la compte que de 365 jours: ce qui s'appelle une *année commune*. Mais à cause que par cette manière de compter, on rend l'année trop courte de 5h 48m 50s,22, ce qui fait au bout de quatre années communes une erreur de 23h 15'm 20s,88, on est convenu de faire la quatrième année de 366 jours, et on l'appelle *année bissextile*. Cette correction qui fut prescrite par Jules César, s'appelle *correction julienne*. L'année 1 de l'ère chrétienne s'étant trouvée la première des années communes, toutes les années bissextiles tombent sur des nombres multiples de 4. Ainsi 1808, 1812, 1816, etc., seront des années bissextiles. Cependant cette intercallation de 4 ans, qui suppose que l'année vraie surpasse l'an-

née commune d'un quart de jour, quoique réellement elle ne la surpasse que de $5^h 48^m 50^s,22$, rend les quatre années trop grandes de $44^m 59^s,12$, erreur qui, au bout de cent ans en donne une de $18^h 36^m 18^s$, qui ne diffère d'un jour que de $5^h 23' 42''$; ce qui engagea le pape Grégoire XIII à rendre la dernière année du siècle, qui devroit être bissextile par l'intercallation de quatre années, commune. Mais cette dernière intercallation séculaire rend les 400 ans trop grands de $21^h 34^m 48^s$; ce qui se corrige en rendant au quatrième siècle sa dernière année bissextile. Il est vrai qu'alors ces quatre siècles sont trop longs de $2^h 25^m 12^s$; ce qui rend les quarante siècles trop longs de $24^h 15^m 20^s$. Donc, faisant la dernière année du quarantième siècle année commune, ces quarante siècles ne seront plus que trop longs de $15^m 20^s$: erreur qui devient insensible dans un si long espace de temps. D'ailleurs, il m'a été aisé de me convaincre qu'une seule différence de $0'',18$, dans l'estime de l'année tropique, donneroit, par le moyen des quatre intepolations précédentes, les quarante siècles civils parfaitement égaux aux quatre mille années tropiques. En effet, représentant par j le jour solaire moyen, et par e l'excès de l'année tropique sur l'année commune de 365 jours, l'année bissextile donnera en plus une erreur, de $j-4e$, qui, au bout de cent ans, deviendra $25j-100e$; et, à cause que cette dernière année du siècle est commune, l'erreur en moins deviendra $j-(25j-100e)$ ou $100e-24j$. Cette erreur au bout de quatre siècles est $400e-96j$. Mais à cause que l'on rend la dernière année de ce quatrième siècle bissextile, l'erreur en plus devient $j-(400e-96j)=97j-400e$, laquelle, au bout de 40 siècles, est $970j-4000e$; donc, en rendant la dernière année du quarantième siècle année commune, l'erreur ne sera plus que $j-(970j-4000e)$ ou $4000e-969j$. Or, pour que cette dernière erreur soit nulle, il faut que l'on ait $4000e-969j=0$; d'où $e=\frac{969j}{4000}=\frac{969\times 24^h}{4000}=\frac{969\times 3^h}{500}$, quantité qui est exactement égale à $5^h 48^m 50^s,4$, et qui ne diffère de celle $5^h 48^m 50^s,22$, que nous avions trouvée, que de 18 centièmes de seconde, différence presqu'insensible, et dont, malgré la perfection des observations astronomiques, il est très-possible que l'année tropique soit plus grande que celle que nous avions considérée comme la vraie.

91. Les étoiles sont sensiblement fixes pour nous, et par conséquent nous les voyons conserver leurs positions respectives dans le ciel. Cette apparente immobilité a donné l'idée aux astronomes de diviser le ciel en un certain nombre de groupes d'étoiles, qu'on appelle *constellations*, et à chacune desquelles on a donné un nom particulier, tiré de la fable, ou tel que le caprice l'a dicté. Il y a douze

de ces constellations, qui se nomment comme les douze signes de l'écliptique, le Bélier, le Taureau, etc. Il paroît même que les signes ont pris les noms des douze constellations en question dans le temps où ces dernières occupoient les mêmes places, il y a 21 ou 22 siècles. Mais depuis ce temps-là, le point équinoxial du printemps ayant rétrogradé vers l'occident d'environ 30 degrés ou un signe, par l'effet de la précession des équinoxes, il se trouve qu'actuellement la constellation du Bélier, au lieu d'être dans le signe du Bélier, est dans celui du Taureau, et successivement de même chacune des douze constellations que coupe l'écliptique, se trouve à un signe plus à l'orient que celui dont elle porte le nom; il est donc bien essentiel de ne pas confondre ces constellations avec les signes dont elles portent les noms.

92. Les marins étant souvent dans le cas d'observer les distances angulaires de la lune à quelque étoile principale de première ou seconde grandeur; il est à propos qu'ils cherchent à les bien connoître, et à se familiariser avec leurs positions dans le ciel. Pour y parvenir, je ne leur conseillerai pas la méthode des alignemens indiquée par M. Delalande dans son Astronomie, parce que cette méthode enchaîne la connoissance des constellations, de manière que, pour en connoître une seule, il faut connoître toutes les précédentes depuis la *Grande Ourse*, ce qui est inutile aux marins. Mais on pourra reconnoître à la simple vue les étoiles en question, telles que *Antarès*, *Fomalhaut*, *Aldebaran* etc., en calculant, par les méthodes que nous enseignerons bientôt, l'heure où elles passent au méridien, et leur hauteur dans cet instant; on les observera bien dans ce moment-là, ainsi que la manière dont se groupent les étoiles environnantes. Quelques jours d'observations semblables suffiront pour qu'on puisse reconnoître aisément ces étoiles dans tout autre point du ciel que celui qui est au méridien. C'est de cette méthode dont je me servois lorsque j'étois officier de marine, et je m'en suis très-bien trouvé, parce qu'elle m'a économisé beaucoup du temps que j'aurois été obligé d'employer, si je m'étois servi de la méthode des alignemens qui est la meilleure possible pour les astronomes de profession, lesquels doivent acquérir une connoissance parfaite de la voûte céleste.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Manière de déterminer la position des Astres à l'égard de l'équateur et de l'écliptique.

93. L'APHÉLIE de la terre est le point de l'orbite de la terre où cette planète se trouve le plus éloignée du soleil, et le *périhélie* est le point apposé de l'orbite. Ainsi, ces deux points qu'on appelle généralement *apsides*, se trouvent aux extrémités du grand axe de l'orbite terrestre. Cet axe, ou *ligne des apsides*, a un mouvement de révolution autour du soleil qui se fait d'occident en orient, et dont la durée est d'environ 20853 ans; de manière que dans ce temps-là, l'aphélie ou apside supérieure parcourt les 360° de longitude. Sa longitude étoit en 1806 de 99° 35′ 16″, et sa plus grande variation annuelle est de 62″, 1.

Ces dénominations et ce mouvement de la ligne des apsides, ont également lieu pour les autres planètes.

Rapportant toujours le mouvement réel de la terre au soleil, nous considérerons ce dernier astre comme décrivant tous les ans une orbite elliptique autour de la terre, que nous supposerons placée à l'un des deux foyers de cette ellipse, hypothèse qui, comme nous l'avons déjà démontré à l'article 76, ne nuit en rien aux apparences astronomiques relatives au soleil et à la terre.

Le point de l'orbite solaire le plus éloigné de la terre, c'est-à-dire, l'extrémité du grand axe de cette orbite apparente du soleil, la plus éloignée du foyer que paroît occuper la terre, s'appelle *apogée*; l'autre extrémité de l'axe principal qui, conséquemment, est la plus voisine de la terre, s'appelle *perigée*. Ainsi, le soleil est à l'apogée, lorsque la terre est véritablement à son aphélie; et le soleil est au perigée, lorsque la terre est réellement à son périhélie.

94. On appelle généralement *anomalie* la distance d'une planète à son aphélie. Mais on distingue trois sortes d'anomalies, savoir 1.° l'*anomalie vraie* qui est l'angle formé au foyer de l'ellipse, centre des mouvemens, par la ligne des apsides, et le rayon vecteur qui, partant de ce foyer aboutit au centre de la

planète, cet angle étant compté depuis l'aphélie. Ainsi, pour le soleil, l'anomalie vraie est l'angle formé par le demi-grand axe de son orbite apparente, et le rayon vecteur qui aboutit au centre de cet astre; donc l'anomalie vraie du soleil est la différence des longitudes vraies du soleil et de l'apogée. 2.° L'*anomalie excentrique*, qui est l'angle formé au centre de l'orbite par la ligne des apsides, et le rayon du cercle circonscrit à cette ellipse qui aboutit au même point de la circonférence de ce cercle que celui où l'ordonnée à l'orbite qui passe par le centre du soleil, rencontre cette circonférence. 3.° Enfin, l'*anomalie moyenne*, qui est l'angle formé au centre du cercle circonscrit à l'ellipse par la ligne des apsides, et par le rayon du cercle en question qui, tournant d'un mouvement uniforme autour du centre, décriroit tout le cercle dans le temps que la planète feroit sa révolution entière. Ainsi, les accroissemens de l'anomalie moyenne sont proportionnels aux temps.

C'est par le moyen de l'anomalie moyenne qu'on trouve l'anomalie vraie. J'ai traité cette matière avec beaucoup de détails à la neuvième note, où j'ai donné une nouvelle formule très-simple pour conclure, de l'anomalie moyenne, la vraie.

95. Connoissant la longitude moyenne du soleil, et la longitude de l'apogée de cet astre à une époque quelconque, par exemple, pour minuit du premier janvier de l'année pour laquelle on calcule; on aura la longitude moyenne du soleil et la longitude de l'apogée du même astre pour une autre époque quelconque, puisque les longitudes en question croissent proportionnellement aux temps, et que l'on connoît la variation diurne de la première 0, 9856093 (art. 82), et la variation annuelle de la seconde 62″, 1 (art. 95). Prenant la différence de ces longitudes à l'époque déterminée, on aura l'anomalie moyenne, puisque, si de l'angle formé au centre de l'orbe elliptique par le rayon du cercle circonscrit qui aboutit au point du Bélier, et par le rayon du même cercle qui le parcourt uniformément dans l'année tropique, on retranche l'angle formé par le premier de ces deux rayons et par celui qui aboutit à l'apogée; il est clair qu'on aura pour reste, l'angle formé par le dernier de ces rayons et par celui qui s'est éloigné uniformément de l'apogée, c'est-à-dire, l'angle de l'anomalie moyenne. Si la longitude moyenne du soleil étoit moindre que la longitude vraie de l'apogée, on ajouteroit à la première 360°.

Ayant l'anomalie moyenne, la formule (7) de la note VIII donnera l'anomalie vraie. Mais, de même que nous l'avons démontré pour l'anomalie moyenne, on aura la vraie qui sera égale à l'excès de la longitude vraie (augmentée de 360° si

c'est nécessaire) sur la longitude de l'apogée. Donc, représentant par ☉ le soleil, on aura :

Long. vraie ☉ = anomalie vraie ☉ + longit. apogée. . . . . (7);

et de là on conclura 1.° l'ascension droite du soleil par le moyen de l'équation

tang. ascension droite ☉ = cos. obliq. éclip. × tang. long. vr. ☉. . . (8).

2.° La déclinaison du même astre par le moyen de l'équation

sin. déclin. ☉ = sin. obliq. éclip. × sin. long. vr. ☉. . . . . (9).

96. Si la planète que nous habitons étoit le seul astre circulant autour du soleil; ou si les autres planètes de notre système planétaire étoient aussi distantes du soleil qu'Uranus, et n'étoient pas plus grosses que cette dernière planète; ou si étant aussi près que Mercure, Cérès, Pallas, Vesta et Junon, elles étoient aussi petites que ces quatre dernières planètes, alors les mouvemens de la terre autour du soleil s'effectueroient librement, et les méthodes précédentes suffiroient pour déterminer le lieu du soleil à une époque quelconque. Mais les planètes Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et même Saturne, ainsi que leurs satellites, pesant plus ou moins les unes vers les autres suivant la loi générale de la nature, *les pesanteurs sont en raison inverse du carré des distances et en raison directe des masses;* il est clair que cette loi qui feroit parcourir à chacune des planètes une ellipse régulière autour du soleil si elle étoit isolée, trouble cette marche régulière, lorsqu'elle agit sur tous les corps de notre système planétaire qui ne sont pas hors des limites de son influence. Cette altération dans les mouvemens des planètes et satellites que nous venons de citer, et à laquelle chacun de ces corps influe, s'appelle *perturbation*. Cependant, quelque compliqués que soient tous ces mouvemens, le célèbre auteur de la *Mécanique Céleste* a su, par une savante analyse, les soumettre au calcul. Enfin Delambre et Burg se servant des formules de La Place, de celles qu'ils ont trouvées eux-mêmes et de leurs observations astronomiques, ont construit les tables du soleil et de la lune qui viennent de paroître, et qui sont un des plus utiles et beaux résultats des travaux des géomètres. Je regrette de ne pouvoir joindre à ce traité de navigation une partie assez considérable de ces tables, pour qu'elle fût utile à ceux des navigateurs qui, après une longue campagne se voyant privés de *Connoissance des temps*, voudroient calculer les lieux du soleil et de la lune à une époque quelconque (*). Mais je

(*) Ce n'est qu'en ayant des tables qui donnent exactement la latitude de la lune, et les longitudes

conseille à ceux qui partent pour un voyage de long cours sur mer, de se pourvoir de l'ouvrage que je viens de citer ; dont peut-être ils ne seront pas dans le cas de se servir ; et qui, cependant, peut leur être si utile dans les circonstances mentionnées précédemment.

97. Connoissant l'ascension droite du soleil (éq. 8), on aura aisément celle d'une étoile par l'observation. En effet, observant la différence des temps entre le passage des deux astres au méridien, et convertissant ce temps en degrés à raison de 15° 2′ 27″, 8 par heure moyenne solaire, ou heure marquée par une horloge réglée sur le moyen mouvement du soleil ; on aura la différence en ascension droite des deux astres, et par conséquent celle de l'étoile, puisque par hypothèse on connoît celle du soleil (*).

De même l'ascension droite d'une seule étoile bien remarquable, et que l'on puisse observer en plein jour, telle que la *Lyre*, ou *Sirius*, servira à trouver l'ascension droite de toute autre étoile, en comparant les temps du passage au méridien de l'étoile dont l'ascension droite est connue, et de toute autre étoile dont on voudra connoître l'ascension droite.

On trouve dans la *Connoissance des temps* de toutes les années une table des ascensions droites des principales étoiles, avec leurs variations annuelles.

Fig. 15. 98. On pourra aussi trouver, par l'observation, la déclinaison des étoiles. En effet, soit P le pôle élevé du lieu de l'observation, HTO l'horizon de l'observateur, HZPO son demi-méridien visible, ♈ QB ♎ l'équateur, E′ une étoile à l'instant de son passage au méridien : on en observera la hauteur E′H, d'où l'on retranchera le complément QH de la latitude ZQ de l'observateur, si ce complément est plus petit que la hauteur ; ce qui donnera la déclinaison E′Q de l'étoile. Mais si l'astre est en E″, au-dessous de l'équateur, c'est-à-dire, si sa hauteur E″H est plus petite que le complément QH de la latitude de l'observateur ;

---

de ce dernier astre et du soleil, que l'on pourra avoir avec une exactitude suffisante la distance de ces deux astres, à une époque où on l'aura observée, pour en déduire la longitude du vaisseau, ainsi que nous le verrons dans la suite. On ne peut donc se permettre de donner pour l'usage des marins des tables abrégées qui, conséquemment, n'auroient pas l'exactitude suffisante ; mais, en les donnant entières, elles occuperoient un trop grand espace dans un ouvrage tel que celui-ci.

(*) Les astronomes ont d'autres méthodes plus sûres et plus commodes pour observer l'ascension droite des étoiles (remarque qui m'a été communiquée par M. Delambre); mais à cause que celle-ci se lie assez avec la théorie précédente, et que je parle à des marins qui, assez ordinairement ne sont pas dans le cas de faire de pareilles observations, je n'ai pas cru devoir la supprimer.

alors, retranchant le premier de ces deux arcs du second, on aura la différence $E''Q$, qui sera la déclinaison demandée de l'étoile. Fig. 15.

Mais si l'étoile passoit au point E''' dans le quart du méridien qui coupe le pôle élevé P; alors, pour avoir la déclinaison, il faudroit ajouter à la hauteur $E'''O$ de l'astre, le complément OD♎ de la latitude du lieu de l'observation.

C'est par cette méthode d'observation que l'on a formé la table des déclinaisons des principales étoiles, qui se trouvent dans la *Connoissance des temps* de chaque année. Mais ces déclinaisons variant à cause de la précession des équinoxes, on a marqué dans la même table dont nous venons de parler, les variations annuelles des déclinaisons de ces astres.

Les longitudes et latitudes des astres se déduisent aisément par le calcul des ascensions droites et déclinaisons de ces mêmes astres. C'est ce que nous allons démontrer dans les deux articles suivans.

99. Soit toujours ♈QBD♎ l'équateur céleste, ♈CNEI♎ l'écliptique, P le pôle élevé du premier de ces grands cercles, ϖ celui de l'écliptique, A un astre quelconque, PAB son cercle de déclinaison, ϖAE son cercle de latitude.

Faisons l = la latitude AE de l'astre:
δ = sa déclinaison AB.
λ = sa longitude ♈E.
a = son ascension droite ♈B.
ω = l'obliquité B♈E de l'écliptique.

Cela posé, remarquons, 1.° que dans le triangle sphérique ϖPA, on a l'arc ϖP, qui appartenant au colure des solstices, et mesurant la distance des pôles P et ϖ de l'équateur et de l'écliptique, sera aussi la mesure de l'inclinaison B♈E de l'écliptique; donc $P\varpi = \omega$. 2.° $PA = 90° \mp \delta$, le signe supérieur lorsque la déclinaison est de même dénomination que le pôle élevé; le signe inférieur dans le cas contraire. 3.° $\varpi A = 90° \mp l$; le signe supérieur lorsque la latitude est de même dénomination que le pôle élevé de l'écliptique, l'inférieur dans le cas contraire. 4.° L'ascension droite de l'arc $P\varpi$ du demi-colure des solstices qui passe par le solstice d'hiver, est évidemment de 270°; donc l'angle ϖPB se composera de l'angle ϖP♈, qui est de $90° +$ l'angle ♈PB, qui est l'ascension droite de l'étoile. Ainsi, ϖPB ou $\varpi PA = 90° + a$. 5.° La longitude de l'arc ϖP du demi-colure des solstices qui passe par le solstice d'été étant évidemment de trois signes ou 90 degrés, l'angle $P\varpi A$ est $= 90° \backsim \lambda$. 6.° L'angle PAϖ formé au centre de l'astre par les arcs AP, Aϖ des cercles de latitude et de déclinaison, s'appelle *angle de position*.

Le triangle sphérique que nous venons de considérer, donnant l'équation

Fig. 15. $$\cos. A\varpi = \cos. AP \cos. P\varpi + \sin. AP \sin. P\varpi \cos. AP\varpi,$$

On aura, en substituant les valeurs respectives des parties qui la composent, l'équation

$$\sin. l = \pm \sin. \delta \cos. \omega - \cos. \delta \sin. \omega \sin. a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (10).$$

Afin de soumettre cette formule au calcul logarithmique, faisons

$$\cot. M = \cot. \delta \sin. a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (11);$$

D'où $\sin. a = \frac{\cos. M \sin. \delta}{\sin. M \cos. \delta}$; et substituant cette valeur dans l'équation (10), on aura $\sin. l = \pm \left(\sin. \delta \cos. \omega \mp \frac{\sin. \delta \cos. M \sin. \omega}{\sin. M}\right) = \pm \frac{\sin. \delta}{\sin. M}(\sin. M \cos. \omega \mp$ $\cos. M \sin. \omega)$, et enfin

$$\sin. l = \pm \sin. \delta \frac{\sin. (M \mp \omega)}{\sin. M} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (12).$$

Les signes supérieurs lorsque δ est de même dénomination que le pôle élevé, qui est celui que l'on considère comme le sommet du triangle ; les signes inférieurs dans le cas contraire.

100. Le même triangle sphérique $AP\varpi$ donne l'équation

$$\cot. P\varpi A = \frac{\cot. AP \sin. \varpi P - \cos. AP\varpi \cos. \varpi P}{\sin. AP\varpi};$$

mais $\cot. P\varpi A = \cot. (90° \backsim \lambda) = \pm \text{tang}. \lambda$, $\cot. AP = \cot. (90° \mp \delta) = \pm \text{tang}. \delta$, $\sin. \varpi P = \sin. \omega$, $\cos. \varpi P = \cos. \omega$, $\cos. AP\varpi = \cos. (90° + a) = -\sin. a$, et $\sin. AP\varpi$ $= \sin. (90° + a) = \cos. a$; donc l'équation précédente se réduira à celle

$$\text{tang}. \lambda = \pm \frac{\text{tang}. \delta \sin. \omega + \sin. a \cos. \omega}{\cos. a} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (13).$$

Afin de réduire le calcul de cette formule à celui purement logarithmique, faisons

$$\text{tang}. M = \sin. a \cot. \delta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (14);$$

D'où $\sin. a = \frac{\sin. M \sin. \delta}{\cos. M \cos. \delta}$; et substituant cette valeur dans l'équation (13), on aura

$$\text{tang}. \lambda = \pm \frac{\text{tang}. \delta \sin. (\omega \pm M)}{\cos. M \cos. a} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (15).$$

101. L'on fait usage de l'angle de position $PA\varpi$ dans les calculs des éclipses;

or ; il nous sera fort aisé de trouver sa valeur, en observant que le même triangle sphérique PAϖ nous donne l'équation

Fig. 15.

$$\cot. PA\varpi = \frac{\cot. P\varpi \sin. AP - \cos. AP\varpi \cos. AP}{\sin. AP\varpi};$$

ou, représentant par A l'angle de position PAϖ, on aura l'équation

$$\cot. A = \frac{\cot. \omega \cos. \delta \pm \sin. a \sin. \delta}{\cos. a} \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

dont le calcul peut se réduire à celui purement logarithmique, en faisant

$$\text{tang. } M = \sin. a \text{ tang. } \delta. \ldots \ldots \ldots \quad (17),$$

d'où $\sin. a = \frac{\sin. M \cos. \delta}{\cos. M \sin. \delta}$; et substituant cette valeur dans l'équation (16), on a $\cot. A = \frac{\cot. \omega \cos. \delta \pm \frac{\sin. M \cos. \delta}{\cos. M}}{\cos a} = \frac{\cos. \delta}{\cos. a \cos. M \sin. \omega} (\cos. M \cos. \omega \pm \sin. M \sin. \omega) = \frac{\cos. \delta \cos. (M \mp \omega)}{\cos. a \cos. M \sin \omega}$; et enfin

$$\text{tang. } A = \frac{\cos. a \cos. M \sin. \omega}{\cos. \delta \cos. (M \mp \omega)} \ldots \ldots \ldots \quad (18);$$

Le signe supérieur ou inférieur dans le même cas que dans les équations des deux paragraphes précédens.

102. Remarque. On pourra, pour simplifier, ne prendre toutes les formules précédentes, depuis celle (10) inclusivement, qu'avec les signes supérieurs, en prenant toujours pour sommet du triangle APϖ, le pôle de même dénomination que la déclinaison de l'étoile, soit que ce pôle soit le pôle élevé ou l'abaissé par rapport à l'observateur ; ce qui rendra toujours la distance du pôle à l'astre $< 90°$.

103. Lorsque l'astre pour lequel on calcule est le soleil ; alors on a $l = 0$, puisque le soleil est toujours sur l'écliptique ; donc le triangle ϖPA ayant alors son côté opposé ϖA de 90°, est rectilatère, et donne l'équation $\cos. P\omega A = \frac{\cos. PA}{\sin. \omega}$; donc

$$\sin. \lambda = \frac{\sin. \delta}{\sin. \omega} \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

104. Nous avons dit à l'article 98 que les déclinaisons des astres peuvent se trouver par l'observation de leurs hauteurs au-dessus de l'horizon, ou de leurs distances au zénith dans l'instant qu'ils passent au méridien. Mais nous avons

considéré la hauteur qui est combinée avec la latitude de l'observateur pour en déduire la déclinaison, comme étant la vraie hauteur de l'astre, et non point celle donnée immédiatement par l'observation, laquelle en diffère assez essentiellement, surtout pour la lune, le soleil, Mercure et Vénus, ainsi que nous le verrons dans le chapitre suivant, où nous ferons connoître, en même temps, les moyens de déduire de la hauteur observée, la vraie. Cet objet est d'une si grande importance dans tout ce qui nous reste à dire, que nous croyons ne pas devoir différer d'en parler.

CHAPITRE CINQUIÈME.

Premières notions sur la manière dont se font à terre et à la mer les Observations des hauteurs des Astres. De la dépression de l'Horizon, des Diamètres apparens, des Parallaxes et Réfractions des Astres. Enfin des corrections qu'il faut faire éprouver aux hauteurs observées des Astres, pour avoir leurs hauteurs apparentes, ensuite leurs hauteurs vraies.

105. Les astronomes placés dans l'intérieur des terres, ne peuvent observer d'une manière commode et exacte la hauteur directe des astres au-dessus de l'horizon; car, premièrement, cet horizon n'est pas circulaire, puisqu'il est terminé par des collines, maisons, bois, etc., ce qui le rend très-irrégulier. 2.° Il faudroit pour que les observations fussent exactes, que le centre de l'instrument fût dans le plan de cet horizon, ou que l'on ramenât le résultat de l'observation à cette hypothèse par certains calculs de réductions. Il est donc beaucoup plus simple et commode pour les observateurs placés à terre, de conclure la hauteur vraie d'un astre, par la mesure de la distance de ce dernier au zénith; c'est ce qu'ils obtiennent en se servant d'un quart de cercle placé verticalement, et ne pouvant tourner autour de son centre que dans le sens vertical. Cet instrument divisé en degrés, minutes et secondes, porte à son centre un fil à plomb qui, conséquemment, est toujours dans la direction de la ligne *zénith-et-nadir* ou *verticale*. Ainsi, lorsque ce fil correspond à 90° du quart de cercle, alors le rayon de cet instrument qui répond à zéro étant perpendiculaire à la verticale, se trouve

dans la vraie position horizontale; ce dernier rayon est garni d'une lunette dont l'oculaire est du côté de la circonférence du quart de cercle; ainsi, plaçant l'instrument dans le plan du vertical de l'astre, et le faisant tourner autour de son centre, en abaissant le rayon primitivement horizontal, jusqu'à ce que l'astre soit dans le champ de la lunette, ou que du moins l'un de ses bords, lorsque l'astre observé est le soleil ou la lune ou une planète, soit tangent à un fil très-mince traversant l'objectif dans le sens horizontal, et passant exactement par le point zéro de l'instrument. Il est évident que par cette opération, l'angle formé par le fil à plomb et le rayon du cercle qui passe par zéro sera égal à la distance angulaire de l'astre au zénith, et que, conséquemment, la hauteur observée de l'astre sera le complément de cet angle, ou l'angle formé par le fil à plomb et le rayon du quart de cercle qui passe par 90°. Donc, si l'on forme sur le limbe deux graduations en sens contraire, c'est-à-dire, telles que partant d'une même extrémité du limbe, l'une aille en croissant depuis zéro degré, jusqu'à 90°, et l'autre aille en décroissant depuis 90° jusqu'à zéro; le fil à plomb indiquera tout de suite la hauteur observée de l'astre, et sa distance angulaire au zénith.

Les observatoires terrestres sont encore munis d'un grand quart de cercle, tel que celui dont nous venons de parler, mais dont le plan est fixement dans celui du méridien du lieu de l'observation. Cet instrument sert à observer le passage des astres au méridien et leur hauteur dans cet instant. C'est donc avec cet instrument que l'on doit observer la déclinaison des astres (art. 98).

L'observation avec le fil à plomb est la meilleure lorsqu'on peut s'en servir; mais elle exige une grande immobilité dans le lieu où l'on observe; ce qui la rend inutile sur les vaisseaux. Mais le marin observateur, placé sur un navire hors de la vue de toute terre, ayant la mer pour horizon, et par conséquent ce dernier étant d'une forme parfaitement circulaire et unie, il peut observer directement la hauteur des astres au-dessus de l'horizon. Les marins se servent pour faire ces observations de certains instrumens dont nous détaillerons la construction et l'usage au chapitre I du livre III. Il nous suffit de savoir, pour le moment, que ces instrumens beaucoup plus petits que ceux dont nous avons parlé précédemment, se tiennent dans les mains, et donnent assez exactement une hauteur angulaire de l'astre au-dessus de l'horizon, qui ne diffère de la vraie, non par la faute des instrumens d'observations, mais par les causes que nous allons exposer.

106. Si l'œil de l'observateur étoit précisément placé à la surface de la terre, par exemple, au point B, alors son horizon visible seroit BH, et seroit en con- Fig. 16.

tact avec la surface de la terre au même point B où nous supposons l'œil de l'observateur; ainsi la hauteur de l'astre A seroit mesurée par l'angle ABH. Mais l'observateur étant sur le pont du navire, son œil est élevé au-dessus du niveau de la mer d'une quantité que je suppose être BE; donc son horizon visible n'est plus le vrai horizon BH, mais celui EKI qui, s'abaissant au-dessous du vrai, va toucher la terre en un point K. Donc, la hauteur observée de l'astre sera mesurée par l'angle AEI plus grand que celui ABH, ou que celui AED qui est sensiblement égal à l'angle ABH (*) d'une quantité DEI; donc, l'erreur causée par *l'abaissement* de l'horizon visible au-dessus du vrai horizon sensible, ou *l'inclinaison* de l'horizon, est mesurée par l'angle DEI. Or, nous remarquerons que la droite horizontale ED étant perpendiculaire à la verticale CE, et le rayon CK de la terre aboutissant au point du contact K de l'horizon visible EI avec la surface de la terre, que l'on peut, sans erreur sensible, considérer comme étant de figure sphérique, les deux angles DEC et CKE seront droits. Donc, l'angle KEC est complément des deux angles DEI et ECK. Ainsi, ce dernier angle mesure l'inclinaison de l'horizon, et il sera fort aisé d'évaluer cette erreur lorsqu'on connoîtra *l'élévation* EB de l'œil au-dessus de la mer, puisque le triangle rectangle EKC donne l'équation cos. $ECK = \frac{KC}{EC}$: donc, représentant

Fig. 16.

(*) En effet, l'angle ABH ne surpasse en grandeur celui AED que de l'angle EAB; mais dans le triangle rectiligne AEB on a $\frac{\sin. AEB}{AB} = \frac{\sin. EAB}{EB}$, d'où sin. $EAB = \frac{EB \sin. AEB}{AB}$; et pour avoir la plus grande valeur de l'angle que nous avons négligé, supposant l'astre en D, de manière que le rayon visuel ED forme, avec la verticale EBC, un angle droit; on aura sin. $EBD = \frac{EB}{BD}$. Or, l'une des plus hautes montagnes connues, qui est le *Chimboraço*, au Pérou, n'a que 6270 mètres de hauteur, et le rayon de la terre a 6366203 mètres de longueur (*voyez* le renvoi suivant). Donc, faisant ce rayon $= 1$, on aura $EB < 0{,}001$; cependant, supposons $EB = 0{,}001$; et de plus, supposons que l'astre observé en D est la lune périgée, ce qui donne la plus petite valeur possible de BD, d'environ 56 rayons de la terre: on aura donc dans le cas le plus défavorable possible, sin. $EDB = \frac{0{,}001}{56} = 0{,}000017845$, d'où angle $EDB = 3'',7$. Qu'on juge maintenant ce que devient cette erreur, lorsque l'on ne considère que des élévations qui n'excèdent pas 100 mètres et qui, par conséquent, étant au moins 62 fois plus petite que celle que nous avons considérée précédemment, ne donneroit de différence entre les deux angles ABH, AED qu'environ $0'',07$, lorsque l'astre observé est la lune périgée et vers l'horizon; mais si l'astre observé est tout autre que notre satellite, cette différence n'est plus qu'une fraction extrêmement petite de la *seconde*, que l'on peut regarder comme absolument nulle.

par i l'inclinaison DEI ou ECK de l'horizon visible : par r le rayon CK de la terre qui est sensiblement de 6366203 mètres(*), nous aurons l'équation Fig. 16.

$$\cos. i = \frac{r}{r+e} \dots\dots (20).$$

Substituant à la place de cos. i sa valeur en fonctions de l'arc i, et développant le second membre en série, on aura $1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2.3.4} - \frac{i^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.} = 1 - \frac{e}{r} + \frac{e^2}{r^2} - \frac{e^3}{r^3} + \text{etc.}$, ou $\frac{i^2}{2} - \frac{i^4}{2.3.4} + \frac{i^6}{2.3.4.5.6} - \text{etc.} = \frac{e}{r} - \frac{e^2}{r^2} + \frac{e^3}{r^3} - \text{etc.} \dots (\delta)$ Or, à cause que l'élévation e de l'œil au-dessus du niveau de la mer, que nous appellerons désormais simplement *élévation*, est une quantité fort petite en comparaison du rayon r de la terre, il s'ensuit 1.° que la fraction $\frac{r}{r+e}$ diffère fort peu de l'unité, et que conséquemment i est un très-petit angle (éq. 20); 2.° que la fraction $\frac{e}{r}$ est très-petite. Donc on pourra, sans crainte de commettre une erreur sensible, négliger dans le premier membre de l'équation précédente tous les termes affectés des puissances de i supérieures à la seconde, et dans le second tous les termes affectés des puissances de la fraction $\frac{e}{r}$ supérieures à la première; on aura donc simplement $\frac{i^2}{2} = \frac{e}{r}$, d'où

$$i = \sqrt{\frac{2e}{r}} \dots\dots (21)\ (^{**}).$$

(*) Nous avons vu à la note 1, que le mètre est la dix millionième partie de la longueur absolue du quart du méridien terrestre. Donc, considérant la terre comme de figure sphérique, et, par conséquent, le méridien comme un grand cercle de la sphère terrestre, on aura le rayon de cette sphère $= \frac{20000000}{3{,}14159265} = 6366203$ mètres.

(**) Pour apprécier d'une manière sensiblement exacte, l'erreur que l'on commet en se servant de la formule (21) à la place de celle $\cos. i = \frac{r}{r+e}$ (éq. 20), ou $\cos. i = 1 - \frac{e}{r} + \left(\frac{e}{r}\right)^2 - \text{etc.}$, observons, en premier lieu, que négligeant les secondes, troisièmes, etc., puissances de la fraction $\frac{e}{r}$, et représentant par [cos. i] ce que devient alors cos. i, on a $[\cos. i] = \frac{r-e}{r}$; donc $\cos. i - [\cos i]$, ou $-d \cos. i = \frac{r}{r+e} - \frac{r-e}{r} = \frac{e^2}{r(r+e)}$; et effectuant la différenciation dans le premier membre, enfin, divisant les deux membres par sin. i, on aura $di = \frac{e^2}{r(r+e)\sin. i}$. Mais de l'équation $\cos. i = \frac{r}{r+e}$, on tire $\sin. i = \frac{\sqrt{2er+e^2}}{r+e}$; donc $di = \frac{e^2}{r\sqrt{2er+e^2}} \dots\dots (A)$

Ainsi, par cette omission de $\left(\frac{e}{r}\right)^2 - \left(\frac{e}{r}\right)^3 + \text{etc.}$, on a rendu l'arc i trop grand de la quantité représentée par le second membre de l'équation (A).

Représentant par I l'inclinaison qui répond à une autre élévation E, on aura de même $I = \sqrt{\frac{2E}{r}}$; donc $i : I :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$. D'où l'on conclura que *les inclinaisons des horizons sont sensiblement comme les racines carrées des élévations.* Soit donc E l'unité d'élévation, par exemple, un mètre, et I l'inclinaison correspondante; on aura généralement

$$i = I\sqrt{e}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Commençons donc à calculer I avec une approximation d'un dixième de seconde, afin que lorsque nous ferons $e = 100^{\text{mèt.}}$, ce qui donnera $i = 10I$, nous ayons i à moins d'une seconde près. Or, $I = \sqrt{\frac{2}{r}} = \frac{1}{\sqrt{3183102}}$, ou, afin d'avoir I en secondes, multipliant le second membre par 206264″,8, qui est la valeur du rayon du cercle en parties de la circonférence, nous aurons $I = \frac{206264'',8}{\sqrt{3183102}}$

Mais en omettant de plus dans l'équation (d) les puissances de i supérieures à la seconde, ce n'est pas cos. i que nous avons fait $= \frac{r-e}{r}$, mais seulement $1 - \frac{i^2}{2}$ que nous avons égalé à $\frac{r-e}{r}$; donc représentant par p ce qu'est $\frac{r-e}{r}$ lorsque l'on n'omet rien, c'est-à-dire faisant $p = 1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2.3.4} - \text{etc.}$; et représentant par p' ce que devient $\frac{r-e}{r}$ lorsque l'on ne conserve que les deux premiers termes $1 - \frac{i^2}{2}$ de la série, on aura $p' - p$, ou $dp = -\frac{i^4}{2.3.4} + \frac{i^6}{2.3.4.5.6} - \text{etc.}$, ou simplement, $dp = -\frac{i^4}{2.3.4}$. Or, de la suite $p = 1 - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{2.3.4}i^4 - \text{etc.}$, ou $p - 1 = -\frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{2.3.4}i^4 - \text{etc.}$, on tire par la méthode du retour des suites $i^2 = -2(p-1) + \frac{1}{3}(p-1)^2 + \frac{1}{3.4.5.6}(p-1)^3 + \text{etc}$; ou négligeant ce dernier terme qui n'est que $\frac{-1}{360}\frac{e^3}{r^3}$, et par conséquent les suivans, on aura $i^2 = 2(1-p) + \frac{1}{3}(1-p)^2$; et différenciant, il viendra $idi = -dp - \frac{1}{3}(1-p)dp = -dp[1 + \frac{1}{3}(1-p)]$. Substituant dans cette équation la valeur de $dp \left(= -\frac{i^4}{2.3.4}\right)$, et divisant par i, on a $di = \frac{i^3}{2.3.4} \times \left(1 + \frac{1}{3}\frac{e}{r}\right)$, quantité presque nulle, même dans les cas les plus défavorables à l'exactitude du calcul de la formule (21). En effet, représentant par 1 le rayon de la terre, et faisant $e = 0,001$, ce qui est une grandeur fort exagérée, afin de prendre le cas le plus défavorable possible; on aura cos. $i = \frac{1}{1,001}$ (éq. 20), d'où $i = 2°33'41'' = 0,0447047$ et $i^3 = 0,0000893428$; substituant cette valeur de i^3 dans l'équation $di = \frac{i^3}{2.3.4}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{e}{r}\right)$; on a $di = \frac{0,0000893428}{24} \times \frac{3001}{3000} = 0,00003724$, quantité plus petite qu'une seconde. Pour 100 mètres d'élévation, on trouveroit di à peu près égal à 0″,000003; ainsi l'on peut, sans crainte de la moindre erreur, négliger cette correction. Quant à celle exprimée par l'équation (A), elle est un peu plus grande; cependant, on peut

$=1' 55'', 6$. Avec cette valeur de l'inclinaison I pour un mètre d'élévation, il nous a été aisé de calculer la table IV, en employant la seule équation (22).

L'inclinaison de l'horizon faisant toujours paroître l'astre plus haut qu'il n'est réellement, cette correction est toujours soustractive.

De l'équation (20) on tire $e = \frac{r}{\cos. i} - r = \frac{2r \sin^2 \frac{1}{2} i}{\cos. i} = \frac{r \sin. \frac{1}{2} i}{\cos. i} \times 2 \sin. \frac{1}{2} i$; mais $\sin. i = 2 \sin. \frac{1}{2} i \cos. \frac{1}{2} i$; d'où $2 \sin. \frac{1}{2} i = \frac{\sin. i}{\cos. \frac{1}{2} i}$; donc $e = \frac{r \sin. \frac{1}{2} i \sin. i}{\cos. i \cos. \frac{1}{2} i}$, ou

$$e = r \operatorname{tang}. \tfrac{1}{2} i \operatorname{tang}. i. \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

107. On appelle *diamètre apparent*, ou simplement *diamètre* d'un astre, l'angle sous lequel il nous paroît exprimé en parties graduelles de la circonférence du cercle. Le *diamètre réel* de l'astre est, ainsi que nous l'avons déjà dit, la vraie longueur de la droite qui, passant par le centre de l'astre, se termine à sa surface.

---

de même la négliger dans les cas ordinaires, sans crainte de nuire à l'exactitude que l'on veut obtenir. En effet, supposant toujours $r = 1$ et $e = 0,001$, on a dans cette hypothèse, qui est hors des lois connues de la nature, l'équation (A), qui devient $di = \frac{0,000001}{\sqrt{0,002001}} = 0,000022355 = 4'', 611$. Pour 100 mètres d'élévation on auroit $di = 0'',053$, quantité si petite, que l'on peut sans crainte la négliger. Il est à propos de remarquer que la première correction est soustractive, et que la seconde est additive; car, faisant $\cos. i = \frac{r-e}{r}$, on a rendu $\cos. i$ plus petit, puisque $\frac{r-e}{r} < \frac{r}{r+e}$; donc on a pris i trop grand, donc la première correction est soustractive; quant à la seconde, elle est additive : car, ne négligeant pas le troisième terme $\frac{i^4}{2.3.4}$ dans l'équation $1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2.3.4} = \frac{r-e}{r}$, et résolvant cette équation par rapport à i^2, on a $i^2 = 6 - \sqrt{36 - \frac{24e}{r}}$; mais négligeant le troisième terme de l'équation précédente, on a $1 - \frac{i^2}{2} = \frac{r-e}{r}$, d'où $i^2 = \frac{2e}{r}$. Or, il est évident que $6 - \sqrt{36 - \frac{24e}{r}} > \frac{2e}{r}$, ou $6 - \frac{2e}{r} > \sqrt{36 - \frac{24e}{r}}$; ou, en carrant, $36 - \frac{24e}{r} + \frac{4e^2}{r^2} > 36 - \frac{24e}{r}$, ou enfin $\frac{4e^2}{r} > 0$; donc la seconde correction est additive. Dans l'exemple précédent où nous avons supposé $e = 0,001$, nous avons eu la première correction, résultante de l'équation (A), $= 4'', 611$; et la seconde correction, résultante de l'équation $di = \frac{i^3}{2.3.4}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{e}{r}\right)$, $= 0'',7681$; mais l'angle i calculé par le moyen de la formule $i = \sqrt{\frac{2e}{r}}$, donne $i = 2° 33' 44'', 44$, donc la vraie valeur de i, à un centième près de seconde, est $2° 33' 44'', 44 - 4'', 61 + 0'', 77 = 2° 33' 40'', 6$. Or, en calculant l'angle i par le moyen de la formule $\cos. i = \frac{r}{r+e}$, on trouve justement $i = 2° 33' 40'', 6$.

* 108. Le diamètre apparent d'un astre se mesure par le moyen d'un instrument qu'on appelle *micromètre*, et qui se compose de deux fils parallèles, que l'on peut éloigner ou rapprocher par le moyen d'une vis dont les *pas* doivent être parfaitement égaux, afin que l'on puisse juger, par son seul mouvement, de la distance des deux fils parallèles. Un troisième fil traverse perpendiculairement les deux premiers. On place cet instrument dans l'intérieur de la lunette, et on place celle-ci de manière que le fil perpendiculaire du micromètre soit dans la vraie direction de l'astre. Cela fait, on a soin de mettre en contact le point le plus occidental du disque de l'astre observé avec le fil parallèle du micromètre qui est le plus occidental, et l'on rapproche ou éloigne en même temps le second fil par le moyen de la vis, de manière que le disque de l'astre soit exactement saisi entre les deux fils parallèles.

* On peut encore mesurer le diamètre apparent d'une planète par l'observation du temps qu'elle reste à passer au méridien, ou à un fil placé dans la lunette perpendiculairement à la direction de l'astre. En effet, s'il s'agit, par exemple, du soleil, et que cet astre étant à l'équateur, on compte deux minutes en temps, depuis l'instant que son bord occidental étoit en contact avec le fil, jusqu'à celui où son bord oriental est en contact avec le même fil; on en conclura que la différence en ascension droite de ces deux bords, c'est-à-dire le diamètre de l'astre, est de 30 minutes.

*** Dans le cas où le soleil parcourroit dans sa course diurne une petite spire, dont les arcs très-petits se confondent évidemment avec les arcs des parallèles qui se trouvent par la même déclinaison; alors on multiplieroit le nombre de parties graduelles trouvées, par le cosinus de la déclinaison; car les longueurs des arcs semblables de cercle étant entr'elles comme leurs rayons respectifs; celles des arcs d'un parallèle seront aux longueurs des arcs semblables de l'équateur, comme le cosinus de la déclinaison du parallèle est au rayon de l'équateur, qui est l'unité. Donc, réciproquement, le nombre des parties graduelles du parallèle qu'a parcourues le bord occidental du soleil dans l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre les deux contacts du fil, est au nombre des parties graduelles de l'équateur qui ont passé par un méridien dans ce même temps, comme le rayon de l'équateur ou l'unité est au cosinus de la déclinaison du parallèle; et conséquemment, pour réduire ces parties à celles de l'équateur, c'est-à-dire, pour trouver le vrai diamètre apparent de l'astre, il faudroit multiplier le nombre de parties graduelles trouvées par le cosinus de la déclinaison de l'astre dans le temps de l'observation.**

109. Les simples notions que nous avons données sur notre système planétaire, prouvent évidemment que les astres qui le composent sont plus ou moins rapprochés de la terre, suivant les différens points de leurs orbites respectives qu'ils occupent. Or, je dis qu'à cause du grand éloignement où nous nous trouvons des planètes, et même de la lune, les distance d'une même planète, ou de notre satellite, sont sensiblement entr'elles dans le rapport inverse des diamètres apparens de ces astres.

En effet, soit O le point où est placé l'œil de l'observateur; OS et OS' les distances de l'astre observé à deux époques différentes, SL, ou S'L' le rayon réel de l'astre; il est clair que les deux triangles rectilignes rectangles SLO et S'L'O, donneront respectivement les équations $LS = SO \times \sin. SOL$ et $L'S' = S'O \times \sin. S'OL'$; mais $LS = L'S'$; donc $SO \times \sin. SOL = S'O \times \sin. S'OL'$; d'où $SO : S'O :: \sin. S'OL' : \sin. SOL$; mais l'angle en O ne dépasse pas 17', ce qui donne le sinus de cet angle, et même le sinus du double de cet angle pour le diamètre apparent entier, sensiblement égal à l'angle même; donc $SO : S'O :: S'OL' : SOL$. Ainsi, en représentant par Δ et Δ' deux distances d'un même astre, et par D et D' les diamètres apparens respectifs, on aura la proportion Fig. 17.

$$\Delta : \Delta' :: D' : D. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

110. Il est évident que l'on entend par hauteur d'un astre, la hauteur de son centre; mais les marins observent et ne peuvent même, avec les instrumens dont ils se servent, observer que la hauteur du bord supérieur, ou du bord inférieur de l'astre. Donc, dans le premier cas, le centre étant moins élevé que le bord supérieur d'une quantité égale au demi-diamètre, il faudra retrancher de la hauteur observée une quantité égale au rayon de l'astre. Ce sera le contraire si l'on observe la hauteur du bord inférieur, car celui-ci étant moins élevé que le centre, de la longueur du rayon, il faudra ajouter à la hauteur observée le demi-diamètre.

111. Ayant ajouté à la hauteur observée du bord inférieur, ou retranché de la hauteur observée du bord supérieur de l'astre, le demi-diamètre; et de cette hauteur du centre, retranché l'inclinaison de l'horizon; le résultat est ce qu'on appelle *la hauteur apparente de l'astre.*

Indépendamment des variations qu'éprouve le demi-diamètre de la lune provenante, de celles de la distance de cet astre à la terre; il varie encore avec les hauteurs et dans le même sens que ces dernières, ainsi que nous le verrons bientôt.

112. Pour combiner d'une manière commode et purement géométrique les mouvemens des corps célestes, il faut considérer ces corps comme étant concentrés dans leur centre; c'est-à-dire, rapporter tous les mouvemens aux centres. Donc, l'observateur placé sur la surface de la terre doit réduire ses observations à ce qu'elles devroient être pour un observateur placé au centre de la terre. Or, il est aisé de voir que la hauteur observée L'O L d'un astre L' par l'observateur placé en O, diffère de celle L'C B ou L'A L, d'une quantité L'A M, ou O L'C en supposant A M parallèle à O L'. Cette différence O L'C dont la hauteur observée du centre *C* surpasse celle observée au point O de la surface de la terre, s'appelle *parallaxe*. On distingue la *parallaxe de hauteur*, d'avec la *parallaxe horizontale*. La première est celle, telle que O L'C, qui a lieu lorsque l'astre en L' est à une certaine hauteur au-dessus de l'horizon; la seconde est l'angle O L C, qui a lieu lorsque l'astre observé est au point L de l'horizon.

Fig. 18.

113. Soit représenté par Δ la distance C L' de l'astre observé L', au centre de la terre; par r le rayon O C de cette dernière planète; par p la parallaxe de hauteur O L'C; enfin par h la hauteur observée, ou plutôt, la hauteur apparente L'O L de l'astre. Substituant ces symboles dans l'équation sin O L'C $= \frac{CO \times \sin. L'OC}{CL'}$ donnée par le triangle rectiligne L'O C, on aura celle:

$$\sin. p = \frac{r \cos. h}{\Delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (25),$$

ou simplement,

$$p = \frac{r \times \cos. h}{\Delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (26);$$

Car Δ est toujours beaucoup plus grand que r, puisque pour la lune périgée, on a $\Delta = 56\, r$.

Lorsque $h = o$, c'est-à-dire, lorsque l'astre observé est à l'horizon, on a cos. $h = 1$: donc, représentant par P la parallaxe horizontale O L C, on aura

$$P = \frac{r}{\Delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27).$$

Substituant cette valeur de $\frac{r}{\Delta}$ dans l'équation (26), il viendra

$$p = P \cos. h \quad . \; . \; . \; . \; . \; (28).$$

Donc, généralement, *la parallaxe de hauteur est égale à la parallaxe horizontale multipliée par le cosinus de la hauteur apparente.* Par conséquent, la parallaxe de hauteur va en diminuant à mesure que la hauteur augmente, et de-

vient nulle lorsque $h = 90°$, c'est-à-dire, lorsque l'astre est au zénith; ce qui, d'ailleurs, est évident à la simple inspection de la figure 18.

* 114. L'équation (28) ne donne la parallaxe de hauteur que par le moyen de l'horizontale; il est donc d'absolue nécessité de connoître cette dernière par quelque moyen direct; or, voici une méthode fort simple dont se sont servis les astronomes pour y parvenir:

* Soient A et A' deux observateurs placés à une grande distance en latitude, par exemple, à environ à un quart de circonférence, mais sous un même méridien. Supposons que le même jour ils observent les hauteurs apparentes H A M, H'A'M de l'astre M sur leurs horizons respectifs à l'instant que l'astre est au méridien commun. Représensons par h et h' ces hauteurs apparentes; par p et p' les parallaxes respectives qui conviennent à ces hauteurs; enfin par P la parallaxe horizontale de l'astre M. Cela posé, on aura l'équation (28) qui donnera $p = P \cos. h$, et $p' = P \cos. h'$, donc, $p + p' = P(\cos. h + \cos. h') = 2 P \cos. \left(\frac{h+h'}{2}\right) \cos. \left(\frac{h-h'}{2}\right)$, d'où Fig. 19.

$$P = \frac{p+p'}{2 \cos. \frac{1}{2}(h+h') \cos. \frac{1}{2}(h-h')} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A);$$

Mais $p + p' = A'MC + AMC = AMA' = 360° - [MAC + ACA' + CA'M] = 360° - MAH - 90° - ACA' - MA'H' - 90° = 180° - h - h' - ACA'$; et les observateurs en A et A' étant l'un au nord et l'autre au sud de l'equateur, on a $ACA' = L + L'$, en représentant par L et L' les latitudes respectives de A et A'. On auroit $ACA' = L \backsim L'$, si les deux observateurs étoient du même côté de l'équateur. Donc $p + p' = 180° - (h + h' + L \overset{+}{\backsim} L')$; et substituant cette valeur dans l'équation (A), on a

$$P = \frac{90° - \frac{1}{2}[h + h' + L \overset{+}{\backsim} L']}{\cos. \frac{1}{2}(h+h') \cos. \frac{1}{2}(h-h')} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29).$$

115. Connoissant la parallaxe horizontale P à une seule époque, on pourra aisément connoître celle P' pour une autre époque quelconque. En effet, de l'équation (27), on tire $\Delta = \frac{r}{P}$; donc, si dans l'instant où l'on a fait les observations qui ont donné P, l'on a de même observé le diamètre D de l'astre (art. 108); on aura pour un autre instant où l'on observera que le diamètre de cet astre est D', la valeur correspondante de Δ', qui sera donnée par la proportion (24), d'où

l'on tire $\Delta'=\frac{D\Delta}{D'}$. Donc, $P'=\frac{rD'}{D\Delta}$ (éq. 27), ou, mettant à la place de Δ sa valeur $\frac{r}{P}$, on aura définitivement

$$P'=\frac{P}{D}\times D' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

Ainsi, dans l'hypothèse que la terre est sphérique, cette dernière formule donneroit pour un instant qnelconque, la parallaxe horizontale du lieu de l'observation, en observant senlement le diamètre apparent de cet astre. Mais la terre n'est pas sphérique, et a sensiblement la figure d'un ellipsoïde (note I); donc P' varie avec les latitudes; or, nous donnons à la note XI un moyen bien simple pour évaluer d'une manière sensiblement exacte la parallaxe horizontale de la lune (qui est le seul astre pour lequel ces variations sont sensibles), quelle que soit la latitude du lieu de la surface de la terre auquel on veut rapporter l'observation, et nous avons donné une table (V) par le moyen de laquelle on pourra trouver cette parallaxe, quelle que soit la latitude de l'observateur.

Fig. 18. 116. A mesure que l'astre s'élève au-dessus de l'horizon, il se rapproche de l'observateur, et enfin s'il parvient au zénith Z, il s'est rapproché d'une longueur sensiblement égale à celle du rayon de la terre. En effet, le triangle L'OC donne l'équation $\frac{L'C}{L'O}=\frac{\sin. L'OC}{\sin. L'CO}=\frac{\cos. L'OL}{\cos. L'AL}=\frac{\cos. L'OL}{\cos. (L'OL+OL'C)}$; donc, représentant par Δ la vraie distance L'C des centres L' et C de l'astre et de la terre; par Δ' la distance L'O du centre L' de l'astre à l'observateur O; par h la hauteur apparente L'OL; enfin par P la parallaxe horizontale OLC de l'astre; [illegible] qui donne la parallaxe de hauteur $OL'C=P\cos. h$; on aura l'équation $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\cos. h}{\cos. (h+P\cos. h)} \ldots (\delta)$; retranchant des deux membres l'unité, il vient $\frac{\Delta-\Delta'}{\Delta'}=\frac{\cos. h-\cos. (h+P\cos. h)}{\cos. (h+P\cos. h)}=\frac{2\sin. (h+\frac{1}{2}P\cos. h)\sin. (\frac{1}{2}P\cos. h)}{\cos. (h+P\cos. h)}$; mais le dénominateur de cette dernière fraction est $=\frac{\Delta'\cos. h}{\Delta}$; donc $\Delta-\Delta'=\frac{2\Delta\sin. (h+\frac{1}{2}P\cos. h)\sin. (\frac{1}{2}P\cos. h)}{\cos. h}$; ou à cause de la petitesse de l'arc $\frac{1}{2}P\cos. h$, on a sensiblement $\sin. (\frac{1}{2}P\cos. h)=\frac{1}{2}P\cos. h$; donc, $\Delta-\Delta'=\Delta\sin. (h+\frac{1}{2}P\cos. h)P$. Or, nous avons vu à l'article 113, que représentant par r le rayon de la terre, on a $\Delta=\frac{r}{P}$; donc enfin

$$\Delta-\Delta'=\sin. (h+\tfrac{1}{2}P\cos. h)r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

équation qui, évidemment, se réduit à r lorsque l'astre est au zénith, puisqu'alors $h=90°$, ce qui donne $\frac{1}{2}P\cos. h=0$, et $\Delta-\Delta'=\sin. 90°\times r=r$.

117. Les diamètres apparens des astres croissant en raison inverse de leurs distances à la terre (art. 109), on aura $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{D}{(Dh)}$; en représentant par D le diamètre apparent de l'astre observé à une hauteur apparente h qui correspond à la distance Δ', et par (Dh) le diamètre horizontal qui, conséquemment, correspond sensiblement à la distance Δ de l'observateur à l'astre, lorsque ce dernier est à l'horizon (*). Substituant cette valeur de $\frac{\Delta'}{\Delta}$ dans l'équation (δ) trouvée précédemment (art. 116), on aura

$$\frac{D}{(Dh)}=\frac{\cos. h}{\cos.(h+P\cos. h)}\ldots\ldots\ldots\ldots (32);$$

d'où nous conclurons le principe suivant : *Le diamètre apparent d'un astre lorsqu'il est observé à une certaine hauteur apparente, est au diamètre horizontal du même astre, comme le cosinus de la hauteur apparente est au cosinus de la hauteur vraie.*

118. Le dénominateur du second membre de l'équation (32) est $=\cos. h \cos. (P\cos. h)-\sin. h \sin. (P\cos. h)$, et sensiblement $=\cos. h-P\sin. h\cos. h$; car l'arc $P\cos. h$ étant fort petit, on a, à très-peu de chose près, $\cos. (P\cos. h)=1$, et $\sin. (P\cos. h)=P\cos. h$, ce qui réduit l'équation (32) à celle $\frac{D}{(Dh)}=\frac{1}{1-P\sin. h}$. Retranchant des deux membres de cette dernière équation l'unité, il vient $\frac{D-(Dh)}{(Dh)}=\frac{P\sin. h}{1-P\sin. h}$; et effectuant la division indiquée dans le second membre, en négligeant les secondes puissances de $P\sin. h$, on aura

$$D-(Dh)=(Dh)P\sin h,$$

ou

$$\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{2}(Dh)=\tfrac{1}{2}(Dh)P\sin. h\ldots\ldots\ldots (\delta).$$

Mais le rapport du diamètre horizontal de la lune à la parallaxe horizontale

(*) En effet LO, qui est la vraie distance de l'observateur à l'astre lorsque ce dernier est à l'horizon, est $=LC\times\cos. OLC=\Delta\cos. P$. Or, en supposant $\Delta=56r$, et $P=61'\,30''$, ce qui est le cas le plus désavantageux pour l'égalité de LO et de LC, on aura $LO=56r\times\cos. 61'30''=55,991\,r$, quantité qui ne diffère pas d'un centième du rayon de la terre, de la vraie distance des centres. Fig. 18.

du même astre, est sensiblement $=\frac{6}{11}$ (note XI, art. 5), c'est-à-dire qu'on a sensiblement $P=\frac{11}{6}(Dh)$: substituant cette valeur dans l'équation (δ), il vient

$$\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{2}(Dh)=\tfrac{11}{3}(\tfrac{1}{2}(Dh))^2\,\text{sin.}\,h;$$

ou, représentant le demi-diamètre $\frac{1}{2}$ D correspondant à la hauteur h par d' et l'horizontal $\frac{1}{2}(Dh)$ par d, et divisant le second membre par le rayon exprimé en secondes, ou encore, ce qui est la même chose, multipliant le second membre par sin. 1'' (*), on aura

$$d'-d=\tfrac{11}{3}d^2\,\text{sin.}\,h\,\text{sin.}\,1''. \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (33)$$

Cette formule traduite en logarithmique, donne

$$\log.(d'-d)=5{,}2498463+2\log.d+\log.\text{sin.}\,h. \quad .\ .\ .\ . \quad (34)$$

C'est par le moyen de cette formule que j'ai calculé la table VI, qui ne contient que les secondes qu'il faut ajouter, et non les dixièmes de seconde, ce qui seroit fort inutile aux marins (**).

119. La parallaxe horizontale d'un astre, ainsi que le demi-diamètre apparent étant connus pour un même moment; il sera extrêmement aisé de connoître le rapport de l'aire et du volume de cet astre à l'aire et au volume de la terre. En effet, Fig. 18. il est évident que le demi-diamètre O C de la terre, n'est autre chose que le si-

(*) d étant dans le second membre exprimé en secondes de degrés, on l'aura en parties du cercle en le divisant par R'', cette dernière quantité exprimant la valeur du rayon du cercle en secondes de degrés. Mais R'' : 1 :: 1'' : arc 1'' en parties du rayon 1; or, l'arc d'une seconde étant extrêmement petit, peut être, sans erreur sensible, considéré comme égal à son sinus; on aura donc R'' : 1 :: 1'' : sin. 1''; d'où $R''=\frac{1''}{\text{sin. }1''}$, donc d en parties du rayon $=d$ sin. 1''; ce qui donne pour la valeur de $d'-d$ en parties du rayon, la quantité $\frac{11}{3}$ sin.^{2} 1'' d^2 sin. h. Mais, pour avoir $d'-d$ en secondes, il faudroit multiplier cette dernière quantité par R'' ou $\frac{1}{\text{sin. }1''}$; donc $d'-d=\frac{11\,\text{sin. }1''}{3}d^2$ sin. h.

Le logarithme 5,2498463 est celui de la quantité constante $\frac{11}{3}$ sin. 1'', et est par conséquent trop grand de 10.

(**) La quarante-quatrième table parmi celles de la lune, publiées par le bureau des longitudes, en 1806, est encore plus exacte que celle VI que nous donnons; elle pose sur une formule que M. Delambre a démontrée dans le discours dont il a fait précéder les tables en question. Mais l'inexactitude de ma table VI étant insensible pour l'usage des navigateurs, je l'ai conservée, parce que la formule qui en est la base, est beaucoup plus simple que celle dont nous venons de parler.

nus de l'angle de parallaxe horizontale OLC de l'astre L. Mais ce sinus OC vu de l'astre L, est le demi-diamètre apparent de la terre. Or, il est clair que les demi-diamètres apparens des deux astres, supposés sphériques, sont entr'eux comme leurs rayons respectifs. Donc, à cause que les surfaces et solidités des sphères, sont respectivement entr'elles comme les carrés et cubes de leurs rayons; on aura, d'une manière assez approchée, les aires et volumes des astres en question par le moyen du rapport des carrés et des cubes de la parallaxe horizontale et demi-diamètre apparent de ces astres. Par exemple, on sait d'après un grand nombre d'observations suivies, qu'à 60′ de parallaxe horizontale de la lune pour Paris, répond un diamètre horizontal de 32′ 46″,6; donc le rapport du rayon de la terre à celui de la lune est $= \frac{60'}{16' 23'',3}$ ou $\frac{36000}{9833}$ qui, réduit à une expression plus simple, est sensiblement $= \frac{11}{3}$, comme nous l'avons dit à la note XI. Donc, la surface de la terre est à celle de la lune, comme 121 : 9, c'est-à-dire que la première est environ 13 fois et demi plus grande que celle de la lune, et le volume de la terre est à celui de la lune, comme 1331 est à 27; ainsi, la terre est environ $49\frac{1}{3}$ fois plus grosse que la lune. Fig. 18.

120. Le globe terrestre est, comme on le sait, entouré d'une masse fluide et invisible de molécules subtiles et élastiques, qu'on appelle *atmosphère*, et dont la densité augmente toujours en se rapprochant de la surface de la terre. Les rayons de lumière en la traversant se *refringent*, de manière qu'au lieu de venir à nous en lignes droites, ils éprouvent une courbure qui nous fait paroître l'astre qui les jaillit plus élevé qu'il n'est réellement. En effet, soit T la terre, O l'observateur, OH son horizon, ABC l'atmosphère, S le soleil, ou tout autre astre; il est clair que les rayons lumineux venant suivant une ligne droite SA, jusqu'au point A placé sur la limite de l'atmosphère, et se courbant dans cette masse fluide suivant la courbe AO; l'observateur O ne verra l'astre S que sur la direction OS′ de la tangente de l'arc AO. Cette courbure qu'éprouvent les rayons de lumière en traversant l'atmosphère, s'appelle *réfraction atmosphérique*. Fig. 20.

La courbure des rayons de lumière est d'autant plus grande que la partie de l'atmosphère qu'ils ont à parcourir, est plus considérable. Or, il est évident que les côtés OT, TB du triangle OTB restant sensiblement constans, et le plus grand angle que puissent former ces droites tant que l'astre est visible, étant OTB′ qui correspond à l'observation de l'astre, lorsqu'il est à l'horizon; la plus grande valeur que puisse avoir le côté opposé à cet angle, est OB′; d'où il suit que l'astre étant à l'horizon, ses rayons rencontrent le plus grand nombre possible

de molécules atmosphériques, et les choquent de la manière la plus oblique; ainsi, dans cette position de l'astre, la réfraction est la plus grande possible, et elle va en diminuant à mesure que l'astre se rapproche du zénith. Enfin elle est nulle lorsque l'astre est au zénith, puisque dans cette dernière position, non-seulement les rayons de lumière traversent l'atmosphère dans sa seule épaisseur; mais c'est qu'encore, le faisant perpendiculairement, la résistance qu'éprouvent les molécules de lumière par leur choc avec ceux dont se composent notre atmosphère, ne peut produire son effet que dans le sens vertical (*voy.* la note XII).

Ainsi, l'effet de la réfraction atmosphérique est de faire paroître les astres plus haut qu'ils ne le sont réellement. Donc, les astres sont visibles avant d'être au-dessus de l'horizon.

La réfraction horizontale, c'est-à-dire, la plus grande réfraction atmosphérique est, suivant Bradley, de 32′ 53″, 8; mais elle varie un peu suivant les variations de la densité de l'air que le baromètre et le thermomètre font connoître.

Nous avons calculé les tables VII et VIII des réfractions et des corrections relatives, dont on verra l'explication et l'usage à la note XII. Ces tables sont calculées d'après les nouvelles divisions décimales du cercle, du baromètre et du thermomètre : mais on pourra, si l'on veut, se servir de la table des réfractions, qui se trouve dans la *Connoissance des temps* de chaque année, et qui est calculée d'après la division sexagésimale du cercle : notre table VIII servira de même aux corrections relatives aux variations de la densité de l'atmosphère.

121. Il suit de ce que nous avons dit dans ce chapitre, que les corrections à faire aux hauteurs observées de l'un des deux bords d'un astre au-dessus de l'horizon pour avoir la hauteur apparente, et ensuite la hauteur vraie du centre de cet astre, sont toutes dans le sens du vertical de l'astre, c'est-à-dire, du grand cercle de la sphère céleste qui passe par le zénith de l'observateur, et le centre de l'astre.

On aura donc généralement les deux équations :

$$\text{haut. app.} = \text{haut. obs.} - \text{inclin. de l'hori.} \pm \tfrac{1}{2}\ \text{diam. app.} \quad . \ . \quad (35),$$

le signe + lorsqu'on a observé la hauteur du bord inférieur, le signe — dans le cas contraire,

$$\text{haut. vr.} = \text{haut. app.} + \text{parall. de haut.} - \text{réfrac. atmosphérique.} \quad . \ . \quad (36)$$

CHAPITRE SIXIÈME.

De la manière de calculer les différentes circonstances du mouvement diurne des Astres, relativement à l'horizon et au méridien de l'Observateur.

122. On appelle *angle horaire* d'un astre observé dans un instant quelconque, l'angle formé au pôle dans ce même instant, par le méridien de l'observateur et le cercle de déclinaison, ou *cercle horaire*, qui passe par le centre de l'astre. Cet angle est toujours compté depuis le demi-méridien élevé. On l'appelle *horaire* parce qu'il a pour mesure l'arc de l'équateur, qui doit passer ou qui a déjà passé sous le méridien, depuis l'instant de l'observation jusqu'à celui du passage de l'astre au méridien.

Ainsi, lorsque l'astre observé est le soleil, son angle horaire que nous apprendrons à calculer, étant converti en temps, à raison de 15 degrés par heure, fait connoître l'heure vraie de l'observateur dans l'instant de son observation.

Réciproquement, connoissant cette heure, et la convertissant en parties de l'équateur, on aura l'angle horaire du soleil.

123. On appelle *milieu du ciel* le point de l'équateur qui se trouve sous le méridien dans un instant quelconque; il est clair que pour déterminer ce point, il ne faut que connoître l'ascension droite du méridien de l'observateur pour ce même instant; ce qui se trouvera aisément, en ajoutant l'angle horaire du soleil avec l'ascension de cet astre après son passage au méridien, ou retranchant la première de ces deux quantités de la seconde avant le passage du soleil au méridien. En effet, soit P le pôle élevé de l'observateur, MN la projection polaire de son méridien sur le plan de l'équateur MT♈NT'M, S le soleil, que nous désignerons par le symbole ☉, TP la projection polaire du quart de cercle de déclinaison de l'astre dans le moment de l'observation qui, évidemment, est après l'heure du vrai midi, si le point N représente le nord; enfin ♈ le point équinoxial du Bélier. Il est clair que le point N étant le nord de la figure, l'ordre des signes de l'écliptique, et par conséquent des degrés d'ascension droite, d'occident en orient, sera dans le sens ♈TMT'N♈. Donc M♈ (ascension droite du méridien) $=$ T♈ (ascension droite du soleil) $+$ MT (angle horaire du soleil). Fig. 21.

Si le soleil est en S′, c'est-à-dire, avant son passage au méridien, on aura M♈ (asc. droite du méridien) = T′♈ (asc. droite ☉) — M T′ (ang. hor. ☉).

Si le point équinoxial du Bélier est en ♈′ entre la partie élevée PM du méridien et le cercle TP de déclinaison, alors on aura M♈′ (asc. du mérid.) = TNT′M♈′ (asc. dr. ☉) + MT (ang. hor. ☉) — (TNT′M + MT) 360°.

De même le soleil étant en S′, et le point équinoxial du Bélier étant en ♈″; on a MTNT′♈″ (asc. dr. mér.) = T′♈″ (asc. dr. ☉) + T′♈″MTNT′ (360°) — T′M (ang. hor. ☉); donc

Asc. dr. méridien de l'obs. = asc. dr. du ☉ $\pm$ ang. hor. ☉ . . . . (37);

et à cause que ce que nous avons dit pour le soleil a également lieu pour tout autre astre, nous aurons généralement

Asc. dr. du mérid. de l'obs. = asc. dr. astre $\pm$ ang. hor. astre. . . . (38),

le signe + après le passage de l'astre au méridien, le signe — avant ce passage. On fera de plus attention que dans les deux derniers cas que nous avons examinés, en plaçant le point équinoxial du Bélier entre le méridien de l'observateur et l'astre, il y a un excès de 360° qu'il faut rejeter, ou un résultat négatif qui indique qu'il faut prendre le supplément de ce résultat, pris positivement, à 360°.

Par exemple, aujourd'hui 17 août 1806, à $10^h\frac{1}{2}$ du matin, moment où j'écris ceci, l'ascension droite du soleil en temps est $9^h 44^m 17^s,9$, et l'angle horaire est $1^h 45^m$; ce qui donne, pour cet instant, l'ascension droite du méridien de Paris $= 9^h 44^m 17^s,9 - 1^h 45^m = 7^h 59^m 17^s,9 = 119° 49' 28'',5$.

Remarque. Lorsqu'on calcule pour le soleil, on se sert de la distance de cet astre à l'équinoxe (art. 79), ce qui change l'équation (37) en celle

Asc. dr. du mer. de l'obs. = 360 $\pm$ ang. hor. ☉ — dist. ☉ à l'éq. . . . (39).

124. Connoissant l'ascension droite d'un astre et celle du méridien dans un instant quelconque, on aura aisément l'angle horaire de cet astre : car de l'éq. (38), on tire celle

$\pm$ ang. hor. astre = asc. dr. du mérid. de l'obs. — asc. dr. de l'astre. . . (40).

Le double signe $\pm$ indique que l'astre a passé au méridien ou n'y a pas passé, suivant que l'ascension droite du méridien est plus grande ou plus petite que celle de l'astre.

Combinant l'éq. (40) avec celle (37), on a

$\pm$ ang. hor. de l'astre $=$ asc. dr. ☉ — asc. dr. de l'astre $\pm$ ang. hor. ☉. . . (41).

125. Il est bien aisé, lorsque l'on connoît l'angle horaire d'une étoile, de déterminer l'heure vraie de son passage au méridien, puisqu'il n'y aura qu'à convertir cet angle en temps, à raison de $15°2'27'',8$ par heure, à cause de l'accélération du temps sidéral sur le temps solaire.

Si l'on se sert de la distance du soleil à l'équinoxe, au lieu de son ascension droite, on mettra dans l'éq. (41), 360°—dist. ☉ à l'équinoxe, au lieu d'ascension droite ☉.

126. Le calcul de l'angle horaire des astres, et surtout du soleil (*), d'après l'observation de la hauteur de cet astre au-dessus de l'horizon, est une des opérations les plus essentielles de l'astronome, et particulièrement du navigateur, comme nous le verrons dans le troisième livre.

Nous avons fait connoître à l'art. 95 la méthode pour calculer la déclinaison du soleil dans un instant quelconque (éq. 7 et 9). Mais cette déclinaison étant marquée pour le midi de tous les jours de l'année pour le méridien de Paris dans la *Connoissance des temps*, et sa variation étant sensiblement uniforme dans l'espace de 24 heures, on l'aura pour un instant quelconque par les simples parties proportionnelles; c'est-à-dire que représentant par δ' et δ'' les déclinaisons respectives du soleil pour le midi précédent, et pour le midi qui suit l'instant de l'observation; par δ la déclinaison cherchée, et par t le temps écoulé depuis le midi précédent jusqu'à l'instant de l'observation, on aura

$$\delta = \delta' \pm \frac{t(\delta' \backsim \delta'')}{24} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

127. Soit P le pôle élevé de l'observateur, HO son horizon, PZH son méridien, Z son zénith, A l'astre observé, ♈QB♎ l'équateur; ce qui donne 1° PA égal à la *distance polaire* de l'astre A, que je représente par D; 2° PZ $=$ 90° — la latitude ZQ de l'observateur, que je représente par L; 3° ZA $=$ 90° — la hauteur vraie AT de l'astre, que je représente par E; 4° angle ZPA qui est Fig. 15.

(*) Je dis *surtout du soleil*, parce que, comme nous le verrons dans le troisième livre, la difficulté d'observer en mer de bonnes hauteurs des étoiles, fait préférer aux navigateurs de conclure l'angle horaire des étoiles de celui du soleil.

l'angle horaire de l'astre, que je représente par A; mais le triangle ZPA donne l'équation

$$\cos. ZPA = \frac{\cos. ZA - \cos. PZ \cos. PA}{\sin. PZ \sin. PA} \ldots (M);$$

donc

$$\cos. A = \frac{\sin. E - \sin. L \cos. D}{\sin. D \cos. L} \ldots\ldots (43)$$

ou, plus simplement, faisant attention que $2 \sin.^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos. A$, on aura $2 \sin.^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin. D \cos. L + \sin. L \cos. D - \sin. E}{\sin. D \cos. L} = \frac{\sin. (D+L) - \sin. E}{\sin. D \cos. L} =$ $\frac{2 \cos. \frac{1}{2} [D+E+L] \sin. \frac{1}{2} [D+L-E]}{\sin. D \cos. L}$; donc enfin

$$\sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2} [D+E+L] \sin. \frac{1}{2} [D+L-E]}{\sin. D \cos. L}} \ldots (44).$$

Connoissant, par le moyen de cette formule, l'angle horaire de l'astre observé, on aura aisément l'heure vraie dans l'instant de l'observation; car, si c'est le soleil qu'on a observé, il n'y aura qu'à réduire en temps l'angle horaire trouvé, et si c'est tout autre astre, la formule (41), d'où l'on tire

$$\pm \text{ang. hor.} \odot = \text{asc. dr. de l'ast.} - \text{asc. dr.} \odot \pm \text{ang. hor. de l'ast.} \ldots (45),$$

nous apprend qu'il faut, pour avoir l'angle horaire du soleil, et par conséquent l'heure vraie de l'observation, retrancher de l'ascension droite de l'étoile celle du soleil, et ajouter ou retrancher de cette différence l'angle horaire de l'astre, suivant que ce dernier a été observé après ou avant son passage au méridien.

128. Remarque. L'ascension droite du soleil pouvant être considérée, ainsi que sa déclinaison, comme variant uniformément dans les vingt-quatre heures, on aura (en représentant par α l'ascension droite pour un instant quelconque éloigné du midi précédent d'un temps représenté par t, et respectivement par α' et α'' l'ascension droite du soleil pour le midi précédent et pour le midi suivant) l'équation :

$$\alpha = \alpha' \pm \frac{t(\alpha' \backsim \alpha'')}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Le signe + lorsque l'ascension droite va en augmentant, le signe — dans le cas contraire; d'où il suit que pour connoître l'ascension droite du soleil dans l'instant de l'observation, il faut connoître son angle horaire dans le même instant; et qu'ainsi la formule (45) ne peut donner rigoureusement l'angle horaire du

soleil, puisque dans sa valeur il y a le terme ascension droite ⊙, qui est une fonction de l'inconnue. Mais il est évident que l'observateur connoissant à peu près l'heure solaire dans l'instant de son observation, l'erreur qu'il commettra dans l'estime de l'ascension droite du soleil sera fort petite, et conséquemment, l'erreur qui en résultera pour l'angle horaire, sera aussi très-petite (*voyez* la note XIII).

129. Si la déclinaison de l'astre considéré, ne varie pas sensiblement depuis l'instant de *son lever réel*, c'est-à-dire depuis l'instant de son apparition réelle à l'horizon de l'observateur, jusqu'à son *coucher réel*, c'est-à-dire jusqu'à l'instant de sa disparition réelle sous l'horizon, ce qui a sensiblement lieu pour les étoiles, alors il est évident que l'instant du passage de cet astre au méridien divisera en deux parties égales le temps de la présence réelle de l'astre, et ce demi-temps réduit en degrés, n'étant que l'angle horaire formé par le méridien, de l'observateur et l'arc horaire de l'astre à l'instant où il est à l'horizon, il nous sera aisé de le connoître par le moyen de la formule (43) dans laquelle nous n'aurons qu'à faire $E=0$, puisque l'astre étant à l'horizon, sa hauteur est nulle, ce qui nous donnera $\cos. A = -\text{tang. } L \cot. D$; ou, représentant par P l'angle *semi-diurne* de l'astre, et toujours par δ sa déclinaison, on aura:

$$\cos. P = \mp \text{tang. } L \text{ tang. } \delta \text{ . . . . } (17),$$

le signe — lorsque la déclinaison de l'astre est de même dénomination que la latitude de l'observateur, le signe + dans le contraire, puisque $D=90^\circ-\delta$ dans le premier des deux cas, ce qui donne $\cot. D = \text{tang } \delta$; et $D = 90^\circ+\delta$ dans le second cas, ce qui donne $\cot. D = -\text{tang. } \delta$. Donc, lorsque l'astre est dans le même hémisphère équatorial que l'observateur, le temps de la présence sera plus long que celui de l'absence, puisqu'on aura cos. P négatif, d'où $P > 90$, et en temps, $2P > 12$ heures. Ce sera le contraire lorsque le zénith de l'observateur et l'astre, seront de part et d'autre de l'équateur, puisqu'alors on aura cos. P positif d'où $P < 90^\circ$, et en temps $2P > 12$ heures.

130. Le triangle rectilatère qui a donné l'équation (47) ne peut exister qu'en tant que $\text{tang. } L \text{ tang. } \delta$ est < 1, puisqu'on sait que les limites de cos. P sont 1, 0 et -1; donc, lorsque $\text{tang. } L \text{ tang. } \delta = 1$, ou >1, ce qui donne $\text{tang.} L = \cot. \delta$, ou $> \cot. \delta$; d'où $L+\delta = 90^\circ$, ou $> 90^\circ$, on en conclura que l'astre est toujours présent pour l'observateur placé dans le même hémisphère que cet astre, et toujours absent pour l'observateur placé dans l'hémisphère opposé.

Tous ces résultats déduits analyquement de la formule (47), se concluent aussi

aisément de la seule considération des positions respectives des cercles de déclinaison avec le méridien ; ou encore mieux, des positions respectives des parallèles parcourus par les astres par rapport à l'horizon de l'observateur (art. 15, 16 et 17).

131. Mais en faisant $E = 0$ dans la formule (43), nous n'aurons obtenu que l'arc de présence réelle de l'astre, en supposant que ce dernier n'a point de parallaxe, ce qui a sensiblement lieu pour les étoiles, et que la réfraction est nulle. Il faut donc pour avoir l'angle semi-diurne apparent de l'astre, faire dans
Fig. 15. le triangle PZA, le côté ZA, que nous considérons maintenant comme la distance apparente de l'astre au zénith de l'observateur, $= 90° +$ réfrac. hor. — parall. hor. Ainsi, représentant par Δ cette dernière quantité, par P le semi-angle diurne ZPA, par L la latitude ZQ de l'observateur, et mettant à la place de la distance polaire D ou PA, sa valeur $90° \mp \delta$, la formule (43) deviendra $\cos. P = \frac{\cos. \Delta \mp \sin. L \sin. \delta}{\cos. \delta \cos. L}$. Mais $2 \cos.^2 \frac{1}{2} P = 1 + \cos. P$; donc $2 \cos.^2 \frac{1}{2} P = \frac{\cos. L \cos. \delta \mp \sin. L \sin. \delta + \cos. \Delta}{\cos. \delta \cos. L} = \frac{\cos. (L \pm \delta) + \cos. \Delta}{\cos. \delta \cos. L}$; d'où

$$\cos. \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2}(L + \Delta \pm \delta) \cos. \frac{1}{2}(\Delta \mp \delta - L)}{\cos. \delta \cos. L}} \dots (48).$$

Pour faire une application de cette formule, proposons-nous de trouver le temps que le soleil a été visible par les Parisiens aujourd'hui 19 août 1806. Voici le calcul :

Latitude de Paris.	48° 50′ 15″	com. ar. log. cos.	0,1816441
90° + réfr. hor. — parrall. hor. ☉	90 32 46		
Décl. bor. ☉ au midi vrai.	12 57 6	com. ar. log. cos.	0,0111916
Somme.	152 20 7		
½ Somme.	76 10 4	. . . . . log. cos.	9,3785425
½ Som. — lat. de Paris	27 19 49		
½ Som. — lat. de Paris. — décl. ☉.	14 22 43	. . . . . log. cos.	9,9861784
		Somme.	19,5575566
		½ Somme.	9,7787783.
qui est le log. cos. du quart de l'arc diurne P	53° 4′ 5″		
Multipliant par	8		
On a le ½ angle diurne = ...	$7^h\ 4^m\ 32^s\ 40^{ier}$.		

Donc aujourd'hui le soleil s'est levé pour les habitans de Paris à $4^h 55^m 27^s$, et couché à $7^h 4^m 33^s$.

132. Mais depuis l'instant du lever apparent de l'astre jusqu'à celui de son coucher apparent, sa déclinaison varie, et l'arc semi-diurne qui suit le passage de l'astre au méridien de l'observateur, n'est pas le même que celui qui a précédé ce passage. Cette différence est insensible pour les étoiles, très-peu sensible pour les planètes les plus éloignées du soleil, assez sensible pour ce dernier astre, et considérable pour notre satellite. *Voyez* la note XIV où se trouve la méthode pour corriger cette erreur. Fig. 15.

133. Remarque I. Il est évident que la réduction de l'angle semi-diurne en temps, doit être faite d'après le mouvement apparent diurne de l'astre que l'on considère : ainsi, dans l'exemple de l'article 131, nous avons réduit l'angle semi-diurne à raison de 15° par heure, parce que le mouvement apparent du soleil dans une heure solaire est de 15°. Mais s'il s'agissoit d'une étoile, il faudroit réduire l'angle semi-diurne à raison de 15° 2′ 27″,8 par heure, parce que le mouvement apparent des étoiles dans une heure solaire, est de 15° 2′ 27″,8. Si l'astre considéré étoit la lune, alors la réduction se feroit à raison de 14° 29′ 31″,3, parce que, comme nous le verrons bientôt, le retard du mouvement apparent d'orient en occident de la lune sur celui du soleil, est à peu près, et abstraction faite d'un grand nombre de petites inégalités, de 30′ 28″,7 par heure.

II. Si l'on compte la présence de l'astre depuis l'instant de son premier jet de lumière, à son lever, jusqu'à celui où il disparoît entièrement à son coucher, alors le centre de l'astre étant dans ces instans-là, en-dessous du bord supérieur que l'on considère, d'une quantité égale au demi-diamètre apparent de l'astre, il faudra encore ajouter à Δ le demi-diamètre en question.

III. Nous n'avons pas eu égard dans le calcul de l'angle semi-diurne à l'inclinaison de l'horizon, laquelle évidemment, augmente l'angle en question; il faudra donc, lorsqu'on voudra avoir égard à cette quantité, l'ajouter à Δ.

IV. Il est clair que la connoissance de l'angle semi-diurne de tout autre astre que le soleil, ne pourra faire connoître les heures du lever et du coucher de cet astre, qu'en tant que l'on connoîtra celle de son passage au méridien : c'est ce que l'on pourra trouver par le moyen de la méthode enseignée à l'art. 125.

134. On appelle *azimut* l'arc HT de l'horizon compris entre le point H où la partie élevée ZH du méridien de l'observateur (*) coupe l'horizon, et le Fig. 15.

(*) J'appelle *partie élevée* du méridien, le quart de ce grand cercle compris entre le zénith et

point T de ce dernier où le vertical ZAT de l'astre A coupe l'horizon (*). L'angle HZT qui a pour mesure l'azimut HT, s'appelle *angle azimutal*. Il est aisé de trouver cet angle, lorsqu'on connoît la hauteur vraie AT de l'astre A, la latitude ZQ ou PO de l'observateur, et la distance AP de l'astre au pôle élevé P : car, dans le triangle sphérique AZP, on a l'équation

$$\cos. AZP = \frac{\cos. AP - \cos. AZ \cos. ZP}{\sin. AZ \sin. ZP}.$$

Mais nous servant de la même notation qu'à l'article 127, et représentant par Z l'angle azimutal HZT, nous aurons $AZP = 180° - Z$, $AP = D$, $AZ = 90° - E$ et $ZP = 90° - L$, donc

$$\cos. Z = \frac{\sin. E \sin. L - \cos. D}{\cos. E \cos. L} \ldots\ldots (49);$$

Mais $2 \sin.^2 \frac{1}{2} Z = 1 - \cos. Z$, donc $2 \sin.^2 \frac{1}{2} Z = \frac{\cos. (E+L) + \cos. D}{\cos. E \cos. L}$, d'où

$$\sin. \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\left(\frac{\cos. \frac{1}{2}(E+L+D) \cos. \frac{1}{2}(E+L-D)}{\cos. E \cos. L}\right)} \ldots (50).$$

135. On appelle *amplitude* l'arc de l'horizon compris depuis le vrai point d'orient ou d'occident et celui où l'astre se lève ou se couche. La première de ces amplitudes, c'est-à-dire celle comptée depuis le vrai point d'est, s'appelle *ortive;* la seconde est appelée *occase.*

L'amplitude d'un astre est évidemment la mesure de l'angle sphérique formé par le vertical de l'astre, au moment de son lever ou de son coucher, et le *premier vertical*, c'est-à-dire, celui qui passe par les vrais points d'est ou d'ouest. Donc, représentant par M l'amplitude, on aura

$$Z = 90° \pm M;$$

---

l'horizon qui coupe l'astre, lorsque ce dernier est au-dessus de l'horizon de l'observateur pour les astres qui se couchent, ou à sa plus grande hauteur pour les astres toujours visibles; et j'appelle *partie abaissée* du méridien, le quart de ce grand cercle compris entre le nadir et l'horizon qui coupe l'astre sous l'horizon, pour les astres qui se couchent, ou le quart du méridien compris entre le zénith et l'horizon qui coupe l'astre à sa plus petite hauteur au-dessus de l'horizon, lorsque cet astre est toujours visible. Ainsi, pour nous Européens, la partie élevée du méridien est du côté du nord, c'est le contraire pour les habitans de l'hémisphère méridional.

(*) Plusieurs auteurs comptent indifféremment l'angle azimutal du côté du nord et du côté du sud. Moi-même je l'ai compté de cette manière dans mon *Art du calcul astronomique des navigateurs.* Mais je crois que pour l'uniformité de la méthode du calcul, il vaut mieux le toujours compter depuis la partie élevée du méridien.

le signe positif, lorsque la déclinaison de l'astre est de même dénomination que la latitude de l'observateur, puisqu'alors la partie visible du parallèle parcouru par l'astre étant plus grande que l'invisible, les points de sections du parallèle et de l'horizon doivent être en-delà de ceux des sections de l'équateur et de l'horizon, qui sont les vrais points d'est et d'ouest, par rapport à la partie élevée du méridien. Le signe négatif est pour le cas contraire. Cela posé, substituant dans l'éq. (49) cette valeur de Z, et faisant $E = 0$, ce qui a lieu à l'instant du lever ou du coucher de l'astre, on aura $\mp \sin. M = -\frac{\cos. D}{\cos. L}$; mais $D = 90° \mp \delta$, d'où $\cos. D = \pm \sin. \delta$, donc $\mp \sin. M = \mp \frac{\sin. \delta}{\cos. L}$, ou

$$\sin. M = \frac{\sin. \delta}{\cos. L} \ldots\ldots\ (51).$$

Nous serons dans le cas de faire des applications très-utiles de toutes ces formules dans le troisième livre; ainsi nous renvoyons à cette partie de notre ouvrage, les exemples numériques.

CHAPITRE SEPTIÈME.

De la Lune.

156. NOTRE satellite étant beaucoup plus près de la terre que tous les autres astres, les inégalités de son mouvement nous sont beaucoup plus sensibles; et même, les effets de l'attraction de la lune sur la terre ayant plus particulièrement lieu sur la partie la plus renflée de cette dernière, c'est-à-dire, sur la partie équatoriale, il en résulte des petites variations dans le mouvement de la terre, dont, par les apparences, la lune paroît seule affectée; car les autres astres sont trop loin de nous, pour que ces très-petites variations dans les mouvemens réels de la terre paroissent affecter les leurs. Enfin la lune a ses mouvemens tellement altérés en réalité ou en apparence, par les différentes positions du soleil et de la terre par rapport à ce satellite, que, jusqu'à ces derniers temps, les géomètres et astronomes n'avoient pu compléter la théorie de ses mouvemens. Mais, heureusement pour les progrès des sciences, et particulièrement de la navigation, l'analyse dirigée par l'illustre auteur de la *Mécanique Céleste*, et généralement les

travaux des savans astronomes et géomètres qui composent le bureau des longitudes (*), ont porté la théorie de la lune à un tel degré d'exactitude, que l'on peut les considérer comme ne différant pas sensiblement de la perfection. Nous n'avons pas le projet de développer cette théorie si compliquée et si difficile, dans un ouvrage de la nature de celui-ci, mais d'en donner les notions les plus essentielles.

137. La lune a, comme tous les astres de notre système planétaire, un mouvement apparent diurne d'orient en occident. De plus, elle a un mouvement propre d'occident en orient autour de la terre, qui lui en fait faire le tour entier dans environ un mois. Outre cela, elle est emportée avec sa planète principale autour du soleil, de manière qu'elle décrit dans l'espace une espèce d'épicycle. Enfin la lune a un mouvement de rotation autour d'un axe, qui dure le même temps que celui de sa révolution autour de la terre.

Si tous ces mouvemens étoient uniformes et n'étoient pas affectés d'un grand nombre d'inégalités qui dépendent des positions respectives du soleil et de la lune par rapport à la terre, on soumettroit aisément à une formule analytique assez simple, toutes les lois de son mouvement. Mais, comme nous venons de le dire, un grand nombre de causes altèrent ces lois, et c'est dans l'examen des mouvemens séculaires de ce satellite relativement aux équinoxes, étoiles, conjonctions, oppositions, etc., que l'on a trouvé avec une exactitude suffisante, la plus grande partie des inégalités des mouvemens réels ou apparens de ce satellite. Par exemple, ayant trouvé que dans un siècle ou 36525 jours, le mouvement lunaire, par rapport aux équinoxes, est de $481267°53'2''$, l'on trouvera la durée moyenne de l'une de ces révolutions, qu'on appelle *révolution tropique* de la lune, en cherchant le quatrième terme de la proportion

$$481267°53'2'' : 36525 :: 360 : \text{révolution tropique} ☾ \quad (**)$$

que le calcul donne de $27^j\,7^h\,43^m\,4^s$.

(*) Ce bureau vient de publier les tables du soleil par M. Delambre, et celles de la lune par M. Bürg. Ces tables, dont nous avons déjà parlé à l'art. 96, réunissent à toute l'exactitude possible, une grande simplicité et élégance dans la manière dont le premier de ces deux géomètres les a ordonnées; l'on n'y voit plus ces complications de signes qui existoient dans les anciennes tables et qui fatiguoient le calculateur. D'ailleurs, ces tables sont précédées d'une explication théorique et pratique, composée par le savant astronome et géomètre qui les a rédigées.

(**) Dorénavant, nous représenterons la lune par ce symbole ☾ que les astronomes ont consacré à cet usage.

138. Mais la précession des équinoxes étant dans 365j 5h,8 de 50″,103 (art. 87), on trouvera par les parties proportionnelles, qu'elle est de 3″,749 dans 27j 7h,7. Donc, puisque le premier point du Bélier s'est avancé d'occident en orient, c'est-à-dire, à la rencontre de la lune, de 3″,749; la révolution de ce dernier astre par rapport aux fixes, c'est-à-dire, sa révolution *sidérale* sera plus longue que la tropique; et on trouvera l'excès de la première sur la seconde, en prenant une quatrième proportionnelle aux trois quantités 359° 59′ 56″, 251, 27j 7h 43m 4s et 3″,749, ce qui donne 6s, 828; donc, la révolution sidérale de la lune est de 27j 7h 43m 11s.

139. Divisant 360° par la durée 27j 7h 43m 11s de la révolution sidérale, on a pour le mouvement moyen de la lune dans un jour 13° 10′ 35″; donc, le moyen mouvement horaire de ce satellite est $=\frac{13^\circ\,10'\,35''}{24}=32'\,56'',5$; mais celui du soleil est de 2′27″,8 par heure, puisqu'il est par jour de 59′8″,2 (art. 82), d'où il suit que le mouvement horaire apparent d'orient en occident de la lune, est moindre que celui du soleil de 30′28″,7, et que, conséquemment, la conversion en temps des espaces parcourus par la lune d'orient en occident, doit être à raison de 14° 29′ 31″,3 par heure, ainsi que nous l'avons déjà dit à l'article 133.

140. En observant tous les jours la hauteur méridienne du centre de la lune et son ascension droite, d'où l'on a conclu les longitudes et latitudes de cet astre aux mêmes époques (chap. IV), on a trouvé, 1.° que notre satellite décrit autour de la terre une courbe sensiblement elliptique, dont notre planète occupe l'un des foyers; 2.° que l'inclinaison de cette orbite sur l'écliptique est d'environ 5° 8′ 49″. Il est évident que cette inclinaison qui varie en plus ou en moins, mais qui oscille toujours autour de celle que nous venons d'indiquer, a été donnée par la plus grande latitude de la lune, à chaque révolution de cet astre autour de la terre.

* 141. La trajectoire de la lune dans l'espace étant l'effet d'une force de projection commune à tous les corps célestes, et d'attraction vers le centre de la terre qui est dans le plan de l'orbite, on en conclura que son rayon vecteur, ou la ligne des centres de la terre et de la lune, décrit des aires proportionelles aux temps employés à les décrire, ce qui est la seconde loi de Képler commune à tous les corps opaques de notre système planétaire.

142. Il est toujours aisé par le moyen de la proportion (24) (art. 109), et encore mieux de l'éq. 7 (note XI art. 3), de déterminer la distance des centres de la terre et de la lune dans un instant quelconque par la seule observation du dia-

mètre apparent de ce dernier astre. Cette opération répétée fort souvent et pendant long-temps, a donné pour la plus grande distance des centres des deux astres 63,94145 rayons de la terre, et pour la plus petite 55,98725. Donc, si l'orbite de la lune étoit une ellipse constante, on auroit son excentricité $= \frac{63,94145 - 55,98725}{2} = 3,9771$ rayons de la terre; d'où, représentant par l'unité la distance moyenne $\frac{63,94145 + 55,98725}{2} = 59,96435$, on auroit pour excentricité 0,066326. Mais, ainsi que nous le verrons bientôt, cette excentricité varie, et l'on a pour la moyenne 0,0550356 (*).

143. Les points d'intersections de l'orbite de la lune et de l'écliptique, s'appellent *nœuds*, celui par lequel passe notre satellite pour s'élever dans le nord de l'écliptique s'appelle *nœud ascendant* et se désigne par le caractère ☊, le second s'appelle *nœud descendant* et se désigne par le symbole ☋ (art. 72).

L'observation a fait connoître que ces nœuds rétrogradent, c'est-à-dire, se meuvent d'orient en occident, et font une révolution entière dans $6793^j\ 7^h\ 13^m\ 18^s$. Mais dans cet intervalle de temps, les équinoxes ont aussi rétrogradé à raison de 50″, 103 par 365^j 25; et par conséquent la révolution tropique des nœuds doit être plus grande. On trouve par le calcul des parties proportionnelles, qu'elle est de $6798^j\ 4^h\ 52^m\ 19^s$.

* 144. L'apogée lunaire a aussi un mouvement, mais qui est en sens inverse de celui des nœuds, c'est-à-dire qui est d'occident en orient. La révolution entière de l'apogée par rapport aux fixes, est de $3232^j\ 11^h\ 11^m\ 39^s$; mais la révolution tropique de l'apogée doit être moins longue, puisque le point équinoxial du printemps et l'apogée de la lune vont en sens inverse. On trouve, comme précédemment, par deux règles de *trois* simples, que la révolution tropique de l'apogée est de $3231^j\ 8^h\ 24^m\ 58^s$.

* 145. L'on déduit aisément de ces élémens et par les parties proportionnelles, que la révolution de la lune par rapport à l'apogée, ou révolution *anomalistique* de la lune, est de $27^j\ 13^h\ 18^m\ 34^s$, et celle par rapport au nœud ascendant, de $27^j\ 5^h\ 5^m\ 36^s$.

146. Le moyen mouvement diurne en ascension droite du soleil étant de 59′, 8″,3, et celui de la lune étant de 13° 10′35″, on aura le temps employé par

(*) Cependant, l'observation du diamètre apparent de la lune, d'environ 32′, ne donneroit pas assez sûrement une excentricité qui produit dans la longitude, des variations douze fois plus fortes. (Remarque que M. Delambre a eu la bonté de me communiquer.)

la lune entre deux conjonctions du soleil, qui sera de $\frac{360^\circ}{13^\circ 10' 35'' - 59' 8'',3} =$ $29^j 12^h 44^m 3^s$. La durée de cette révolution, qu'on distingue de la tropique ou de la sidérale par l'adjectif *synodique*, s'appelle encore *mois lunaire*, ou simplement *lunaison*.

147. C'est des différentes époques de cette révolution que dépendent les *phases* de la lune, c'est-à-dire, les différens aspects sous lesquels nous la voyons Fig. 12. dans le cours d'une lunaison. En effet, soit T la terre, S le soleil, $A\gamma B\delta$ la lune lorsqu'elle est en conjonction : il est clair que dans cette position notre satellite ne nous présentant que l'hémisphère $\delta A\gamma$ opposé à l'éclairé $\delta B\gamma$, c'est-à-dire, son hémisphère obscur, il nous sera absolument invisible. C'est ce qu'on appelle la *nouvelle lune*. Mais ce satellite tournant autour de la terre dans le sens δEGMV, l'hémisphère αDE tourné vers la terre, renferme une petite partie DE de l'hémisphère éclairé, qui se présente sous la forme d'un croissant, dont l'arc intérieur appartient à une ellipse, ayant pour grand axe le diamètre apparent du disque de la lune, ou du moins très-peu différent. En effet, la lune étant sensiblement sphérique, le faisceau de lumière parti du soleil qui l'éclaire, a pour base un de ses grands cercles, ou du moins un cercle qui en diffère peu, si l'on a égard à la différence des diamètres apparens des deux astres. Donc, ce faisceau forme un cylindre si les diamètres apparens sont égaux, ou un cône dont l'angle au sommet est extrêmement petit, si les deux diamètres apparens diffèrent de grandeur. Mais tous les rayons visuels qui vont de l'œil de l'observateur à la lune, forment un cône, qui a pour base le disque de cet astre, et ce cône est coupé obliquement par la base du cylindre ou cône lumineux ; donc, la section est une ellipse, et par conséquent la demi-limite de l'hémisphère éclairé se présente à nous sous la forme d'une demi-ellipse. Mais à mesure que l'*élongation*, c'est-à-dire la distance angulaire de la lune au soleil, augmente, alors les deux volumes que nous venons de considérer, savoir, le cône des rayons visuels ayant son sommet à l'œil de l'observateur, et le cylindre ou cône formé par les rayons lumineux qui éclairent la lune, tendent sans cesse à se couper rectangulairement ; donc le demi-petit axe de la limite intérieure du disque éclairé diminue sans cesse, et devient sensiblement nul lorsque la lune est en FGHα à 90° de la conjonction, puisqu'alors l'angle TSF n'est que d'environ 8', ce qui donne l'angle TFS sensiblement droit. Ainsi la limite de la partie visible éclairée étant à très-peu de chose près une droite, nous voyons alors la moitié du disque éclairé, et la lune est dans ce cas dite en *quadrature* ; c'est son *premier quartier*. A partir de ce point-là, la partie éclairée va toujours en augmentant, et alors la limite de cette

Fig. 22. partie IL nous paroît sous la figure d'un arc d'ellipse, ayant sa convexité tournée en sens inverse de ce qu'elle étoit du passage de la nouvelle lune au premier quartier ; ce qui se démontreroit comme précédemment. La lune continuant de cette manière à s'avancer vers l'occident, sa partie éclairée augmente sans cesse, jusqu'à ce qu'enfin étant en MλNO, et par conséquent en opposition, elle présente le même hémisphère au soleil et à la terre ; nous voyons donc alors tout le disque éclairé. Cette phase s'appelle *pleine lune*.

A partir de ce point, la partie éclairée du disque de la lune décroît suivant la même loi qu'elle avoit crû, et présente les mêmes aspects. Arrivée en UVXπ, c'est-à-dire, à 90 degrés de l'opposition, elle ne présente plus à la terre que la moitié de son hémisphère éclairée. Cette phase s'appelle *second quartier de la lune*. Enfin, la partie éclairée diminuant sans cesse, finit par disparoître à l'époque de la conjonction. Les nouvelle et pleine lune s'appellent *syzygies* ; les premier et second quartiers s'appellent *quadratures*.

148. Il est clair que si l'orbite de la lune étoit dans le même plan que l'écliptique, il y auroit éclipse de soleil à toutes les conjonctions, et éclipse de lune à toutes les oppositions. Mais à cause de l'inclinaison d'environ 5 degrés des deux orbites, les rayons du soleil peuvent très-souvent nous parvenir dans les conjonctions, en passant entièrement en-dessus ou en-dessous de la lune. De même, cette inclinaison permet, la plupart du temps, que dans les oppositions les rayons de lumière passent entièrement en-dessus ou en-dessous de la terre. Mais si les syzygies ont lieu aux nœuds ou près des nœuds, alors l'intersection des rayons solaires ayant entièrement ou en partie lieu, il y a éclipse totale ou éclipse partielle.

149. Il a été aisé aux astronomes d'observer que la lune nous présentoit sans cesse la même face ; car ils aperçoivent toujours à peu près les mêmes taches sur son disque (*), sans en découvrir de nouvelles ; d'où il suit que ce satellite a un

(*) Ces taches, qui sont en grand nombre, ont été observées avec grand soin et tracées très-naturellement sur un cercle représentant la figure de la lune. On trouve cette figure dans plusieurs livres d'astronomie et dans quelques volumes de la *Connoissance des temps*, par exemple, dans le volume de 1793. Mais il faut faire attention que les taches A, B, C, etc., désignées par les dénominations respectives *Mare humorum*, *Mare nubium*, *Mare imbrium*, *etc.*, ne sont et ne peuvent être des mers ; car les éclipses ou *occultations* des étoiles par la lune sont instantanées, d'où il suit que ce satellite n'a pas d'atmosphère sensible, et conséquemment qu'il n'existe sur sa surface aucun liquide ; puisqu'il est démontré en physique, que sans le poids de l'atmosphère terrestre et des vapeurs qui s'y trouvent, tous les liquides qui sont à la surface de la terre se réduiroient en vapeurs.

mouvement de rotation d'occident en orient qui lui fait faire une révolution entière autour de son axe dans un mois synodique. En effet, en supposant un observateur placé au soleil, il est évident qu'il verroit dans la conjonction et l'opposition de la lune, les deux hémisphères opposés de ce satellite, c'est-à-dire celui que nous ne voyons jamais et celui que nous voyons toujours. Ainsi, de la nouvelle à la pleine lune pour nous, l'observateur placé au soleil verroit faire une demi-rotation à ce satellite; mais il n'auroit vu qu'un quart de rotation de la lune à son premier quartier, puisque dans cette position, l'hémisphère visible pour lui se seroit composé de la moitié de celui que nous ne voyons jamais, et de la moitié de celui que nous voyons toujours. De même, lorsque la lune est à son troisième quartier, l'observateur solaire verroit l'hémisphère opposé à celui qu'il voyoit au premier quartier et qui, conséquemment, se composeroit encore de la seconde moitié de l'hémisphère que nous voyons toujours, et de la seconde moitié de celui qui nous est toujours invisible; donc la lune est alors aux trois quarts de sa rotation. Enfin, notre satellite revenant en conjonction, l'observateur solaire le reverroit dans sa première position, et conséquemment il auroit vu la rotation entière de la lune. (*Voyez* la note XV.)

150. Multipliant la durée $29^j,5306$ d'une lunaison par 12, on a pour produit $354^j,367$, qui differe de la durée $365^j,242$ de l'année de $10^j,875$: donc l'année se compose de douze lunaisons et $10^j,875$, d'où il suit que 12 lunaisons ou l'année lunaire, étant plus courte qu'une année solaire de $10^j,875$, les époques des positions de la lune, relativement à la terre, different d'une année à l'autre. Mais ces différences, en s'accumulant et produisant des lunaisons entières, finissent enfin, après une période de 19 ans, à remettre les positions de la lune à des époques très-peu différentes de ce qu'elles étoient 19 ans auparavant. En effet, multipliant $365^j,242$ par 19, on a pour produit $6939^j,598$; et multipliant le temps $29^j,5306$ d'une lunaison par 235, on a pour produit 6939,691, qui n'excède le premier que de $0^j,093$ ou $2^h\ 14^m$ (*); donc 19 années solaires se

(*) En prenant l'année sidérale $365^j,256369$, ou plutôt l'année *Julienne* (Voyez *l'Astronomie* de Lalande, art. 1539), qui est de $365^j,25$; on trouve au contraire, que 19 de ces années excèdent 235 lunaisons d'environ $1^h\ 26^m$; mais cette manière de compter, qui étoit celle des anciens chez lesquels l'astronomie n'avoit pas encore le degré d'exactitude qu'elle a acquis depuis ce temps-là, ne doit pas être la nôtre, puisque nous considerons dans notre calendrier l'année tropique et non l'année sidérale, et encore moins l'année julienne.

composent à peu près de 235 lunaisons, ce qui ramène les phases de la lune à peu près aux mêmes époques. Cette période de 19 ans s'appelle *cycle lunaire.*

151. On appelle *nombre d'or* le nombre d'années écoulées à une époque quelconque, depuis le commencement du cycle lunaire. Mais au commencement de l'ère chrétienne, il y avoit déjà une année que le cycle étoit révolu; donc, pour avoir le nombre d'or correspondant à une année déterminée par sa date, il faut y ajouter l'unité et diviser la somme par 19, le restant de la division sera le nombre d'or demandé. Ainsi, pour cette année 1806, je divise 1807 par 19, ce qui donne le quotient 95 et le reste 2 qui, conséquemment, est le nombre d'or correspondant à 1806.

152. On appelle *épactes* des nombres qui expriment pour chaque année l'âge qu'avoit à peu près la lune à la fin de l'année précédente, c'est-à-dire le temps qui s'étoit écoulé à cette époque depuis la nouvelle lune précédente : or, d'après ce que nous avons vu, art. 150, l'épacte de la seconde année du cycle est d'environ 11 jours; celle de la troisième année est d'environ 22 jours; celle de la quatrième, d'environ 33 jours ou une lunaison et 3 jours; ainsi de suite. Donc, pour avoir avec cette approximation l'épacte pour une année, il faudra retrancher une unité du nombre d'or, et multiplier le reste par 11; ce produit, ou son excès sur le plus grand multiple de 30, sera à peu près l'épacte demandée.

Par exemple, nous avons trouvé dans l'article précédent que le nombre d'or pour cette année 1806 est 2; retranchant de ce dernier nombre l'unité, et multipliant le reste 1 par 11, nous aurons pour épacte de cette année 11 jours; et considérant la lunaison comme composée de 29 à 30 jours, on aura la première opposition vers le 4 de janvier, et la première conjonction vers le 19.

153. Au reste, tous ces calculs ne donnent que par une estime grossière, les époques des phases de la lune; mais à cause qu'il est très-utile, comme nous le verrons bientôt, de pouvoir déterminer avec une précision assez exacte, les époques lunaires; nous joignons la table IX qui pourra servir si l'on se trouvoit dépourvu de *Connoissance des temps;* car, si l'on a ce dernier ouvrage, on y trouvera pour tous les mois, et au bas de la première page de chaque mois, les époques des phases lunaires qui devront avoir lieu dans cette partie de l'année.

Voici l'usage de la table IX :

Le N.° 1 contient dans la première colonne les années pendant lesquelles on pourra s'en servir : la seconde colonne donne, pour les années communes, les jours, heures et minutes de janvier auxquels arrive à peu près la première

phase de ce mois, indiquée dans la quatrième colonne par l'un des quatre chiffres 1, 2, 3 et 4, qui représentent respectivement la nouvelle lune ou première phase, le premier quartier ou seconde phase, la pleine lune ou troisième phase, et le dernier quartier ou quatrième phase; mais il faut y ajouter un jour pour avoir cette phase dans les années bissextiles.

La lettre A qui se trouve dans les trois numéros de cette table, indique l'anomalie de la lune, et les nombres qui sont dans cette colonne ne dépassent pas 1000; il faut même avoir l'attention lorsqu'on ajoute ces nombres, et que la somme excède 1000, de n'écrire que l'excédent; par exemple, si la somme est 1324, on n'écrira que 324. En effet, 1000 marquant une révolution complète de la lune relativement à son apogée; le nombre 1324 exprime une révolution entière plus la 0,324 partie d'une autre révolution. Or, comme les inégalités de la lune recommencent à être les mêmes après chaque révolution, on ne doit plus avoir égard à la révolution achevée, mais à l'excédent 324, qui exprime la distance actuelle de la lune à son apogée.

La lettre P du N.° II indique, comme dans le N.° I, la phase de la lune. Mais nous nous servirons encore des chiffres 5, 6, 7 et 8, pour exprimer les retours respectifs des première, seconde, troisième et quatrième phases de la lune : de manière que dans ces deux premiers numéros, une nouvelle lune est indiquée par la somme 1 ou 5 du nombre P pris dans les années avec celui P pris dans les mois; un premier quartier par la somme 2 ou 6 des nombres P des années et des mois; une pleine lune par la somme 3 ou 7 des nombres P des années et des mois; enfin un dernier quartier par la somme 4 ou 8 des nombres P des années et des mois.

Cela posé, pour avoir toute autre phase que la première de l'année, ajoutez ensemble les nombres qui sont pour l'année proposée dans le N.° I, et dans la ligne trouvée pour le mois N.° II; puis avec le nombre A qui résulte de la somme des deux nombres A de chaque table, cherchez dans le N.° III l'équation correspondante à ce nombre, qu'il faut toujours ajouter à la somme des temps trouvés, pour avoir le vrai temps de la phase cherchée, en observant 1.° de prendre cette équation dans la partie du N.° III, qui convient à l'espèce de phase; 2.° de prendre à peu près et à la vue, les parties proportionnelles; 3.° d'augmenter d'un jour les temps marqués dans les cases des mois de janvier et février, quand l'année sera bissextile.

Les phases ainsi trouvées étant pour le méridien de Paris, il sera aisé de les obtenir pour tout autre point de la surface de la terre, dont on connoîtra la

longitude, en ajoutant ou retranchant à l'heure trouvée de la phase, la différence des méridiens réduite en temps, suivant que la longitude de l'observateur sera orientale ou occidentale.

Exemple I. Etant à Pondichéry (ville de l'Indostan), dont la longitude est de 77°31′30″, ou $5^h 10^m 6^s$ orientale; on demande le temps de la pleine lune en juillet 1807.

				A	P
Pour 1807 (table IX, N.° I).	0^j	13^h	59′	611	4
Pour juillet (table IX, N.° II).	18	6	7	232	3
Somme.	18	20	6	843	7
Equat. pour les syzygies (table IX, N.° III).		6	48		
Somme.	19	2	54		
Longitude de Pondichéry.		5	10		
Somme.	19	8	4		

Donc la pleine lune aura lieu dans cette ville, le 19 juillet, à $8^h 4^m$ du soir.

II. Etant à Boston (ville des Etats-Unis), dont la longitude occidentale est de 73°17′ ou $4^h 53^m 8^s$; on demande le temps de la nouvelle lune pour le mois de février de l'année 1816.

				A	P
Pour 1816 (table IX, N.° I).	5^j	5^h	50^m	107	2
Pour février (table IX, N.° II).	20	19	15	881	3
Somme.	26	1	5	988	5
Equat. pour les syzygies (table XI, N.° III). .		14	28		
Somme.	26	15	33		
A cause que cette année est bissextile, j'ajoute.	1				
Somme	27	15	33		
Longit. occident. de Boston		4	53		
Diff. qui est le temps demandé.	27	10	40		

Donc la nouvelle lune du mois de février 1816, aura lieu, pour Boston, le 27 à $10^h 40^m$ du soir.

Ces tables, que M. de La Caille a insérées dans l'édition qu'il a donnée du *Traité de Navigation* de M. Bouguer; sont suffisantes pour trouver, par un calcul fort simple, les temps des phases de la lune à moins de trois heures près, ce qui, comme nous le verrons bientôt, remplit l'objet principal pour lequel les marins désirent connoître ces temps. Mais, je le répète, ces tables deviennent absolument inutiles lorsque l'on a la *Connoissance des temps* de l'année pour laquelle on calcule; car les phases y sont marquées avec beaucoup d'exactitude pour le méridien de Paris, et l'on n'a plus conséquemment, qu'à y faire la correction relative à la longitude du lieu de l'observation.

CHAPITRE HUITIÈME.

Du Flux et du Reflux, et de la manière de calculer les Marées.

154. L'OBSERVATEUR placé sur la côte d'une grande mer, telle que l'Océan Atlantique, voit deux fois par jour la mer inonder la plage, et se retirer à la suite de ces submersions. Cette oscillation de la mer, dont la période est d'un peu plus de douze heures, s'appelle *marée.* L'ondulation de la mer vers la côte, et qui inonde la plage, s'appelle *flux* ou *flot;* celle dans le sens inverse, qui laisse la plage à sec, s'appelle *reflux* ou *jusant*, ou quelquefois, mais rarement, *ebb.* Après le flot, la mer est dite *pleine;* mais nous l'appellerons plus souvent dans ce cas-là *haute mer :* elle reste dans cet état, avant de se retirer sensiblement, environ un demi-quart d'heure, ce qui fait dire alors que la mer est *étale;* se retirant ensuite, ce qui est le jusant, la mer est ramenée à sa plus grande dépression, et on l'appelle *basse mer.*

La somme des deux hautes mers consécutives, c'est-à-dire qui n'ont qu'une basse mer intermédiaire, s'appelle *marée totale.*

155. Le flux et le reflux de la mer, phénomène si intéressant pour les marins, et qui a dû paroître si extraordinaire avant que l'étude approfondie de la physique céleste en eût dévoilé le secret, peut être favorisé ou contrarié par les vents; cependant ceux-ci n'en sont nullement la cause; car par les temps les-

plus calmes, les marées suivent toujours, dans leurs retours et périodes, des lois régulières qui servent à faire connoître les heures auxquelles doivent avoir lieu les haute et basse mer. Mais un grand nombre d'observations suivies avec soin, et la méditation sur ce phénomène, son intensité et ses périodes, a bientôt fait connoître qu'il n'est, comme tous ceux de la physique céleste, qu'un résultat de la pesanteur universelle. En effet, l'on a observé que la période moyenne de deux marées consécutives est de $24^h 50^m 26^s,53$, c'est-à-dire que la mer étant pleine, par exemple, aujourd'hui à 7^h du matin, elle l'est encore demain au matin à $7^h 50^m 26^s,53$, et qu'entre ces deux retours de haute mer, il y en a eu une à peu près au même intervalle de temps de l'une et de l'autre : ainsi le retard moyen d'une marée à celle du jour suivant, est de $50^m 26^s$, ce qui est justement le retard moyen du passage de la lune à un même méridien (*).

Cependant le temps du retard de deux marées séparées par une seule que nous appellerons *seconde marée*, n'est pas constamment de $50^m 26^s$; il est quelquefois plus grand, d'autrefois plus petit; et l'observation a fait voir que ces variations sont justement les mêmes que celle qu'éprouve le retard du passage de la lune au méridien. Il est donc manifeste, d'après ces observations, que la lune influe essentiellement sur les marées : et quelle peut être cette influence, si ce n'est la force d'attraction qui agit entre la terre et son satellite?

156. Mais si cette force a de l'influence sur les marées, de même celle d'attraction du soleil sur la terre devra aussi y influer. C'est effectivement ce que l'observation vient encore confirmer, en nous donnant des résultats qui sont la combinaison des attractions du soleil et de la lune sur la terre; mais qui pourtant ne sont que de simples modifications du phénomène produit par la lune : car, quoique la masse de ce dernier astre soit beaucoup plus petite que celle du soleil; cependant sa distance à la terre étant aussi beaucoup moindre que celle du soleil; l'influence lunaire sur les marées conserve toujours sa supériorité sur la solaire (*voyez* la note XVI). D'ailleurs, nous verrons bientôt que, d'après l'observation des plus grandes marées totales de la rade de Brest, la première de

(*) Et non pas, comme l'ont marqué quelques auteurs de *Traités de Navigation*, 48^m (Dulague), ou $48^m 46^s$ (Bezout) : car il est bien vrai que dans 24 heures solaires, depuis le dernier passage de la lune au méridien; cet astre n'auroit plus que $48^m 46^s$ à rester pour atteindre le méridien, s'il s'avançoit aussi vite que le soleil vers l'occident dans cet intervalle de temps; mais la même cause qui a retardé la lune sur le soleil de $48^m 46^s$ dans 24 heures, la retarde encore d'environ $1^m 40^s$ dans $48^m 46^s$.

ces influences est triple de la seconde; mais que la théorie de l'attraction ne la donne qu'environ deux fois et demie aussi forte.

Actuellement voyons avec un peu plus de détail quelles doivent être les circonstances du phénomène des marées, en remontant aux causes; et commençons à ne considérer que l'effet que doit produire l'attraction d'un seul astre, par exemple le soleil, sur l'une de ces grandes masses d'eau qui couvrent une partie de notre globe terrestre.

157. Il est évident que si la terre n'étoit qu'une masse fluide, elle auroit, abstraction faite des perturbations des astres sur cette planète, la figure d'un vrai ellipsoïde de révolution. Mais par l'effet de la force d'attraction du soleil sur les molécules de ce sphéroïde, qui est en raison inverse du carré des distances: il est visible que les parties les plus voisines de l'astre, c'est-à-dire celles de l'hémisphère éclairé qui sont le plus près de la ligne des centres du soleil et de la terre, étant plus attirées vers le premier de ces deux corps célestes que le centre du second, s'éloignent de ce centre pour se rapprocher du soleil. Il y a donc dans cette partie, *haute mer solaire* (*). Mais, par la même raison, le centre de la terre étant plus voisin du soleil que les parties de l'hémisphère obscur qui se rapprochent le plus du prolongement, opposé au soleil, de la ligne des centres, ces parties restent en arrière du centre, et par conséquent il y a de même dans cette partie, *haute mer solaire*, quoiqu'elle soit antipode de la première.

158. Mais puisque dans une position du soleil, les eaux s'élèvent en sens inverse suivant la direction de la ligne des centres, et forment de part et d'autre du plan, passant par le centre de la terre et perpendiculaire à la ligne des centres, des espèces de ménisques à bases opposées; il est évident que la masse totale d'eau qui couvre la terre étant sensiblement constante, les élévations dont nous venons de parler sont aux dépens des parties de la masse fluide comprises entre ces ménisques. Il y a donc basse mer solaire à 90° de part et d'autre des points où il y a pleine mer solaire. Donc, après la haute mer solaire les eaux vont en diminuant sans cesse pendant 6 heures, et à la fin de ce temps-là elles sont à leur plus grande dépression.

159. Ces résultats se modifient d'après la distance du soleil à la terre; en effet, il est évident que plus le soleil est près de la terre, plus aussi l'influence est

(*) Nous appelons ainsi la marée causée par le soleil, et nous appelons de même, *haute mer* ou *pleine mer lunaire* celle qui provient de l'influence de la lune.

grande, et réciproquement. C'est par cette raison que les marées solaires d'hiver sont plus fortes que celles d'été, et réciproquement, abstraction faite de la latitude du lieu de l'observation (*voyez* la note XVI, art. 2): car le soleil est à son périgée en hiver et à son apogée en été.

De même, la déclinaison du soleil doit encore modifier ces résultats; car, la terre étant un sphéroïde applati vers les pôles, et par conséquent renflé vers l'équateur, les rayons de la terre, placés sur la ligne des centres, augmentent à mesure que les déclinaisons du soleil diminuent, ce qui rapproche d'autant les parties de la surface terrestre qui sont sur la ligne des centres, du soleil, et éloigne les antipodes; donc les marées doivent augmenter.

160. Ce que nous venons de dire pour le soleil a de même lieu pour la lune, mais d'une manière encore plus prononcée (art. 159). Donc, si le soleil et la lune sont en conjonction ou en opposition, c'est-à-dire dans les syzygies, les marées solaires et lunaires étant dans le même sens, il en résultera une marée qui sera la plus grande de toute la demi-lunaison, puisqu'alors les forces composantes l'une par le soleil l'autre par la lune, formeront le plus petit ou le plus grand angle qu'elles puissent former pour une même latitude de la lune. Ces marées s'appellent *grandes eaux*, ou *malines* ou *reverdies*. Mais plus les eaux ont été hautes dans le flot, plus aussi elles se retirent dans le jusant suivant, à la fin duquel elles sont dans leur plus grande dépression; ce qui est évident, puisqu'à 90 degrés de ces points-là, elles sont dans leur plus grande hauteur.

161. L'intensité de ces malines augmente encore dans les circonstances suivantes : 1.° lorsque les syzygies ont lieu aux nœuds mêmes de la lune, puisqu'alors les forces composantes solaires et lunaires étant, suivant une même ligne droite, les deux marées partielles coïncident, ce qui donne pour marée résultante la somme des deux marées partielles. Ainsi, dans les éclipses de lune ou de soleil, les malines sont plus considérables que dans les oppositions et conjonctions sans éclipses.

2.° Lorsque les syzygies ont lieu au périgée de la lune, et encore plus lorsque le soleil est aussi périgée (art. 159).

3.° Lorsque les syzygies ont lieu aux équinoxes, à cause de la renflure du sphéroïde terrestre vers l'équateur (art. 159).

En réunissant toutes ces circonstances, l'on voit que le maximum des grandes eaux n'auroit lieu que si, dans l'instant d'une syzygie, les nœuds de la lune étoient sur la droite qui passe par les points équinoxiaux, et si la ligne des apsides

de chacun de ces deux astres étoit aussi dans la direction de la droite des points équinoxiaux ; mais les deux périgées étant tournés du même côté de la syzygie qui a donné lieu à la *maline*, si elle est une conjonction, et tournés en sens inverse, si la syzygie en question est une opposition.

Au reste, cette dernière circonstance ne peut avoir lieu de nos jours, puisque la longitude de l'apogée n'est actuellement que d'environ 99° 56′, et qu'elle ne sera de 180° que dans 4664 ans. (*Voyez* la note XVI.)

Cela n'empêche pas que le concours d'une partie de ces circonstances, ne donne des grandes marées beaucoup plus considérables que d'autres, et qui, lorsqu'elles sont favorisées par des vents du large, peuvent occasionner des inondations ; telle a été, par exemple, la marée du 12 septembre 1798, qui inonda les rues de la ville de Saint-Malo, ainsi que ses environs, et y causa plusieurs accidens. Cette grande maline eut lieu, parce que la nouvelle lune et le périgée de cet astre coïncidèrent, et qu'à cette époque le soleil n'est pas éloigné de l'équateur.

162. Par la raison contraire à celle que nous avons donnée à l'art. 160, il suit que les plus petites marées doivent avoir lieu dans les quadratures, car c'est l'époque où la haute mer lunaire est d'autant plus près de la basse mer solaire, que la latitude de la lune est plus petite. De même, la basse mer lunaire est alors affoiblie par la haute mer solaire, qui est d'autant plus près de la première, que la quadrature se rapproche davantage de l'écliptique ; de manière que si au moment de la quadrature, la lune se trouve à l'un de ces nœuds, la haute mer résultante n'est que l'excès de la lunaire sur la solaire, et de même, la basse mer résultante est égale à celle de la lune moins celle du soleil.

Ces marées de quadratures s'appellent *mortes-eaux*, et peuvent devenir encore plus petites, suivant certaines circonstances, qui sont, 1.° lorsque la lune est à son apogée, et le soleil à son périgée dans le moment de la quadrature, puisqu'alors l'influence de la lune étant à son minimum, est le plus contrariée par l'influence du soleil qui est à son maximum ; 2.° lorsque dans le moment de la quadrature le soleil est à l'équateur, et que la lune est dans ses plus grandes déclinaisons, puisqu'alors l'influence du soleil est augmentée, et celle de la lune diminuée ; 3.° lorsque la lune dans les quadratures est sur l'écliptique, puisqu'alors, comme nous l'avons dit précédemment, la haute mer lunaire coïncide avec la basse mer solaire, et réciproquement.

163. Par un grand nombre d'observations faites avec le plus grand soin à Brest, l'on a trouvé que la plus grande marée totale est de 5^{m},888, et que la plus petite

est de $2^{m}789$, d'où il suit que la première est, à peu de choses près, double de la seconde. Donc, représentant cette dernière par l'unité; de plus, représentant par l l'influence lunaire et par s l'influence solaire, on aura $l+s=2$ et $l-s=1$ (*); donc $2l=3$ et $2s=1$; et divisant la première équation par la seconde; ensuite, chassant le dénominateur, il vient $l=3s$, d'où l'on voit que l'influence lunaire est triple de la solaire. Nous verrons à la note XVI, article 1.er, que ces deux influences ne sont réellement que dans le rapport de 2, 6 à 1.

164. Si l'effet de l'influence des astres sur les marées étoit aussi prompt que la cause, il est clair, qu'abstraction faite de l'influence solaire, la haute mer lunaire devroit avoir lieu à l'instant du passage de la lune au méridien de l'observateur, et la basse mer un peu plus de six heures après. Enfin, le grand axe du sphéroïde aqueux par l'influence de la lune, devroit toujours être dans la direction des centres de ce dernier astre et de la terre. Cependant il en est autrement; et l'observation fait voir que la haute mer lunaire n'a lieu que plusieurs heures après le passage de la lune au méridien. Voici, ce me semble, comment on pourroit expliquer ce phénomène.

La terre, tournant d'occident en orient avec une vitesse de $459^{\text{mèt.}},29$ par seconde, les molécules du fluide qui couvre une partie de la surface de la terre ont la même vitesse. Mais l'influence de l'astre perturbateur tend évidemment à diminuer cette vitesse, puisque si la terre ne tournoit pas autour de son axe, et si la lune avoit un mouvement de révolution autour de la terre d'orient en occident, elle entraîneroit les eaux dans le même sens. Ainsi, l'on peut considérer le flux lunaire comme un simple retard dans le mouvement d'occident en orient, des molécules d'une certaine partie du fluide qui couvre la terre sur les autres, ce qui altère l'équilibre des eaux. Mais observons que les molécules qui sont plus exposées à l'attraction de la lune que celles qui sont à leur occident, éprouvent de ces dernières un obstacle dans leur retard ou flux, lequel diminue progressivement à mesure que les molécules placées à l'occident sont plus influencées par la lune. Donc, le flux ne peut s'effectuer que par des mouvemens successifs, qui ne produisent leur effet entier que quelque temps après leur cause; c'est pourquoi la haute mer lunaire n'a lieu que plusieurs heures après le passage de la lune au méridien supérieur, ou au méridien inférieur.

(*) Nous supposons que la lune est en opposition ou en conjonction à l'un de ses nœuds; ce qui doit être dans les plus grandes marées dont nous parlons.

Il en est de même pour les marées solaires, et par conséquent pour la combinaison des marées solaires et lunaires, ou la marée résultante qui n'arrive jamais qu'après l'heure à laquelle elle devroit avoir lieu. Mais on observe que la haute mer résultante, est toujours plus près de la ligne des centres de la lune et de la terre que de celle du soleil et de la terre, ce qui doit être, puisque l'influence de la lune étant plus grande que celle du soleil, la marée résultante participe plus de la première que de la seconde.

165. Au reste, l'intensité du flux et reflux dépend principalement des causes suivantes : 1.° de la grandeur des mers dans lesquelles ce phénomène a lieu. Plus une mer est grande et profonde, plus aussi la marée est forte, ce qui doit être, puisque plus la masse fluide sur laquelle la lune ou le soleil exerce son influence est grande, plus aussi les molécules, qui sont les premières affectées d'un retard dans leur vitesse d'occident en orient, pressent d'orient en occident un plus grand nombre de molécules qui n'étoient pas encore retardées par l'influence de l'astre, ou l'étoient beaucoup moins. D'où résulte une accumulation plus considérable de ces molécules à l'occident des premières, et par conséquent un plus grand flux et reflux; cette dernière circonstance étant une suite nécessaire de la première. C'est par cette raison que dans les petites mers, telles que la mer Noire, la mer Caspienne et une grande partie de la Méditerranée, les marées sont presqu'insensibles.

2.° De la configuration des ports, hâvres, etc., qui peuvent retarder les mouvemens des marées, en présentant des obstacles qui rompent les ondulations, ou les accélèrent en présentant au flux et reflux des golfes, rivières, canaux, dans lesquels s'engouffre l'eau. Par exemple, dans le golfe de Venise les marées sont assez sensibles, quoiqu'elles soient presque nulles dans le reste de la Méditerranée.

3.° De la latitude du lieu de l'observation : car si la latitude est trop grande, il n'y aura qu'une marée insensible. En effet, si la lune, par exemple, décrivoit l'équateur; il est clair qu'étant alors à 90 degrés des pôles, il y auroit toujours basse mer lunaire aux deux pôles, et ce phénomène se modifieroit pour des lieux plus rapprochés de l'équateur, par exemple, ceux placés sous les cercles polaires. De même, la modification de ce phénomène a lieu lorsque la lune se rapproche des pôles. Mais la latitude de la lune n'étant guère que de 5 degrés, elle ne peut s'éloigner de l'équateur que d'environ 29 degrés, lors même que ses nœuds coïncident avec les points équinoxiaux. Donc les mers placées sous les pôles ou près des pôles, n'ont presque pas, ou même pas, de marées. Telles sont

la mer Baltique et la mer de Laponie (*). Il est vrai que la petitesse de ces deux mers contribueroit aussi à rendre leurs marées presqu'insensibles, quand même elles seroient placées beaucoup plus près de l'équateur.

166. On appelle *établissement d'un port de mer*, l'heure à laquelle la haute mer a lieu le jour de la nouvelle ou pleine lune dans ce port. Nous donnons, à la fin de cet ouvrage, une table de cet établissement pour les principaux ports, que nous avons extraite de la *Connoissance des temps* de 1801. Nous n'y avons fait de changemens que dans les établissemens des ports de Dieppe et d'Ostende, que MM. Poutus et Porquet, professeurs respectifs de navigation dans ces deux villes, ont trouvés différens de ce qu'ils sont marqués dans la *Connoissance des temps* de 1801.

167. Si le retard des marées d'un jour à l'autre étoit constamment $50^m 26^s$ (art. 155), il seroit aisé de trouver pour un jour quelconque, l'heure de la haute mer dans un port dont on connoîtroit l'établissement par le moyen de la table x, puisque cherchant, soit par le calcul (art. 153), ou plutôt par le moyen de la *Connoissance des temps*, le jour de la syzygie la plus voisine, on n'auroit qu'à multiplier le nombre de jours compris depuis cette syzygie jusqu'à celui pour lequel on calcule, par $50^m 26^s$, et ajoutant ou retranchant ce produit de l'heure de l'établissement, suivant que la syzygie est avant ou après le jour en question, on auroit pour somme l'heure demandée de la pleine mer. Par exemple, supposons que l'on demande l'heure de la haute mer pour Brest, le 20 juillet 1804 au soir. On trouve, dans la *Connoissance des temps* de cette année, que la pleine lune est le 22 à $5^h 34^m$ du soir pour Paris; mais la longitude de Brest en temps est de $27^m 10^s$ occidentale, ce qui donne pour heure de la pleine lune dans ce port $5^h 34^m - 27^m = 5^h 7^m$; ainsi, à cause que le temps pour lequel nous calculons, est deux jours auparavant la pleine lune, il faudroit retrancher de l'heure $3^h 33^m \frac{1}{2}$ de l'établissement (tab. x), la quantité $1^h 41^m$, ce qui donneroit pour l'heure de la pleine mer $1^h 52^m \frac{1}{2}$.

168. Mais cette méthode seroit très-défectueuse, puisque nous avons vu précédemment qu'il y a une foule de circonstances qui tendent à faire varier ce re-

(*) On l'appeloit autrefois mer *Blanche*, et même elle est encore désignée sous ce nom-là par plusieurs géographes : mais, avec raison, M. de Fleurieu a trouvé que cette dénomination est impropre, et a pensé qu'il valoit mieux l'appeler mer de *Laponie*, puisqu'elle est enfermée dans les terres de la Laponie russe. (Voyez *Observations sur la division hydrographique du Globe*, par C. P. Fleurieu.)

tard moyen des marées. C'est pour obvier en partie à cet inconvénient qu'on a calculé la table XI, qui est à peu près conforme aux variations que doivent éprouver les temps des marées. En voici l'usage que nous appliquerons tout de suite à l'exemple précédent.

Le temps pour lequel nous calculons, étant à peu près deux jours avant la pleine lune, l'on trouve qu'à 2 jours, pris dans la première colonne de la table XI, le nombre qui lui correspond dans la cinquième colonne, ayant pour titre, *avant la nouvelle ou pleine lune*, est $10^h 43^m$. On ajoute cette quantité avec l'heure de l'établissement du port de Brest, qui est $3^h 33^m \frac{1}{2}$ (table X), ce qui donne pour somme $14^h 16^m \frac{1}{2}$, on, en rejetant les 12 heures, $2^h 16^m \frac{1}{2}$; ainsi l'on a pour une première approximation du temps demandé de la pleine mer, le 20 juillet à $2^h 16^m \frac{1}{2}$. Mais la pleine lune pour Brest a lieu le 22 à $5^h 7^m$, ce qui donne pour intervalle de temps entre celui de la syzygie et le moment approché de la pleine mer, $2^j 2^h 50^m \frac{1}{2}$, ou, en nombre rond, $2^j 3^h$. Or, l'on trouve dans la table XI que pour $2^j 3^h$ répond dans la cinquième colonne, le nombre $10^h 37^m$. Ajoutant cette quantité avec l'heure de l'établissement du port de Brest, qui est $3^h 33^m \frac{1}{2}$; on a $14^h 10^m \frac{1}{2}$, ou $2^h 10^m \frac{1}{2}$, ce qui est, avec une précision suffisante, l'heure de la pleine mer à Brest le 20 juillet 1804.

AUTRE EXEMPLE. L'on demande l'heure de la pleine mer du matin à Archangel (Russie), le 23 septembre 1806, voici le type du calcul :

Premier quartier de la lune pour Paris.	$19^{sept.}$ 4^h 29^m du soir.	
Longitude orientale d'Archangel en temps.	2 27	
Différence qui est l'heure du premier quartier pour Archangel. . . .	19 2 2	
Du 19 après midi au 23 avant midi, on a à peu près $3^j \frac{1}{2}$, ce qui correspond à	9^h 17^m	(4me col. tab. XI).
Etablissement d'Archangel.	6	(tab. X).
Somme.	3 17	

Ainsi, pour une première approximation, la haute mer est le 23 septembre 3^h 17^m matin, ou en temps astronomique, le.	$22^{sept.}$ 15^h 17^m	
Heure du premier quartier de la lune.	19 2 2	
Différence.	3 13 15	, qui répond
dans la quatrième colonne de la table (XI) à.	9 20	
Etablissement d'Archangel.	6	
Somme.	3 20	

Donc la pleine mer du matin, à Archangel, le 25 septembre de l'an 1806, a eu lieu à $3^h 20^m$.

169. Nous finirons ce chapitre, par observer que l'influence du soleil et de la lune sur les mers qui couvrent une grande partie de la surface de la terre, doit produire des effets semblables sur la masse du fluide qui enveloppe toute la terre, c'est-à-dire, sur l'atmosphère. C'est en effet ce qui a lieu, et d'une manière beaucoup plus prompte que relativement aux mers, parce que le fluide qui compose l'atmosphère est beaucoup plus subtil que l'eau, et par conséquent beaucoup plus susceptible d'obéir aux impressions des astres que la mer. On observe souvent que, par un beau ciel et dans un pays découvert, les vents suivent la marche du soleil, et que l'intensité de ces vents croît comme la hauteur ou l'abaissement de cet astre relativement à l'horizon : l'observateur attentif aperçoit les mêmes phénomènes relativement à la lune; et enfin il voit que dans les syzygies les vents sont plus forts. Mais une preuve encore plus évidente de ce que nous venons de dire, et qui ne peut échapper, même à l'homme le moins observateur, ce sont les vents qui règnent constamment de l'est à l'ouest dans presque toute la zone torride, et qu'on appelle vents *alisés*. Il est évident que la cause de ces vents est la même que celle des courans que l'on éprouve dans cette zone, et qui ont aussi la direction de l'est à l'ouest, suivant la marche diurne du soleil et de la lune autour de la terre.

Cependant l'on observe beaucoup d'exceptions à ces règles générales; mais elles proviennent,

1.° De la localité qui, ainsi que pour les marées, altère l'intensité et même quelquefois change la direction des vents, et le fait d'une manière bien plus prononcée relativement à l'atmosphère que relativement à la mer, parce que la première de ces masses fluides, se composant de molécules beaucoup plus déliées et subtiles que la seconde, les obstacles, tels que les montagnes, les sinuosités des terres, produisent des effets bien plus grands que par rapport aux eaux.

2.° De la sérénité du ciel : car, par un temps couvert, la partie de l'atmosphère, qui est en-dessous des nuages, étant moins influencée, et quelquefois l'étant très-peu, à cause de l'amas épais de vapeurs qui se trouve alors entr'elle et l'influence du soleil et de la lune, s'agite en différens sens par plusieurs causes absolument indépendantes de celles que nous considérons.

3.° De la raréfaction de l'atmosphère par l'effet de la chaleur du soleil.

4.° De la propension des molécules qui composent l'atmosphère à rétablir

l'équilibre dans cette masse fluide, ce qui fait que par les latitudes moyennes de 30 à 36°, c'est-à-dire un peu en dehors de la lisière des vents alisés, l'on éprouve souvent des vents d'ouest.

Le phénomène le plus remarquable dans les vents, est celui qui existe dans la partie septentrionale de la mer des Indes. Depuis octobre jusqu'en avril, le vent vient du nord-est; mais ensuite, depuis avril jusqu'en octobre, il vient du sud-ouest. Cette diversité de vents s'appelle *moussons*. La cause de ce phénomène est, que l'air étant raréfié sur les sables de l'Arabie, de la Perse et de l'Inde pendant l'été, l'air s'y porte en abondance, et la mousson du sud-ouest y règne pendant l'été; mais dans la partie australe de la mer des Indes, le vent est toute l'année au sud-est, parce que la chaleur du continent de l'Afrique l'attire un peu vers le nord.

Au reste, la table XII, que j'ai extraite de l'*Abrégé de Navigation* de M. Delalande, pourra servir de guide aux navigateurs, pour connoître les vents et les courans qui règnent le plus généralement dans les principales parties de la mer.

LIVRE TROISIÈME.

DANS LEQUEL ON APPLIQUE LES CONNOISSANCES PRÉCÉDENTES EN ASTRONOMIE, A LA NAVIGATION.

Nous voici enfin arrivés à la partie de notre ouvrage, où nous allons faire la plus belle et la plus utile application possible des connoissances astronomiques que nous avons données à nos lecteurs dans le livre précédent.

Mais toutes les observations astronomiques des navigateurs, se réduisant à mesurer des hauteurs angulaires des astres, et des distances angulaires de la lune au soleil ou à une étoile, nous allons commencer par décrire les instrumens dont se servent les marins pour faire ces observations; ensuite nous en ferons connoître l'usage; et enfin nous parviendrons à la solution complète du problème général que nous nous sommes proposé de résoudre, et qui est énoncé au commencement de cet ouvrage.

CHAPITRE PREMIER.

Des instrumens dont se servent les marins pour faire leurs observations astronomiques.

170. Ces instrumens sont *l'octant* et *le sextant* qui servent également à observer la hauteur des astres (*), enfin *le cercle de réflexion* qui sert à observer la distance angulaire de la lune au soleil, ou à une étoile.

(*) Je ne parle pas du *quartier anglois* ou *quart de nonante*, dont se servoient autrefois les marins pour la mesure des hauteurs des astres; mais qu'ils ont presque tous abandonné, depuis la découverte des instrumens dont nous allons nous occuper, et qui sont bien plus exacts que le quartier anglois.

La construction de ces instrumens pose sur le principe suivant, qui est lui-même la base de toute la *catoptrique* ou science de la vision réfléchie, c'est-à-dire de la science qui enseigne les lois que suit la lumière réfléchie par les miroirs.

Lorsqu'un rayon de lumière rencontre un miroir, il se réfléchit en faisant, avec la surface de ce miroir, un angle égal à celui sous lequel il l'a rencontré. Le premier de ces angles, qui s'appelle *angle d'incidence*, est dans le même plan que le second qui s'appelle *angle de réflexion*. Cette loi, qui se démontreroit géométriquement si, de même que l'ont fait plusieurs philosophes, l'on considéroit comme axiome que la nature agit toujours par les voies les plus courtes (*), a du moins été prouvé incontestablement par l'expérience suivante, qui est très-

(*) En effet, soit m un corps lumineux; ab un miroir sur lequel tombe le rayon de lumière md; eh un autre miroir parallèle au premier, sur lequel vient se réfléchir en K le rayon de lumière suivant la droite dK. On aura donc, d'après la loi de la nature que nous venons de considérer comme axiome, l'angle mdK qui devra être un *minimum*. Il ne s'agit donc plus que de trouver où doit être placé le point d, afin que cette condition soit remplie : or, je dis qu'il doit être placé de manière que l'angle mdb soit égal à celui Kda. Pour le prouver, abaissons du point K une perpendiculaire Kf sur ab, que nous considérons comme l'intersection du miroir sur lequel tombe le rayon de lumière avec le plan qui passe par les rayons d'incidence md et de réflexion dK : prenons sur la partie inférieure tf une longueur tn = Kt; menons du point n à celui m la droite ndm, et du point d où la ligne ab est coupée par la droite nm, tirons au point K la ligne dK; il est clair que par cette construction, on aura la ligne curviligne Kdm, qui sera la plus petite de toutes celles que l'on peut mener du point m au point K, en passant par un des points d de la ligne ab : car, supposons un autre point quelconque p ou p' pris sur la ligne ab, et joignons chacun de ces deux points à ceux K et m par les lignes pK, pm, p'K et $p'm$; menons aussi des points p, d, p' au point n les droites pn, dn et $p'n$. Il est manifeste que puisque ba est perpendiculaire sur Kn, et que Kt = tn, nous aurons Kp = pn; Kd = dn, Kp' = $p'n$; donc $np + pm$, ou npm = Kpm, $nd + dm$, ou ndm = Kdm et $np' + p'm$ ou $np'm$ = K$p'm$. Or, des trois lignes npm, ndm, et $np'm$, il n'y a que la seconde qui soit une droite, les deux autres étant curvilignes : donc Kdm < Kpm et Kdm < K$p'm$. Mais les angles mdb, adn sont égaux, comme opposés par le sommet; et de plus, les angles Kda, adn sont aussi égaux, puisque les triangles K$p't$, $tp'n$ ont tous leurs côtés égaux. Donc, dans le vide l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, et il est évident que la même chose a lieu lorsque les rayons de lumière traversent notre atmosphère; car, si l'un de ces rayons passant d'un milieu plus rare dans un autre milieu plus dense, éprouve une certaine courbure que nous savons être dans le plan vertical (art. 120); il est évident que dans son reflet, sortant du milieu plus dense pour retourner dans le plus rare, sa courbure diminuera dans la même proportion qu'elle a augmenté dans le premier cas. Ainsi, ces deux courbes seront relativement l'une à l'autre, dans la même position que les rayons d'incidence et de réflexion qui seroient projetés dans un espace dépouillé de tout air ambiant, et par conséquent en ligne droite. Fig. 23.

facile et que tout le monde peut faire. Faites tomber par un petit trou, un rayon solaire sur un miroir placé dans une *chambre obscure* (*), vous le verrez se réfléchir en faisant l'angle de réflexion égal à celui d'incidence.

Fig. 24. 171. *L'octant* se compose d'un demi-quart de cercle B C qui, conséquemment, n'est que de 45 degrés, mais que cependant l'on divise à partir de C ou o, en 90 parties égales qui, comme nous allons le voir tout à l'heure, équivalent chacune à un degré. Le rayon A C de cet instrument est d'environ 5 décimètres. Il y a sur le côté A C une pinnule O, ou une courte lunette à laquelle on applique l'œil. Sur le côté opposé A B est placé, perpendiculairement au plan de l'instrument, un petit miroir plan de glace K, qui n'est étamé que dans la moitié la plus voisine de la branche A B; l'autre moitié est sans étain. Quelquefois on étame toute la glace, excepté en un espace vers le milieu, qui forme une petite fente transparente, à travers de laquelle on a la facilité, lorsqu'on applique l'œil en O, de voir l'horizon. L'observateur peut, outre cela, voir en même temps l'horizon sur la partie étamée du petit miroir dont nous venons de parler, parce qu'il y a une *alidade* ou règle mobile A D, qui tourne autour du centre A, et qui porte un autre miroir plus grand *ab*, lequel est aussi perpendiculaire au plan de l'instrument. Ce grand miroir *ab* doit être parallèle au petit K, lorsque l'alidade A D est située sur le premier point de division o. Dans cette position de l'alidade, l'horizon qui se peint sur le grand miroir *ab* se peint une seconde fois par réflexion sur le petit miroir K; de manière que l'observateur voit, comme deux horizons exactement à côté l'un de l'autre, le premier directement, le second par réflexion.

Sur l'alidade A D, on mène du centre A une droite qui divise sa largeur en deux parties égales, qu'on appelle *ligne de foi* ou *index*, parce qu'elle est toujours dans la direction du point de division que marque l'instrument dans les observations où on l'emploie.

Lorsque l'astre que l'on observe est le soleil, on modère l'éclat de sa lumière par le moyen de quelques verres plus ou moins colorés, suivant que l'astre a plus ou moins d'éclat, et que l'on place quelque part P entre le grand et le petit

(*) On appelle ainsi une chambre fermée avec soin de toutes parts, et dans laquelle les rayons des objets extérieurs étant reçus à travers un verre convexe, ces objets sont représentés distinctement, mais du haut en bas et avec leurs couleurs naturelles, sur une surface blanche placée en dedans de la chambre, au foyer du verre. Pour redresser les objets, il n'y a qu'à placer un verre lenticulaire entre le centre et le foyer du premier.

miroir. Ces verres colorés sont renfermés dans un cadre qui tient à l'instrument par un petit bras qui a un jeu de charnière, par le moyen duquel on interpose, sur la route du rayon solaire, le verre coloré que l'on juge à propos; ordinairement l'on a trois de ces verres colorés, l'un très-fortement, l'autre beaucoup moins, le dernier très-peu. Fig. 24.

172. L'instrument étant ainsi construit, et les deux miroirs étant bien parallèles, ce qu'on pourra vérifier et exécuter dans le cas contraire, comme nous le verrons tout à l'heure; voici comment on s'en servira pour observer la hauteur d'un astre. On visera à l'horizon à travers la partie non étamée du petit miroir, et, tenant l'instrument dans le plan du vertical de l'astre, on éloignera l'alidade du premier point de graduation, jusqu'à ce que l'image de l'astre vienne se peindre dans la partie étamée du petit miroir, à côté de l'horizon vu au travers de la partie non étamée, et que l'horizon de réflexion soit tangent au bord supérieur ou inférieur de l'astre. L'on fixera l'alidade dans cette position, par le moyen d'une petite vis de pression qui se trouve derrière, et presse la face non graduée de la partie courbe BC de l'instrument; ensuite, l'on comptera le nombre de divisions du limbe compris depuis l'origine o de la graduation jusqu'à la ligne de foi : ces divisions vaudront chacune un degré, quoiqu'elles ne soient réellement que de 30 minutes, et le nombre de ces divisions sera la hauteur du bord observé de l'astre.

173. Il nous sera aisé de prouver que chaque division, tracée sur le limbe BC, équivaut au double de sa vraie valeur dans l'opération que nous venons d'indiquer. En effet, soit S le soleil ou généralement l'astre observé, A le point du grand miroir où aboutit le rayon solaire SA, menons AH' parallèle à l'horizon OH, ce qui donne l'angle SAH' égal à celui de hauteur de l'astre, ou du moins à l'angle de hauteur du point S d'où part le rayon SA. Or, si ce point S s'élève d'un seul degré de plus au-dessus de l'horizon, il est clair que l'angle formé par le rayon incident et le rayon réfléchi augmentera d'un degré; mais en diminuant d'un demi-degré l'angle d'incidence, l'angle de réflexion qui lui est toujours égal, diminue aussi d'un demi-degré. Ainsi, il n'y aura pour augmenter d'un degré l'angle des rayons incidens et réfléchis, c'est-à-dire pour rapporter l'image du point S dans le petit miroir, tel qu'il étoit d'abord, qu'à diminuer le premier angle d'incidence d'un demi-degré, ce qui se fera en augmentant l'angle DAC d'un demi-degré, ou d'une division marquée sur le limbe.

Pour rendre ceci encore plus sensible par un autre exemple, supposons d'abord le point lumineux S à l'horizon, position dans laquelle il ne pourra être

réfléchi dans la partie étamée du petit miroir, et friser l'horizon, qu'en mettant l'index de l'alidade à zéro. Si maintenant nous supposons ce point S élevé à 30 degrés au-dessus de l'horizon, il est clair que l'angle des rayons réfléchi et incident, qui étoit nul dans la première position, augmente de 30 degrés, c'est-à-dire, que les angles d'incidence et de réflexion, qui étoient d'abord rectangulaires, diminuent chacun de 15 degrés ou 30 divisions, donc il n'y aura qu'à diminuer cet angle d'incidence en poussant l'alidade de C en B d'une quantité
Fig. 24. CD=30 parties. Ainsi, généralement l'arc du limbe compris entre o et le point de division où correspondra la ligne de foi, est la hauteur de l'astre non corrigée encore de toutes les erreurs dont nous avons parlé au chapitre v du second livre.

174. Il est à propos d'observer que le grand miroir, étant perpendiculaire au plan de l'instrument et dans la direction de la ligne de foi, devra être dans la direction de la verticale A45, lorsque la ligne de foi se trouve sur cette verticale. Donc, lorsque l'index est sur la droite Ao, l'angle du grand miroir avec la verticale est de 22° 30′; mais alors les deux miroirs sont parallèles, donc le petit miroir K doit toujours être incliné de 22° 30′ relativement à la verticale.

175. Afin de déterminer avec une exactitude suffisante, le nombre de divisions et parties de divisions du limbe auquel répond l'index dans l'observation; on termine la partie inférieure de l'alidade, par une espèce d'empatement dans lequel il y a une ouverture pour laisser voir les divisions du limbe. Le côté inférieur de cette ouverture, et qui est en biseau, touche toujours exactement l'arc gradué du limbe, lorsqu'on fait mouvoir l'alidade. Ce côté est toujours divisé en un nombre de parties plus grand d'une unité que l'arc du limbe auquel il répond. Par exemple, si chaque division principale du limbe qui correspond à un degré (art. 173), est subdivisée en trois parties qui, conséquemment, équivalent chacune à 20′ de degrés; et si le côté inférieur de l'ouverture pratiquée au bas de l'alidade, embrasse un arc de 19 de ces divisions, il faudra diviser ce côté en 20 parties égales à partir de zéro, et dans le même sens que la division de l'arc du limbe. Par le moyen de cette construction, chaque division de ce côté correspond à une division du limbe moins $\frac{1}{20}$ ou 1′, c'est-à-dire à 19 minutes. Donc, si la ligne de foi, qui est marquée sur le côté en question, que l'on appelle *nonius* ou *vernier*, et qui, conséquemment, a 10 divisions de part et d'autre, correspond directement à un des points de division du limbe; alors le premier point de division à droite du vernier correspondra au point de division suivant du limbe, moins un vingtième de l'espace compris entre deux points de divi-

sion successifs du limbe; et ainsi de suite pour les points suivans de division. De manière que le dernier point de division du vernier, et sur la droite de la ligne de foi, correspondra au dixième point de division à droite du limbe moins $\frac{10}{20}$, ou $\frac{1}{2}$ espace compris entre deux points de division du limbe. Il en sera de même pour les divisions correspondantes du vernier et du limbe, qui sont sur la gauche du point de division du limbe auquel nous supposons que correspond directement la ligne de foi. Donc, si nous supposons maintenant que la ligne de foi tracée sur le vernier, correspond sur la droite d'un point de division du limbe, à une distance de ce dernier égale à $\frac{1}{20}$ de l'espace compris entre deux points de division du limbe, le point de division du vernier sur la droite de la ligne de foi correspondra exactement au point suivant de division du limbe. De même, si la ligne de foi étoit encore plus avancée sur la droite d'un point de division du limbe de $\frac{2}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{4}{20}$, . . . $\frac{10}{20}$ d'un espace compris entre deux points de division du limbe, on auroit respectivement, à ces cas-là, le second, troisième, quatrième... ... dixième point de division du vernier qui correspondroit avec le second, troisième, quatrième . . . . dixième point de division du limbe sur la droite de celui que nous avons considéré; donc il faudroit, pour le premier cas et les neufs derniers dont nous venons de parler, retrancher respectivement de l'arc du limbe marqué par le point de division sur la droite duquel se trouve la ligne de foi, 1', 2', 3', 4', ... 10'. Mais si la ligne de foi est placée sur la droite du point de division en question du limbe, d'une quantité plus grande que $\frac{10}{20}$ ou $\frac{1}{2}$ espace, c'est-à-dire si elle est placée sur la gauche du point de division, immédiatement sur la droite de celui que nous avons considéré de $\frac{9}{20}$, $\frac{8}{20}$, ... $\frac{1}{20}$; alors, de même que nous l'avons démontré précédemment, ce seront les neuvième, huitième. . . . premier point de division du vernier sur la gauche de l'index, qui correspondront respectivement avec les neuvième, huitième. . . . premier point de division du limbe sur la gauche du dernier que nous avons considéré. Ainsi, il faudra ajouter à l'arc du limbe marqué par le point de sa division sur la gauche duquel se trouve l'index, autant de $\frac{1}{20}$ d'espace ou minute, qu'il y a de divisions comprises entre celui que nous avons considéré, et celui auquel correspond le plus directement sur la gauche de la ligne de foi, un des points de division du vernier.

Donc, généralement, ayant par l'observation placé l'alidade de l'octant dans la position qu'elle doit avoir, et serré la vis de pression (art. 172), l'on voit quel est le point de division du limbe qui est le plus près de la ligne de foi, ce qui donne déjà le résultat de l'observation à moins de 10' près; ensuite on re-

Fig. 21.

garde quel est le point de division du vernier qui correspond le plus exactement avec un des points de division du limbe, et comptant sur le vernier, à partir de la ligne de foi, le nombre de parties comprises entre cette dernière ligne et les deux points de division qui se correspondent, on ajoutera ou retranchera ce nombre au résultat déjà trouvé, suivant que les deux divisions qui se correspondent, sont à la gauche ou à la droite de l'index; ce qui donnera le vrai résultat à moins d'une minute près.

Quelquefois, pour plus d'exactitude, on sous-divise chaque division principale ou degré en 6 parties qui, conséquemment, valent chacune 10 minutes; et alors faisant l'arc du vernier, de manière qu'il corresponde à 39 petites divisions du limbe, on le divise lui-même en 40 parties égales; ainsi, par une opération semblable à la précédente, l'on aura le résultat de l'observation à moins d'une demi-minute près.

176. L'exactitude nécessaire aux observations faites en mer par le moyen de l'octant, dépend non-seulement de celle que l'artiste a mise dans la division du limbe et du vernier, mais encore de plusieurs autres causes dont une partie dépend de l'ouvrier qui a construit l'instrument, et dont l'autre partie dépend de certaines opérations que l'observateur est obligé de faire avant de se servir de l'instrument en question. Nous allons d'abord nous occuper des causes d'inexactitudes qui proviennent de l'artiste, et des moyens de les reconnoître, afin que les marins n'achètent de pareils instrumens, qu'après s'être assurés qu'ils ne sont point affectés de telles imperfections.

1.° Pour savoir si la graduation est exacte, l'on commencera par placer la ligne de foi sur le zéro; ce qui peut toujours se faire exactement, parce qu'il y a sur le côté latéral correspondant de l'instrument, un *arrêt* qui, à volonté, peut empêcher l'alidade de le dépasser. Ensuite, à partir de ce premier point de division, on fera mouvoir l'alidade suivant le sens de la graduation, en observant si la partie du limbe correspondante à la longueur du vernier, est toujours de dix-neuf parties ou de trente-neuf parties, suivant que les parties égales qui représentent les degrés sont divisées en 3 ou 6 parties.

2.° Il faut que les deux miroirs soient parfaitement plans, et que s'ils sont de glace, leurs deux faces respectives soient exactement parallèles : car, si elles ne l'étoient pas, les deux images qu'elles donnent ne coïncideroient plus, et par conséquent on auroit une image irrégulière et mal terminée de l'objet observé. Pour reconnoître si l'instrument a ce défaut, on observera, avec une lunette qui grossit huit à dix fois, l'image d'un objet éloigné qui est réfléchi très-oblique-

ment par le miroir dont on veut vérifier le parallélisme des deux faces. Si l'image paroît simple et bien terminée, les deux faces sont parallèles. Mais si cette image paroît double, alors on en conclura que les deux faces du miroir ne sont pas parallèles, et l'on en fera substituer un autre dont on aura vérifié par la même méthode, le parallélisme des faces.

Nous observerons à ce sujet, que les artistes qui construisent les octans, ainsi que les autres instrumens de réflexion, pourroient substituer aux grands miroirs en verre, d'autres grands miroirs faits en platine, métal que l'on est parvenu à travailler et à polir avec la plus grande perfection. C'est avec ce métal que M. Caroché, célèbre artiste et membre du bureau des longitudes, a construit le miroir du beau télescope d'environ 7 mètres de longueur que ce même artiste a construit, et dont on se sert maintenant à l'Observatoire impérial. Je crois même que M. Rochon, qui a trouvé le moyen de travailler la platine, en a déjà construit des miroirs d'instrumens de réflexion pour les marins.

5.° Il faut toujours donner la préférence aux instrumens qui sont entièrement en métal; parce qu'en bois ils sont toujours plus ou moins sujets à se déjeter un peu au bout d'un certain temps. La seule objection que l'on pourroit faire à la préférence que nous donnons aux instrumens en métal sur ceux en bois, c'est que les premiers doivent être plus pesans que les derniers, et par conséquent plus incommodes pour l'observateur, qui est obligé de supporter tout le poids de l'instrument dans le moment de l'observation. Mais nous observerons que l'instrument en métal, peut être construit d'une manière bien plus déliée que celui fait en bois, et que conséquemment, si on le fait d'un volume tel que ce dernier multiplié par la densité du métal que l'on emploie, qui est ordinairement du cuivre, ou de la platine, donne pour produit ou masse une quantité égale à celle de la masse d'un instrument en bois, l'inconvénient en question disparoîtra.

177. Passons maintenant aux causes d'inexactitudes dans l'octant que l'observateur peut rendre nulles, ce qui s'appelle *rectifier* l'octant.

1.° Il faut que le grand miroir soit exactement perpendiculaire au plan de l'instrument, ce que l'on pourra vérifier de la manière suivante. Placez votre octant sur une table le plus horizontalement que vous le pourrez; mettez l'alidade vers le milieu du limbe; placez à l'extrémité C du limbe le *viseur* de la figure 25, qui n'est autre chose que l'assemblage de deux parallélipipèdes rectangles en cuivre fort minces *db*, d'à peu près 27 millimètres de hauteur, et *df* d'environ 20 millimètres de hauteur, lesquels se réunissent en formant un angle Fig. 24 et 25.

Fig. 24 et 25. dièdre rectangulaire *adce*. Placez un autre *viseur* parfaitement égal au premier, fig. 25, à l'autre extrémité B du limbe. Enfin placez votre œil en un point S, à environ la même hauteur que la surface supérieure *ab* des viseurs, et regardez directement par le bord *b* du miroir le viseur placé en C; ensuite faites un peu tourner l'alidade soit en avant, soit en arrière, jusqu'à ce que vous voyiez par réflexion le second viseur placé en B, se peindre au même bord du miroir que celui par lequel vous regardez directement le premier viseur en C. Cela fait, si vous observez que les bords supérieurs sont exactement sur une même ligne, vous en conclurez que le grand miroir est perpendiculaire. Si au contraire le bord supérieur du viseur vu par réflexion, paroît former un angle avec celui du viseur vu directement, il est clair, qu'alors l'inclinaison du grand miroir sur le plan de l'instrument sera égale au supplément de l'angle formé par les bords supérieurs des deux viseurs. Mais vous le rappellerez aisément à sa position perpendiculaire, en tournant convenablement la vis qui la fixe sur l'alidade, jusqu'à ce que les bords supérieurs des deux viseurs se trouvent en ligne droite.

Si l'on n'avoit pas de viseurs tels que ceux de la figure 25, on pourroit y suppléer, ou par deux dés à jouer parfaitement égaux, ou encore, comme l'indique M. Lévêque dans son *Guide du Navigateur*, on peut opérer de la manière suivante. Mettez l'alidade vers le milieu du limbe, appliquez l'œil obliquement vers une des extrémités du miroir, de manière que vous voyiez une partie de l'arc par réflexion et une partie directement. Si les deux portions de l'arc forment une courbe uniforme sans que l'une paroisse au-dessus de l'autre, alors le grand miroir est perpendiculaire au plan de l'instrument. Mais si la partie de l'arc qui est vue par réflexion est au-dessus de celle que vous voyez directement, le miroir incline en avant; si elle est au-dessous, le miroir incline en arrière. Ainsi dans l'un et l'autre cas, il faudra le rappeler à la situation perpendiculaire.

178. 2.° Il faut aussi que le petit miroir soit exactement perpendiculaire au plan de l'instrument; mais la méthode pour vérifier cette position et pour la rétablir, si elle n'existe pas, est différente de celle employée pour le grand miroir.

Dirigez la lunette sur quelque partie bien distante de la mâture du vaisseau; par exemple, sur l'extrémité d'une vergue, en tenant l'instrument dans une situation verticale. Faites mouvoir ensuite l'alidade, de manière que l'image réfléchie du même objet, vienne se peindre dans le champ de la lunette; si les deux images coïncident parfaitement entr'elles, sans que l'une dépasse l'autre, les deux miroirs auront la même position relativement au plan de l'instrument; mais par

l'opération précédente, le grand miroir est perpendiculaire sur le plan de l'instrument: donc aussi le petit miroir est perpendiculaire sur le même plan. Si l'image réfléchie ne se confond pas avec l'image directe, vous rappellerez le petit miroir à sa vraie position, par le moyen des vis de sa monture que vous tournerez convenablement jusqu'à ce que les deux images se confondent en une seule. Fig. 24.

179. Vous pourrez encore obtenir les mêmes résultats, soit en faisant coïncider les deux images de l'horizon si c'est le jour, ou les deux images d'une étoile si c'est la nuit.

180. 3.° Nous avons dit, à l'article 174, que les deux miroirs doivent être parallèles lorsque l'index de l'alidade est à l'origine de la graduation. Pour vérifier ce parallélisme, vous fixerez l'index à zéro; ensuite, ayant l'attention de tenir l'instrument dans une position bien verticale, vous viserez la limite de l'horizon à travers de la partie non étamée du petit miroir. Si l'horizon, peint dans la partie étamée, est sur une même ligne droite avec l'horizon vu directement, les deux miroirs sont parallèles; et ils ne le sont pas si les deux images ne forment pas une ligne droite; alors, pour rétablir le parallélisme vous tournerez, de côté ou d'autre, la queue de cuivre qui est par derrière le petit miroir, jusqu'à ce que les deux horizons se réunissent, et n'en fassent qu'un seul.

181. Au reste, la division du limbe de l'octant s'étendant un peu au-delà des limites 0 et 90°, que nous avons considérées jusqu'à présent; vous pouvez, si vous le voulez, ne pas toucher à la queue qui est derrière le petit miroir; mais vous ferez mouvoir doucement l'alidade, soit en avant, soit en arrière de zéro, jusqu'à ce que les deux horizons se réunissent en un seul; vous aurez seulement le soin de noter le point du limbe où correspond l'index, et dans vos observations, vous compterez la division à partir de ce point, c'est-à-dire qu'il faudra retrancher des angles observés, ou leur ajouter la quantité dont ce point est éloigné de celui zéro de la graduation, suivant qu'il se trouve en dedans ou en dehors du point zéro. Cette quantité s'appelle *l'erreur de l'instrument.*

182. Quelquefois, pour plus d'exactitude, et particulièrement dans le cas où l'horizon seroit mal terminé ou embrumé, ou que l'on voudroit faire cette vérification avant d'être sous voile, on se sert du procédé suivant: Après avoir mis un verre noir entre l'œil et l'oculaire, pour affoiblir la lumière du soleil, on dirige la lunette sur cet astre et l'on fait coïncider les bords des deux images du disque, d'abord d'un côté, ensuite de l'autre; on écrit à chaque observation les degrés, minutes, etc., marqués par l'index, et le milieu entre les deux résultats, donne le vrai point du parallélisme des miroirs.

183. 4.° Lorsque dans les observations faites avec l'octant, on emploie la lunette, il faut s'assurer que l'axe de cette dernière est parallèle au plan de l'instrument; voici dans ce cas-là comment vous opérerez. Vous ferez tourner le porte-oculaire jusqu'à ce que les deux fils parallèles, qui sont au foyer des deux verres, soient sensiblement parallèles au plan de l'instrument; ensuite vous choisirez deux objets éloignés, dont la distance angulaire soit très-grande, par exemple, le soleil et la lune; vous ferez coïncider les bords les plus voisins sur le fil le plus proche du plan de l'instrument, et vous changerez, après cela, la position de l'instrument, de manière à amener le point de contact des deux bords sur le fil le plus éloigné du plan de l'instrument. Si les deux disques coïncident, comme ils le faisoient sur le premier fil, l'axe de la lunette est parallèle au plan de l'instrument; si le contact n'a plus lieu, ou si l'un des disques passe sur l'autre, l'axe de la lunette n'est pas parallèle au plan de l'instrument; et alors il faut rectifier la position de la lunette. (*Voyez* de plus les articles 190, 193 et la note XVIII qui peuvent s'appliquer à l'octant, lorsqu'on se sert de cet instrument pour mesurer les distances angulaires de deux astres.)

184. Le *sextant* est un instrument d'observation par réflexion, qui est parfaitement semblable à l'octant, dont il ne diffère que par l'arc compris entre ces côtés, qui est de 60 degrés, ou la *sixième* partie du cercle entier, au lieu d'être comme dans l'octant, de 45 degrés ou la huitième partie du cercle. Ainsi, tout ce que nous avons dit pour la construction et la rectification de l'octant a lieu pour le sextant. Ce dernier instrument est de beaucoup préférable au premier pour mesurer les distances, puisqu'avec l'octant on ne peut mesurer que des distances qui n'excèdent pas 90 degrés, et qu'avec le sextant on peut mesurer des distances qui vont jusqu'à 120 degrés.

185. Mais de tous les instrumens à réflexion dont se servent les marins, il n'y en a point de meilleur pour observer les distances que le *cercle de réflexion* inventé par *Tobie Mayer*, célèbre astronome et professeur de mathématiques à Gottingen, et extrêmement perfectionné par Borda: il paroît même que ce grand géomètre a porté la construction de cet instrument à son plus haut degré de perfection, du moins relativement aux observations astronomiques faites en mer (*);

(*) Les cercles répétiteurs dont on se sert à terre pour les observations astronomiques, et particulièrement pour les operations géodésiques, ont acquis, dans ces derniers temps, par les soins de M. Lenoir, un grand avantage sur les premiers qui ont été construits. Car telle observation qui exigeoit deux observateurs, n'en exige plus qu'un. C'est de ces cercles que Biot va se servir dans

car un marin espagnol(*) ayant voulu, et cru ajouter un nouveau degré de perfection au cercle de réflexion de Borda, y a si peu réussi, qu'il n'a fait que prouver qu'un changement, dans la construction de cet ingénieux instrument, ne pourroit que le rendre moins parfait. M. Lenoir, célèbre artiste, à qui mon ancien, illustre et respectable collègue, avoit, le premier, confié la confection des cercles de réflexion, les fait dans ce moment-ci comme les premiers qu'il a construits il y a plus de 25 ans.

Je vais donner la description du cercle et de son usage, en me servant des propres paroles de Borda; car ce grand géomètre a décrit cet instrument de la manière la plus claire et la plus précise, dans celui de ses ouvrages qui a pour titre : *Description et usage du cercle de réflexion, etc.*

« Le corps de l'instrument est taillé dans une seule pièce de cuivre. Le Fig. 26 et 27.
» noyau PO (*fig.* 26, 27), qui est au centre, et qui a le même diamètre que la
» partie circulaire des deux alidades, tient aux six rayons R, R, R, etc., lesquels
» vont en diminuant de largeur depuis le noyau jusqu'au limbe et sont, outre
» cela, formés en biseau sur les côtés, comme on le voit par la figure 31, qui
» est une section en travers prise sur un des points R. Ces six rayons aboutissent
» à une espèce de règle de champ circulaire *aa* (*fig.* 27) qui règne dans toute
» la circonférence de la partie intérieure du limbe et sert à le fortifier; les sur-
» faces supérieures du noyau et des six rayons forment un même plan avec le
» limbe, et leurs surfaces inférieures en forment un parallèle au premier avec
» la surface inférieure de la règle de champ. Au centre du cercle est fixée en des-
» sous une pièce *dd* (*fig.* 27), façonnée en vis extérieurement, et destinée à re-
» cevoir un manche Q (*fig.* 33), par lequel on tient l'instrument.

» Le limbe est divisé en 720 degrés, chaque degré l'est en trois parties; et
» les nonius, ou verniers des deux alidades donnent les minutes.

» Le grand miroir A (*fig.* 26) est placé au centre de l'instrument sur l'alidade
» EF, et fait un angle d'environ 30° avec la ligne du milieu de cet alidade; la
» base de la monture du miroir est échancrée en rond pour laisser une place suf-
» fisante à la pièce de recouvrement *e* (*fig.* 26) qui couvre le centre; elle est
» assujétie sur l'alidade par quatre vis qui servent à rectifier la position du mi-

---

la mesure de l'arc du méridien que Méchain mesuroit, lorsque la mort l'a enlevé aux sciences, pour l'avancement desquelles il a tant fait. (*Voyez* son éloge par Delambre, dans la *Connoissance des temps* de 1808.)

(*) Mendoza.

Fig. 26 et 27. » roir sur l'instrument : ces vis sont à tête carrée et saillante, et on les fait » tourner par le moyen de la clef représentée par la figure 30.

» La monture du petit miroir B (*fig.* 26 et 27) est fixée sur la seconde alidade, » et a été portée aussi près du limbe qu'il a été possible, afin de laisser un plus » grand passage aux rayons venant par la gauche : elle est à peu près de la même » forme que dans les octans, et fournit les mêmes moyens de rectifications. La » base inférieure est fixée sur l'alidade par un petit pied cylindrique qui la tra- » verse, et par trois vis qui ont un peu de jeu et permettent de rectifier la posi- » tion du miroir par rapport à la lunette. Comme dans certaines observations les » rayons de l'astre réfléchi traversent le petit miroir avant de parvenir au grand, » on a taillé les côtés du petit miroir dans une direction parallèle à la ligne des » centres A B, afin qu'il y ait alors moins de lumière interceptée.

» La lunette G H est fixée sur l'alidade qui porte le petit miroir et est assujétie » dans une direction toujours constante par rapport à ce miroir. Elle est tenue » en deux points par deux oreilles qui entrent dans les rainures des montans » I et K (*fig.* 26 et 27). Dans chaque montant, il y a un rappel pour rapprocher » ou éloigner la lunette du plan de l'instrument, suivant qu'on veut que la » lumière de l'astre réfléchi tombe plus ou moins sur la partie étamée du mi- » roir. Ces rappels servent aussi à placer la lunette dans une position parallèle » au plan de l'instrument, au moyen des divisions qui sont tracées sur la partie » extérieure de chaque montant. Il y a au foyer de la lunette deux fils parallèles, » dont l'intervalle est à peu près égal à trois fois le diamètre apparent du soleil. » Ces fils doivent être placés parallèlement au plan de l'instrument lorsqu'on » fait les observations; et pour pouvoir toujours leur donner cette position, on » a tracé deux repères, l'un sur la partie supérieure du tuyau de la lunette, et » l'autre sur le porte-oculaire.

» Les deux alidades F E et G B tournent sur le centre et indépendamment l'un » de l'autre. Celle du grand miroir est portée par un collet qui fait partie du » centre, et qu'on voit (*fig.* 27); elle est serrée sur ce collet par la pièce de re- » couvrement (*fig.* 26), qui est fixée par trois vis sur la tête du centre. La se- » conde alidade est contenue entre la surface inférieure du même collet et le » plan de l'instrument; elle est serrée en dessous par une vis de tirage (*fig.* 27). » Chaque alidade porte un vernier et un rappel.

» Les verres colorés ne tiennent point à l'instrument comme dans l'octant; Fig. 26...29. » on en emploie de deux espèces. Les petits, qui sont représentés dans la figure » 28, se placent dans la pièce C ou dans la pièce D (*fig.* 26 et 27); mais, dans

» cette dernière position, ils ne servent que pour des observations particulières » ou pour des vérifications. Les grands verres représentés (*fig.* 29) se placent » devant le grand miroir et dans les pièces *qq* (*fig.* 26) : les uns et les autres sont » assujétis dans leurs loges par des vis de pression. Fig. 26... 29.

» Il est bon d'avoir quatre verres colorés de chaque espèce. Ceux de la figure » 28 doivent être de même opacité graduelle que les verres dont on fait usage » dans les octans ; mais il faut que les seconds aient une teinte deux fois plus » foible, parce qu'ils sont traversés deux fois par les rayons de l'image réfléchie, » au lieu que les premiers ne le sont qu'une fois.

» Les trous dans lesquels entrent les queues de verres colorés sont un peu » obliques au plan de l'instrument ; et ces verres, étant à leur place, inclinent » d'environ 5° vers le petit miroir. Cette inclinaison a pour objet d'empêcher » que les images blanches, réfléchies par la surface antérieure des verres colo- » rés, n'entrent dans la lunette en même temps que les images colorées dont » elles affoibliroient la vivacité.

» Il est nécessaire que nous entrions ici dans quelques détails sur l'usage de » ces deux espèces de verres colorés. On doit voir d'abord que ceux de la fi- » gure (28), placés en C, peuvent, dans certains cas, intercepter une partie de » l'image réfléchie. En effet, si par le centre A (*fig.* 26), et par les bords » SS de monture d'un de ces verres, on mène les lignes indéfinies AM et AN, » toutes les fois que l'astre vu par réflexion se trouvera dans l'espace angulaire » MAN, ses rayons, avant de parvenir au grand miroir, rencontreront ou la » monture du verre, ou le verre lui-même, ce qui rendra l'observation impar- » faite. Or, on trouve, par les positions données à ces parties de l'instrument, » que l'angle MAN est environ de 28° 40′, et qu'en tirant AL parallèle à l'axe » GHB de la lunette, l'angle NAL est égal à 5° 20′. Il suit de là que lorsque l'image » réfléchie vient par la gauche, comme dans la figure (26), et que l'angle ob- » servé est entre 5° 20′ et 34°, on ne peut pas employer les verres de la figure (28). » Il n'en est pas de même de ceux de la figure (29) qui, étant placés devant le » grand miroir, ne gênent jamais les observations, et peuvent servir dans tous » les cas, quels que soient les angles observés. Mais, d'un autre côté, les défauts » de ces derniers verres peuvent donner de plus grandes erreurs dans les obser- » vations : 1.° parce que ces verres sont traversés deux fois par les images réflé- » chies, au lieu que les autres ne le sont qu'une fois ; 2.° parce que l'incidence » des rayons sur leurs surfaces est quelquefois très-oblique, au lieu qu'elle est » toujours à peu près perpendiculaire sur les verres placés en C. D'après cela, Fig. 26 et 27.

Fig. 26...29. » on ne doit faire usage des verres de la figure 29, que lorsqu'il n'est pas possible de se servir de ceux de la figure 28; c'est-à-dire, lorsque l'angle observé » est entre 5° 20′ et 34°. Nous remarquerons au reste que les distances de la » lune au soleil, qu'on observe à la mer pour déterminer les longitudes, sont » comprises ordinairement entre 40 et 120°, et que celles de la lune aux étoiles » sont rarement au-dessous de 34°. Ainsi on pourra se servir des verres de la » fig. 28, à peu près pour toutes les observations des longitudes, et ce sont les » observations qui exigent le plus d'exactitude, et sont les plus intéressantes » pour les navigateurs.

» Indépendamment des verres colorés, on fait encore usage, et principale-
Fig. 32. » ment dans les observations d'objets terrestres de la pièce fig. 32, qu'on ap- » pelle *ventelle*, qui est percée d'une ouverture triangulaire *abc*. La queue *tt* » de cette pièce porte un petit ressort qui la tient à frottement dans la loge D, » où elle se place, et qui sert à hausser ou baisser la ventelle à volonté, suivant » qu'on veut augmenter ou diminuer la quantité de lumière de l'objet vu direc- » tement, pour la rendre égale à celle de l'objet vu par réflexion ».

186. Cela posé, voici à peu près la manière de se servir de cet instrument :

Fig. 34. « On commence par fixer l'alidade du grand miroir sur un point déterminé A » de la division, par exemple, sur le point zéro : on dirigera ensuite la lunette » sur l'astre L, qui est à droite; et, sans toucher à l'alidade du grand miroir, » on fera mouvoir celle de la lunette jusqu'à ce que l'image de l'astre S, venant » par la gauche, vienne se mettre en contact (*) dans le champ de la lunette » avec l'image de l'astre L vu directement. Lorsque cette première partie de » l'observation sera achevée, on fixera l'alidade de la lunette, et on fera tourner » l'instrument en entier dans son plan, pour diriger la lunette sur l'astre S, en- » suite desserrant l'alidade du grand miroir, on la portera du côté de l'œil vers » B, jusqu'à ce que les deux images se trouvent encore une seconde fois en con- » tact; et je dis qu'alors la moitié de l'arc AB donnera la distance des deux » astres. En effet, si on considère les positions successives qu'a prises le grand » miroir pendant qu'il a passé du point A au point B, on verra qu'il y a eu né- » cessairement un instant où les deux miroirs se sont trouvés parallèles : soit *b*

(*) C'est par erreur que l'auteur d'où nous tirons ce passage, dit *vienne coincider*. Cette faute, dont il est bien aisé de s'apercevoir avec un peu de réflexion, pourroit cependant devenir dangereuse pour ceux qui n'ont d'autre intention que de suivre rigoureusement ce qu'on leur dit de faire, sans se donner la peine de réfléchir sur les causes.

» le point où étoit alors l'alidade; il est clair que l'arc Ab décrit par l'alidade, Fig. 51.
» depuis le point A où l'on avoit observé le premier contact jusqu'au point b » du parallélisme des miroirs, ainsi que l'arc bB que cette alidade a parcouru » depuis le point b du parallélisme jusqu'au point B où on a observé le second » contact, marqueront également l'un et l'autre l'angle apparent des deux as- » tres; d'où il suit que la moitié de l'arc total AB donnera cet angle. On voit » donc que sans faire l'observation du parallélisme, on sera parvenu à trouver » l'angle cherché, et qu'on aura obtenu un double résultat par une double ob- » servation. On voit aussi que si on répétoit plusieurs fois les observations que » nous venons de décrire, en partant toujours du dernier point où est l'alidade, » comme du zéro de la division, on auroit, après quatre observations, un arc » AC quadruple de l'angle des deux astres; après six observations, un angle » sextuple, et ainsi de suite : de manière que cet angle seroit toujours égal à l'arc » total parcouru par l'alidade du grand miroir, divisé par le nombre d'obser- » vations.

» On doit remarquer que dans le procédé que nous venons d'expliquer, on a » supposé que la lunette de l'instrument étoit dirigée alternativement sur les » deux astres S et L : mais dans les observations des distances, il est beaucoup » moins fatigant pour la vue de n'observer que par réflexion l'image de celui des » deux astres qui a le plus de lumière : savoir, l'image du soleil lorsqu'on me- » sure les distances de ce dernier astre à la lune, et l'image de ce satellite lors- » qu'on mesure ses distances à une étoile. Il est donc nécessaire de corriger à » cet égard notre manière d'opérer; et cela est fort aisé en renversant l'instru- » ment pour changer la position respective des deux astres par rapport aux deux » miroirs. Ainsi, dans notre exemple, en supposant que S est le soleil et L est » la lune, au lieu de diriger la lunette sur le soleil pour faire la seconde obser- » vation, on la dirigera sur la lune, comme dans la première observation; on » fera ensuite tourner l'instrument autour de l'axe HO de la lunette, pris comme » axe de mouvement, jusqu'à ce qu'il ait fait une demi-révolution, et alors l'ali- » dade M étant portée de A vers B, l'image du soleil se réfléchira sur les mi- » roirs de la même manière que l'image de la lune s'y seroit réfléchie, si on » avoit pu diriger la lunette sur le soleil, et qu'on eût tenu l'instrument dans sa » première position ».

Borda appelle *observation à droite* celle dans laquelle les rayons de l'astre réfléchi viennent par la droite, comme dans les observations de l'octant; *observation à gauche* celle dans laquelle l'image réfléchie vient par la gauche,

comme dans la figure 34. Enfin il appelle *observations croisées* les deux observations, l'une à droite, l'autre à gauche, qui servent à supprimer l'observation préparatoire du parallélisme des deux miroirs.

Passons maintenant à la rectification de l'instrument, et à la vérification de la bonté des miroirs et des verres colorés.

187. *Position du petit miroir par rapport à la lunette.* « L'inclinaison de la » surface du petit miroir par rapport à l'axe de la lunette doit être telle, qu'après
Fig. 26. » avoir placé en C un des petits verres colorés de la figure 28, aucun des rayons » réfléchis par le grand miroir, ne puisse parvenir au petit miroir, et ensuite à » la lunette, sans avoir auparavant traversé le verre coloré. Pour connoître si le » petit miroir a cette inclinaison, on fera l'opération suivante ; on placera » d'abord la ventelle (fig. 32) dans sa loge en D, et on l'abaissera entièrement » pour intercepter toute lumière directe. Ensuite, faisant tourner l'alidade du » grand miroir, on examinera s'il paroît dans la lunette quelqu'image blanche, » réfléchie par le grand miroir. Si toutes les images qui se peignent dans la lu» nette sont colorées, le miroir aura la position requise : mais si elles ne le sont » pas, on desserrera les vis qui assujétissent la monture du petit miroir sur » l'alidade, on fera ensuite tourner cette monture sur son pied cylindrique, jus» qu'à ce que les images blanches aient disparu, et alors le petit miroir aura la » position qu'il doit avoir; il ne restera plus qu'à le fixer dans cette nouvelle po» sition par le moyen des vis ».

188. *Perpendicularité du grand miroir*, comme à l'article 177, relativement à l'octant; si ce n'est qu'on place les deux viseurs de la figure 25 aux extrémités d'un diamètre T Y. On peut de même faire cette vérification sans viseur, comme nous l'avons fait pour l'octant à l'article 177, en se servant de la méthode indiquée par M. Lévêque.

189. *Perpendicularité du petit miroir.* Même méthode que celle enseignée à l'article 178.

190. *Position de l'axe de la lunette par rapport au plan de l'instrument.* Quoique nous ayons déjà parlé de cette vérification relativement à l'octant, article 183; cependant nous allons donner la méthode que Borda indique pour le cercle de réflexion.

« La lunette doit être ajustée dans ses montans K et I, de manière qu'après » avoir mis les deux rappels sur la même division, l'axe de la lunette soit paral» lèle au plan de l'instrument, ou, ce qui est la même chose, que les images des » objets éloignés, qui sont dans le plan de l'instrument, viennent se peindre

» au milieu de l'intervalle des deux fils placés au foyer de l'objectif. On recon- Fig. 26.
» noîtra si l'ajustement est tel qu'il doit être, par l'opération suivante qu'on
» pourra faire dans la grande chambre du vaisseau. Après avoir assujéti l'ins-
» trument sur un endroit fixe, on placera à 12 pieds de distance, au moins, un
» objet bien distinct, qui soit à peu près dans le plan de l'instrument : on met-
» tra ensuite sur le limbe, vers T et vers Y, les deux viseurs de la figure 25,
» qu'on dirigera sur cet objet, et on calera l'instrument jusqu'à ce que l'objet
» paroisse dans une ligne passant par les surfaces supérieures des deux viseurs;
» enfin on fera mouvoir l'alidade de la lunette jusqu'à ce que le même objet
» vienne se peindre au foyer de la lunette; et alors si l'image paroît sensible-
» ment dans le milieu de l'intervalle des deux fils; et qu'en même temps les
» deux rappels se trouvent exactement sur la même division, l'ajustement des
» divisions sera tel qu'il doit être; mais si l'image est plus près d'un fil que
» de l'autre, on la ramènera au milieu de l'intervalle par le moyen des rappels ;
» et alors la différence qui se trouvera entre les divisions marquées par les deux
» rappels, sera l'erreur de l'ajustement : ainsi, tenant compte de cette erreur,
» il sera toujours facile, lorsqu'on fera des observations, de placer la lunette
» dans la position qu'elle doit avoir ».

191. *Parallélisme des surfaces du grand miroir.* Cette vérification étant différente de celle que nous avons indiquée à l'article 176 (seconde vérification), relativement à l'octant et au sextant, de plus, Borda donnant un moyen de corriger l'obliquité des deux faces du miroir, nous allons la faire connoître à nos lecteurs.

« Cette vérification doit se faire à terre. Pour cela, on choisira deux objets
» éloignés et bien distincts, dont l'angle ou la distance apparente soit très-
» grand, comme, par exemple, de 120 degrés; ensuite, après s'être bien assuré
» de la perpendicularité des miroirs et de la position de l'axe de la lunette, on
» mesurera l'angle des deux objets, en faisant de suite un grand nombre d'ob-
» servations croisées, et ayant attention que le contact des images tombe tou-
» jours dans le milieu de l'intervalle des deux fils. Ces premières observations
» étant faites, on ôtera le grand miroir de la boîte qui le renferme, et on le re-
» tournera de manière que le côté qui étoit le plus près de la lunette en soit
» maintenant le plus éloigné. Après cela, ayant une seconde fois rectifié la po-
» sition des miroirs, on mesurera de nouveau l'angle des deux objets, en fai-
» sant le même nombre d'observations croisées que ci-devant; et si, dans cette
» seconde opération, on trouve le même résultat que dans la première, ce sera

Fig. 26. » une preuve que les deux surfaces sont parallèles. Mais si le résultat n'est pas » le même, le miroir sera prismatique, et la moitié de la différence des deux » angles trouvés, sera l'erreur qui convient à l'angle mesuré.

» Supposons, par exemple, qu'on ait fait dix observations dans chaque opé- » ration, et qu'on ait trouvé, par les premières 1219° 10', et par les secondes » 1219° 23' : on divisera ces deux quantités par 10, et on aura pour la première » mesure 121° 55'; et pour la seconde 121° 56' 18", dont la différence 1' 18" » sera le double de l'erreur du miroir : d'où l'on voit que l'angle marqué par » l'instrument étoit trop petit de 39" dans la première position du miroir, et » trop grand de la même quantité dans la seconde.

» Connoissant ainsi l'erreur du miroir pour l'angle de 120 degrés, on trouvera » aisément par le moyen de la table XIII (*voyez* la note XVII), celles qui con- » viennent à tous les autres angles.

» Supposons, par exemple, qu'on veuille, d'après l'expérience précédente, » trouver l'erreur qui convient à l'angle de 90°, mesuré par une observation » croisée ; on fera cette proportion :

» L'erreur marquée par la troisième colonne de la table, pour l'angle de » 121° 55', mesuré par des observations croisées (c'est-à-dire 1' 38"), est à » l'erreur marquée dans cette même colonne pour 90° (c'est-à-dire 32"), » comme l'erreur 39" qu'on suppose donnée par l'expérience, est à un qua- » trième terme 13", qui sera l'erreur du miroir pour l'angle de 90 degrés.

» On pourra déterminer de la même manière les erreurs pour tous les autres » angles, et faire ainsi une table particulière des erreurs de ce miroir, non- » seulement pour les observations croisées, mais encore pour les observations » à gauche et à droite.

» Nous ferons remarquer ici que les erreurs sont beaucoup plus petites » dans les observations croisées que dans les observations à droite, qui sont » celles que l'on fait avec l'octant; ainsi, le cercle de réflexion a encore, à cet » égard, un grand avantage sur l'ancien instrument.

192. » *Parallélisme des surfaces des verres colorés.* On se servira, pour la » vérification des verres noirs, de l'observation du disque du soleil, ainsi qu'on » va l'expliquer. Ayant mis d'abord l'alidade du grand miroir sur le point zéro, » on placera dans leurs loges en C et D les deux verres noirs les plus opaques ; » ensuite, dirigeant la lunette sur le soleil, on fera mouvoir son alidade jusqu'à » ce qu'on observe dans la lunette le contact des deux disques. Cette première » opération étant faite, on retournera dans sa loge le verre noir placé en C, de

» manière qu'il présente sa seconde surface au petit miroir; et si, en dirigeant » de nouveau la lunette sur le soleil, les deux disques se touchent encore, ce » verre noir aura ses surfaces parallèles; du moins dans le sens parallèle au plan » de l'instrument, ce qui sera suffisant; mais si les deux disques se sont éloignés, » ou s'ils mordent l'un sur l'autre, on fera mouvoir l'alidade du grand miroir » pour ramener les images au contact, et alors la moitié de l'angle marqué par » l'alidade sera l'erreur qui vient du défaut du parallélisme des surfaces. Si on » veut connoître cette erreur avec plus de précision, on fera une seconde et une » troisième opérations pareilles à la première, en partant du point où est actuel- » lement l'alidade; et alors, en prenant le quart ou la sixième partie de l'angle » qui sera marqué par cette alidade, suivant qu'on aura fait quatre ou bien six » observations, on aura plus exactement l'erreur cherchée. Fig. 26.

» Le verre coloré placé en C étant ainsi vérifié, on fera la même opération » sur celui qui est en D; on vérifiera ensuite de la même manière le troisième » verre avec le second, comme aussi chacun des verres de la figure 29, placés » en *qq* avec un des petits verres placés en D, et de cette manière on connoîtra » les erreurs de tous les verres noirs.

» Quant aux verres verts, on pourra les vérifier par l'observation du diamètre » de la lune lorsqu'elle est pleine, ou par celle de quelqu'objet terrestre bien » éclairé.

» Nous remarquerons ici, comme un grand avantage du cercle de réflexion, » que, lorsqu'on fait des observations croisées, les erreurs des verres colorés » placés en C n'altèrent en rien la grandeur des angles mesurés, parce que si ces » verres donnent les angles trop grands dans l'observation à droite, ils les donnent » trop petits de la même quantité dans l'observation à gauche. Il n'en est pas » de même des grands verres placés en *qq*, parce que l'incidence des rayons sur » ces verres, étant plus oblique dans l'observation à droite que dans l'obser- » vation à gauche, les erreurs ne peuvent se compenser entièrement. Cepen- » dant comme on ne peut employer ces derniers verres que pour mesurer les » angles de 54 degrés au plus, et que, pour ces petits angles, les erreurs sont » à peu près les mêmes que si l'incidence des rayons étoit perpendiculaire, on » peut encore supposer que ces erreurs se détruisent dans les observations croi- » sées.

» On pourroit donc se dispenser de connoître les erreurs des verres colorés, » si on ne faisoit que des observations croisées: on le pourroit de même encore » lorsqu'on ne feroit que des observations à droite, ou des observations à gau-

» elle, pourvu qu'on changeât les verres de côté à chaque observation, et que » le nombre d'observations fût pair; mais il y a des circonstances où on ne peut » mesurer un angle que par une seule observation, et alors il faut tenir compte » des erreurs trouvées ».

193. Quelque soin que l'on mette à la vérification mentionnée à l'article 190, afin que le contact des images des astres, dont on observe la distance, se fasse précisément dans un plan parallèle à celui de l'instrument, c'est-à-dire, dans le milieu de l'intervalle des deux fils qui sont placés au foyer de la lunette; cependant, comme il n'est guère possible en mer, soit à cause du mouvement du vaisseau, soit encore à cause de la manière un peu gênante dont l'instrument est supporté par l'observateur dans le temps de l'observation, de pouvoir obtenir que le contact des disques des deux astres s'opère bien exactement au milieu des deux fils; il faut suppléer à cet inconvénient, en estimant la *déviation*, c'est-à-dire la distance du point où devroit se faire le contact à celui où il se fait réellement, et par le moyen de la table XIV, appliquer la correction, toujours soustractive, à la distance observée (*). Or, pour connoître, ou du moins pour pouvoir apprécier d'une manière sensiblement exacte la quantité dont le point de contact des deux astres observés étoit éloigné du plan de l'instrument, il faut commencer à connoître l'angle que l'intervalle des fils occupe dans le champ de la lunette. Voici le moyen que donne Borda pour déterminer cet angle:

« Cette détermination peut se faire dans la grande chambre du vaisseau. Pour » cela, on fera d'abord tourner le porte-oculaire dans le tuyau de la lunette, » jusqu'à ce que les fils paroissent sensiblement perpendiculaires au plan de l'ins- » trument; ensuite, après avoir placé sur le point de zéro l'alidade du grand » miroir, on dirigera la lunette sur un objet qui soit au moins à 12 pieds de » distance de l'instrument, et on fera mouvoir l'alidade de la lunette, jusqu'à ce » que les deux images de l'objet coïncident. Cette première opération étant » faite, on fera mouvoir l'alidade du grand miroir, et on disposera l'instrument » de manière que l'une des deux images touchant un des fils, l'autre image » touche l'autre fil, et alors l'angle marqué par l'alidade du grand miroir don- » nera la distance des deux fils ».

194. Connoissant par le moyen de l'opération précédente, la distance angulaire des deux fils, il faut à l'instant où l'on observe le contact des deux astres,

(*) *Voyez* la note XVIII, où j'ai développé toute cette théorie, et donné la formule qui, à ce que j'imagine, a dû servir à Borda à calculer la table XIV.

remarquer le plus exactement possible, la distance de ce point de contact aux fils de la lunette; d'où l'on conclura la déviation, et par le moyen de la table XIV, le nombre de secondes qu'il faudra retrancher de la distance observée. Rendons ceci plus sensible par un exemple.

Supposons que par l'opération indiquée à l'article 193, on ait trouvé que la distance angulaire des deux fils est de 90′, et que dans le moment de l'observation, on ait remarqué que le point de contact est trois fois plus près d'un fil que de l'autre. Enfin supposons que la distance observée est de 125 degrés.

Le contact auroit dû avoir lieu à égale distance, c'est-à-dire à 45′ de chacun des deux fils, donc, puisqu'il a eu lieu à 30′ de l'un des fils, et par conséquent à 60′ de l'autre, la déviation est de 15′ : entrant avec cette déviation et l'angle de distance observée 125° dans la table XIV, on trouve que la correction correspondante est 8″. Donc la distance corrigée n'est que de 124° 59′ 52″.

L'on doit avouer que cette estime de la déviation, dans le moment où l'observateur est déjà occupé à saisir l'instant du contact, est une des parties les plus délicates et épineuses de l'observation : ce n'est qu'en observant souvent, que l'on acquiert cette précision de coup d'œil nécessaire pour pouvoir estimer exactement la déviation, en même temps que l'on s'occupe de la partie principale de l'observation.

195. Lorsque l'on observe les distances de deux astres, il faut que le cercle soit exactement dans le plan de ces astres. Or, cette position étant assez gênante pour l'observateur, il faut, autant qu'on le peut, diminuer le temps de la durée de l'observation; c'est ce que l'on obtiendra, en plaçant d'avance à chaque observation, les alidades dans les positions respectives peu différentes de celles qu'elles doivent avoir à l'instant où l'on observe; par ce moyen-là, on ramenera, sans aucun tâtonnement, et du premier essai, les deux images dans le champ de la lunette; il ne restera donc plus alors qu'à les rapprocher pour les mettre en contact par le moyen des rappels.

Voici maintenant le moyen que Borda indique pour placer successivement les alidades dans des positions peu différentes de celles qu'elles doivent avoir.

Ayant placé l'alidade du grand miroir sur le point zéro, on ramenera le petit miroir au parallélisme, en faisant coïncider les deux images de l'horizon, et on notera l'angle marqué par l'alidade de la lunette; ensuite, laissant toujours l'alidade du grand miroir sur le point zéro, on prendra la distance des deux astres par l'observation à gauche, c'est-à-dire en faisant mouvoir l'alidade de la lunette; ou, encore plus simplement, on pourra par le moyen de la *Connoissance*

des temps et la longitude estimée du vaisseau; ainsi que l'heure approchée de ce dernier dans le moment où l'on observe, connoître à peu près la distance que doivent avoir, pour ce même moment, les deux astres; ce qui facilitera beaucoup cette première observation, et on notera encore l'angle marqué par cette alidade; et, retranchant le premier angle du second, on aura la distance approchée des deux astres. Or, par la manière dont se font les observations croisées, il y a toujours une observation à droite entre deux à gauche, et réciproquement; donc, à chaque fois que l'on déplace une alidade, c'est pour lui faire parcourir un arc double de la distance. Donc, en représentant par a l'angle des deux alidades, lorsque les deux miroirs étoient parallèles, par b l'angle de ces mêmes alidades à l'instant de la première observation à gauche, ce qui donne pour la distance des deux astres $b-a$; il faudra successivement noter les différentes positions de l'alidade de la lunette qui seront b, $b+2(b-a)$, $b+4(b-a)$, $b+6(b-a)$, etc., en ayant l'attention de supprimer 720°, qui est la division du cercle, des résultats obtenus plus grands que cette quantité. On notera de même pour l'alidade du grand miroir qui part du point zéro, les arcs o, $2(b-a)$, $4(b-a)$, $6(b-a)$, etc., en retranchant, comme pour les premiers arcs, 720° pour tous les arcs trouvés qui sont $>720°$.

On aura de cette manière, tous les points successifs où devront se trouver à peu près les alidades à toutes les observations, et par conséquent on fera ces dernières avec beaucoup plus de facilité. Nous ferons dans la suite des applications numériques de cette méthode, qui me paroît très-commode et toujours praticable, ce qui n'est pourtant pas l'opinion de M. de Mendoza, officier de la marine d'Espagne, qui, trouvant qu'elle est presqu'impraticable, a fait adapter au cercle, par l'artiste anglais Troughton, un demi-cercle gradué, dont les bouts sont fixés à l'alidade du petit miroir, ce qui donne une position fixe du petit miroir relativement aux divisions du demi-cercle en question, quelle que soit la position de l'alidade de la lunette: par ce moyen-là, lorsque l'alidade du grand miroir est sur le point zéro de ce demi-cercle, les deux miroirs sont parallèles, comme cela a lieu dans l'octant et le sextant. Mais il est aisé de voir que ce très-petit avantage, auquel on peut suppléer très-facilement dans le cercle de Borda, complique cet instrument, et le rend plus pesant, ce qui est un très-grand inconvénient, puisque, ainsi que nous l'avons déjà dit, la position de l'observateur est assez gênante dans l'instant où il observe les distances. M. Burckardt, grand astronome, mais qui n'est pas marin, et qui n'a jamais observé en mer avec le cercle de réflexion, avoit proposé au bureau des longitudes d'adopter cette nouvelle construction du

cercle, mais heureusement pour les observations et les observateurs marins, l'on n'a rien changé à cet instrument.

Nous allons maintenant nous occuper de l'usage des observations astronomiques, dans la solution la plus exacte possible, du problème général que nous avons énoncé au commencement de cet ouvrage.

CHAPITRE SECOND.

Du Calcul des latitudes en mer par l'observation de la hauteur méridienne des Astres.

196. De toutes les méthodes dont nous parlerons pour calculer la latitude, la plus simple est sans doute celle qui s'obtient par l'observation de la hauteur méridienne des astres. En effet, soit ZEHQO le méridien du lieu de l'observation, HO l'horizon, EQ l'équateur, Z le zénith et P le pôle élevé. Il est clair que l'astre observé à l'instant de son passage au méridien ne peut être 1.° qu'au point A entre le zénith et l'équateur; 2.° au point A' entre le zénith et le pôle; 3.° au point A''' entre le pôle et l'horizon; 4.° au point A'' entre l'équateur et l'horizon. Or, dans le premier cas, nous avons la latitude ZE=ZH ou 90°— la hauteur méridienne AH de l'astre A+la déclinaison AE du même astre. Fig. 35.

Donc, représentant par L la latitude du vaisseau, par h la vraie hauteur méridienne de l'astre, et par δ sa déclinaison : on aura, lorsque la déclinaison est plus petite que la latitude et de même dénomination que cette dernière, l'équation

$$L=90^\circ+\delta-h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Dans le second cas, où nous supposons l'astre en A' entre le zénith et le pôle, nous avons la hauteur PO du pôle au-dessus de l'horizon, ou la latitude du vaisseau (art. 23) = à la vraie hauteur méridienne A'O — la distance polaire A'P; mais cette distance polaire est $=90^\circ-\delta$; donc, lorsque la déclinaison de l'astre observé, étant plus grande que la latitude, est de même dénomination que cette dernière, l'on a

$$L=h+\delta-90^\circ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Fig. 35. Dans le troisième cas où l'astre est situé entre le pôle et l'horizon, on a P O, ou la latitude L = à la hauteur méridienne A‴O + la distance polaire PA‴; donc

$$L = 90° + h - \delta . \ . \ . \ . \ . \ (54).$$

Enfin, dans le quatrième cas, où la déclinaison est de dénomination différente de la latitude, on aura la latitude ZE = ZH ou 90° — la hauteur méridienne A″H — la déclinaison A″E, donc

$$L = 90° - (h + \delta) . \ . \ . \ . \ . \ (55).$$

Les deux équations (52) et (55) pourroient être réunies en une seule représentée par celle (52), en considérant comme positive la déclinaison de l'astre, lorsqu'elle est du côté du pôle élevé; et comme négative, lorsqu'elle est du côté opposé, conformément aux lois de corrélations qui existent entre les grandeurs comptées d'une même origine.

Remarquons maintenant, 1.° que dans le premier cas, l'observateur étoit tourné vers le pôle abaissé P′; que la distance AP′ ou 90° + δ de l'astre au pôle vers lequel étoit tourné l'observateur, étoit plus grande que la hauteur méridienne AH de l'astre, et que la latitude étoit de dénomination différente du pôle vers lequel l'on a observé la hauteur de l'astre.

2.° Que, dans le second cas, l'observateur étant tourné vers le pôle P, la distance A′P ou 90° — δ de l'astre vers ce pôle, étoit plus petite que la hauteur A′O de l'astre, et que la latitude du vaisseau étoit de même dénomination que ce pôle P vers lequel étoit tourné l'observateur dans l'instant de l'observation.

3.° Que le troisième cas ne peut avoir lieu que pour un astre dont la déclinaison, de même dénomination que le pôle élevé, est plus grande que le complément de la latitude de l'observateur (article 75), et lorsque l'astre passe la seconde fois au méridien en A‴, après y avoir passé en A du côté du pôle abaissé, ce qui rentre dans le premier cas, en ne considérant que le premier passage : tel est, par exemple, le soleil pour les habitans qui habitent dans une zone glaciale, lorsque cet astre se trouve suffisamment près du tropique de même dénomination que le pôle élevé de ces habitans. Ce troisième cas a encore lieu pour les astres circompolaires (art. 25) qui, de même que ceux que nous venons de considérer, passent deux fois au méridien, une fois en A ou A′, ce qui rentre dans le premier ou second cas, et l'autre fois en A‴ entre le pôle élevé et l'horizon.

4.° Que, dans le quatrième cas, l'observateur étant tourné vers le pôle abaissé

P', la distance A''P' ou 90°—δ de l'astre observé à ce pôle, est plus grande que la hauteur méridienne A''H de l'astre.

Cela posé, nous conclurons qu'en en exceptant le second passage au méridien des astres qui ne se couchent pas pour l'observateur, et qui ont déjà été observés au premier passage entre le pôle élevé et l'équateur élevé, *il faudra calculer la distance de l'astre observé au pôle vers lequel on a été tourné en faisant l'observation de la hauteur méridienne, et prendre la différence de cette hauteur corrigée, à la distance polaire en question; cette différence sera la latitude cherchée, et de plus elle sera de même dénomination que le pôle vers lequel on étoit tourné dans l'observation, si la hauteur méridienne est plus grande que la distance de l'astre à ce pôle; au contraire elle sera de dénomination différente, si la hauteur méridienne est plus petite que la distance polaire.*

Dans le cas où l'on voudroit observer l'astre, décrivant un parallèle entièrement au-dessus de l'horizon à son second passage au méridien, c'est-à-dire, entre le pôle et l'horizon élevé au-dessus de l'équateur, on pourra se servir de la formule (54). Mais ce cas est très-rare; car, relativement au soleil, la lune et les autres planètes, on ne navigue pas ordinairement assez près des pôles pour voir ces astres à leurs deux passages consécutifs à un même méridien; et par des raisons que nous ferons bientôt connoître, on ne se sert guère des hauteurs méridiennes des étoiles pour déterminer la latitude du vaisseau.

Avant de passer à des applications de ces principes à des exemples, nous allons d'abord entrer dans quelques plus grands détails que ceux de l'art. 172, pour l'observation de la hauteur des astres par le moyen de l'octant ou du sextant. Ensuite nous rappellerons quelques principes que nous avons démontrés dans le second livre, et que nous réunirons ici afin de ne rien laisser à désirer à nos lecteurs.

197. L'octant ou le sextant étant bien rectifié suivant les méthodes enseignées aux articles 177..... 183, on aura le soin de le tenir bien verticalement; ensuite, se tournant vers l'astre S, dont on veut observer la hauteur au-dessus de l'horizon, et plaçant l'œil à la pinnule ou lunette O, on visera l'horizon à travers la partie transparente du miroir K; détachant après cela l'alidade avec la main gauche, on la fera couler et avancer doucement vers B, jusqu'à ce que, par ce mouvement on voie arriver l'image de l'astre sur la partie étamée du même miroir K, et qu'elle soit sur une même ligne avec l'horizon vu par la partie transparente, c'est-à-dire qu'il faut amener l'image de l'astre sur la ligne qui sépare Fig. 24.

la partie transparente du miroir de celle qui ne l'est pas, en promenant doucement l'instrument sans l'incliner; et alors l'angle DAC parcouru par l'alidade, et par conséquent par le grand miroir A, sera l'angle de hauteur demandé de l'astre observé.

Lorsque l'astre observé est le soleil ou la lune, c'est le bord supérieur ou inférieur du disque que l'on amène au contact avec l'horizon.

Si c'est la hauteur méridienne du soleil que l'on veut observer, on commencera l'observation quelques momens avant l'heure du vrai midi du vaisseau, et l'on ne cessera de suivre son cours tout le temps qu'il montera, jusqu'à ce qu'on aperçoive que son bord inférieur commence à mordre l'horizon; alors l'on arrêtera l'alidade, parce qu'il sera parvenu à la plus grande hauteur qu'il puisse avoir ce jour-là, et que conséquemment il est au méridien.

Il faut, autant qu'il est possible, faire convenir l'image de l'astre ou du point que l'on a observé, avec le point d'intersection de l'horizon et de la ligne qui sépare la partie étamée de celle qui ne l'est pas. Cependant, quand ce point que l'on observe seroit à quelque distance de cette dernière ligne, l'erreur qui en résulteroit seroit sensiblement nulle, ou du moins très-petite, et par conséquent pourroit être négligée. Mais ce qui doit être fait avec le plus de soin dans ces observations, c'est de bien déterminer le point de contact de l'astre observé avec l'horizon. Pour mieux s'en assurer, il faut balancer légèrement l'octant à droite et à gauche; alors, si le contact est exact, et que l'astre ne change pas sensiblement de hauteur pendant cette opération, il doit, au moindre mouvement, paroître se détacher de l'horizon en s'élevant.

198. Le point du disque du soleil dont on observe la hauteur, étant celui qui est le plus rapproché de l'horizon, il faudra ajouter à la hauteur observée, le demi-diamètre de cet astre. L'on trouve la valeur de ce demi-diamètre pour de six en six jours, dans *La Connoissance des temps* de chaque année à la septième page du mois. De cette somme on retranchera la dépression de l'horizon que l'on trouvera par le moyen de la table IV (art. 106), ce qui donnera la hauteur apparente du soleil. De cette hauteur apparente on retranchera la réfraction atmosphérique correspondante à cette hauteur, et l'on aura, avec une approximation suffisante, la hauteur vraie du centre du soleil, lorsque l'on opère pour obtenir la latitude du vaisseau.

199. Si l'on veut obtenir une plus grande exactitude, il faudra, 1.° avant de retrancher de la hauteur apparente la réfraction, corriger celle-ci de la variation de la densité de l'atmosphère par le moyen de la table VIII; 2.° ajouter à

la hauteur déjà trouvée la parallaxe de hauteur du soleil, ce qui sera, à moins d'une demi-seconde près, le nombre de secondes indiqué dans la petite table XV. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, ces dernières corrections sont sensiblement inutiles, lorsqu'on prend la hauteur méridienne du soleil pour en obtenir la latitude du vaisseau; car l'omission qu'on en fait, ne sauroit causer une erreur d'une demi-minute dans la latitude.

200. Connoissant la hauteur vraie du soleil à l'instant de son passage au méridien du vaisseau, il ne faudra plus que connoître la déclinaison de cet astre au même instant, pour en déduire la latitude du vaisseau. Or, l'on trouve dans la *Connoissance des temps* la déclinaison du soleil pour le midi précédent et pour le midi suivant de Paris. De plus, on connoît toujours, à quelques degrés près, la longitude du vaisseau, et par conséquent quelle est à peu près l'heure de Paris qui correspond à celle du midi vrai du vaisseau. Donc, par le moyen des parties proportionnelles, on connoîtra le nombre de minutes et de secondes de degrés qu'il faudra ajouter ou retrancher de la déclinaison du soleil pour le midi de Paris le plus voisin de celui du vaisseau. (*Voyez* la formule 42 art. 126.) Mais pour éviter la peine de faire ce calcul, nous avons placé à la fin de cet ouvrage, la table XVI qui donne tout de suite, et presqu'à vue, le résultat demandé.

Nous allons expliquer l'usage de cette table, en l'appliquant tout de suite à un exemple. Soit proposé de trouver la déclinaison du soleil le 26 octobre 1808 à $4^h\,15^m$ après midi, heure vraie de Paris.

L'on trouve dans la *Connoissance des temps* de cette année-là (seconde page du mois), que la différence en déclinaison, du 26 au 27, est de 20′ 26″, ou 20′,4. Cela posé, voici l'opération en se servant de la table XVI:

sous 4 heures vis-à-vis { 20′ / 0,4 } on trouve	{ 3′,3 / 0,1 }
sous 15 minutes vis-à-vis 20′ on trouve.	0,2
Somme.	3′,6 +
Déclinaison du soleil le 26 à midi.	12° 29′,5
Déclinaison demandée.	12° 33′,1

Voici maintenant un exemple du calcul de la latitude du vaisseau par l'observation de la hauteur méridienne du soleil.

Le 21 janvier 1808, étant en mer par 120 degrés de longitude occidentale, et

la hauteur de l'œil de l'observateur au-dessus de l'horizon étant de 8 mètres, on a trouvé, en observant vers le pôle sud, que la hauteur méridienne du bord inférieur du soleil, étoit de 20° 10′; l'on demande la latitude du vaisseau.

Puisque le vaisseau est à 120° ou 8^h à l'ouest de Paris, l'heure de l'observation sera, pour Paris, le 21 janvier à 8 heures du soir.

Hauteur observée du ☉	20° 10′ 0″	
½ diam. ☉ (*Connoissance des temps*, page 56)	16 17	+
Somme	20 26 17	
Inclinaison de l'horizon pour 8 mètres de hauteur (tab. IV)	5 27	—
Différence qui est la hauteur app. ☉	20 20 50	
Réfract. pour 20° 21′ de hauteur apparente	2 32	—
Hauteur vraie	20 18 18	

Déclinaison du ☉ le 21 janvier à midi	20° 5′ 46″	austr.
id. 22 *id.*	19 52 30	austr.
Différence	13 16	
Pour 8^h (tab. XVI)	4 24 —	
Déclin. le 21 à midi	20 5 46	
Déclin. pour le moment de l'ob.	20 1 22	
Distance au pôle austral vers lequel s'est faite l'observation		69 58 38
Différence		49 30 20

qui est la latitude demandée du vaisseau; de plus, elle est septentrionale, puisque la hauteur vraie du soleil est plus petite que la distance au pôle méridional vers lequel étoit tourné l'observateur au moment de l'observation (art. 196).

Nous n'avons pas eu égard, dans cet exemple, à la parallaxe de hauteur du soleil qui seroit de 8″ (table XV), et à la variation de la densité de l'atmosphère, pour nous conformer à ce que nous avons annoncé à l'article (199).

201. Si l'astre, dont on observe la hauteur méridienne pour en déduire la latitude du vaisseau est une étoile, il n'y aura d'autres corrections à faire à sa hauteur observée pour avoir la vraie, que d'en retrancher l'inclinaison de l'horizon et la réfraction de hauteur. Car, ainsi que nous l'avons déjà dit, les étoiles sont trop loin de nous pour que nous puissions apercevoir dans ces astres, une parallaxe et un diamètre apparent sensible. Combinant cette hauteur vraie avec la déclinaison de l'étoile (que l'on trouvera pour le jour de l'observation par le

moyen de la *Connoissance des temps*, ou de la table XVII dans laquelle nous avons placé quelques étoiles qui, quoiqu'invisibles à Paris, peuvent être utiles aux navigateurs qui naviguent dans les mers australes), de la même manière que nous l'avons fait dans l'article précédent pour le soleil, on aura la latitude du vaisseau.

202. Mais étant très-difficile la nuit de bien distinguer l'horizon, et par conséquent d'observer de bonnes hauteurs des étoiles; il faut, autant que cela est possible, choisir une étoile brillante de première, ou au moins de seconde grandeur qui passe au méridien pendant le crépuscule, lorsqu'il y a assez de jour pour distinguer l'horizon.

203. Il est à propos de connoître d'avance l'étoile qui pourra servir à cette observation. Or, voici un moyen bien simple que je propose, et qui évitera tous les tâtonnemens. L'on connoît à peu près l'angle horaire du soleil du vaisseau pendant le crépuscule du soir et du matin; cet angle ne fût-il donné que par une montre ordinaire réglée depuis peu de tems sur l'heure vraie du vaisseau, et ayant égard au changement en longitude. On peut aussi connoître à peu près l'ascension droite du soleil à l'heure du crépuscule par le moyen de la *Connaissance des temps*. Or, si dans l'équation 41 (art. 124) l'on fait le premier membre ang. hor. de l'astre $=0$, ce qui est la condition pour que l'astre soit au méridien, on aura

$$\text{Asc. dr. de l'astre, ou asc. dr. du méridien (art. 123)} = \text{asc. dr.} \odot \pm \text{ang. hor.} \odot,$$

le signe $+$ pour le crépuscule du soir, le signe $-$ pour le crépuscule du matin. L'on n'aura donc qu'à chercher dans la *Connoissance des temps*, ou dans la table XVII, l'étoile de première, ou au moins de seconde grandeur, qui a cette ascension droite; et s'il y en a une, ce sera celle-là dont on observera la hauteur méridienne, comme on l'a fait pour le soleil. Mais, afin de pouvoir plus aisément ramener l'étoile dans le champ de la lunette, on calculera d'avance, et avec la latitude estimée, quelle sera à peu près, la hauteur méridienne de l'étoile, ce que l'on obtiendra aisément par le moyen de celle des quatre équations (52)...(55) qui convient à ce cas.

EXEMPLE. Le 24 février 1808, étant par une latitude estimée 47 degrés méridionale, et l'heure du crépuscule du soir que l'on a jugée la plus favorable à une observation de hauteur d'étoile, étant $7^h \frac{3}{4}$, l'on demande, 1.° d'indiquer l'étoile que l'on doit choisir pour observer sa hauteur méridienne; 2.° de placer convenablement l'alidade du grand miroir de l'octant, ou du sextant avec lequel on

doit faire l'observation, afin qu'on puisse, sans tâtonnement, ramener l'astre dans le champ de la lunette; 3.° de trouver exactement la latitude du vaisseau par le moyen de l'observation de la vraie hauteur méridienne de l'étoile, sachant d'ailleurs, que la hauteur de l'œil de l'observateur au-dessus du niveau de la mer est de 8 mètres.*

1.° Soit trouvé par la *Connoissance des temps*, et en ayant égard à la longitude estimée du vaisseau, que l'ascension droite du soleil à $7^h\frac{3}{4}$ est de 326° 55'; ajoutant cette quantité avec l'angle horaire du soleil $7^h\frac{3}{4}$ ou 116° 15', l'on a l'ascension droite du méridien du vaisseau qui sera 443° 10' ou 83° 10'. Cherchant dans la *Connoissance des temps*, ou dans notre table XVII, une étoile dont l'ascension droite soit à peu près égale à cette dernière quantité, on trouve que l'étoile de seconde grandeur α *Colombe* est celle que l'on doit choisir pour l'observation; car son ascension droite, en ayant égard à la variation annuelle, est 83° 10' 34".

Fig. 35. 2.° La déclinaison de cette étoile est, en ayant égard à la variation annuelle, de 34° 10' 57" australe. Or, la latitude estimée du vaisseau étant plus grande et de même dénomination que la déclinaison de l'étoile, celle-ci ne peut être placée en A' entre le pôle et le zénith. De plus, elle n'est pas circompolaire à l'observateur, puisque sa déclinaison est moindre que le complément de la latitude estimée du vaisseau. Donc, elle est placée en un point A entre le zénith Z et l'équateur E, lorsqu'elle passe au méridien. Ainsi, l'on aura par le moyen de l'équation (52) qui convient à ce cas-là, $h=90°+\delta-L=90°+34°11'-47°=77°11'$. On placera donc l'alidade du grand miroir de l'octant, ou du sextant, de manière que la ligne de foi, tombe entre le 77.me et le 78.me degré du limbe; et se tournant vers le pôle boréal, on fera mouvoir doucement l'alidade, soit en avant, soit en arrière, jusqu'à ce que l'on aperçoive une étoile suffisamment brillante dans le champ de la lunette, qui ne pourra être que celle que l'on veut observer; car il n'y a point d'étoiles de première et seconde grandeurs dont les distances soient moindres que quelques degrés.

3.° Finissant l'observation comme nous l'avons indiqué pour le point le plus bas du disque du soleil (art. 197), supposons que l'on trouve que la hauteur méridienne observée est de 77° 36', il faudra en retrancher 5' 27" correspondantes à 8 mètres d'élévation (table IV), et 13" pour la réfraction, ce qui donnera, pour la vraie hauteur méridienne de l'étoile, 77° 30' 20". On aura donc la latitude méridionale du vaisseau $=90°+34°10'57''-77°30'20''=46°40'37''$.

204. On peut encore trouver la latitude du vaisseau par l'observation de la hauteur méridienne de la lune. Mais cet astre étant beaucoup plus près de la terre que tous ceux que nous avons considérés jusqu'à présent, et par conséquent ses mouvemens plus variés et plus sensibles pour l'observateur, le calcul sera plus long que les précédens.

Si la lune étoit toujours à une même distance du soleil, il est clair que l'heure du vaisseau, à l'instant du passage de la lune au méridien du vaisseau, seroit la même que celle de Paris à l'instant du passage de la lune au méridien de Paris. Mais dans l'intervalle de temps qui s'écoule entre les heures vraies de Paris qui correspondent aux instans respectifs du passage de la lune aux deux méridiens, la lune a changé de distance relativement au soleil d'une quantité qui, réduite en temps, et trouvée par les parties proportionnelles (ce qui n'est pas rigoureux, mais d'une exactitude suffisante), devra être ajoutée ou retranchée de l'heure du passage de la lune au méridien, suivant que le vaisseau est à l'ouest ou à l'est de Paris. Ajoutant à cette heure trouvée, ou retranchant de cette même heure, la différence estimée des méridiens réduite en temps, suivant que la longitude du vaisseau est occidentale ou orientale, on aura l'heure vraie estimée de Paris dans l'instant de l'observation à bord du vaisseau. Au moyen de cette heure-là et de la *Connoissance des temps*, on trouvera par les parties proportionnelles la déclinaison de la lune, sa parallaxe horizontale et son diamètre horizontal pour l'instant de l'observation. La déclinaison servira à trouver la distance polaire du côté où l'on étoit tourné en observant la hauteur méridienne de la lune. Avec la parallaxe horizontale de la lune pour Paris, on trouvera celle qui convient à la latitude estimée du vaisseau (table V); d'où l'on conclura la parallaxe de hauteur (for. 28, art. 113); enfin, avec le demi-diamètre horizontal, on aura le demi-diamètre de hauteur (table VI). Ces deux dernières quantités, ainsi que la réfraction de hauteur, et la dépression de l'horizon (table IV), étant combinées avec la hauteur observée suivant les règles prescrites à l'article 121, et traduites en équations (for. 35 et 36), on aura la hauteur vraie de la lune, dont la différence avec la distance polaire, fera connoître la latitude du vaisseau (art. 196).

Exemple. Le 9 août 1808, étant, d'après l'estime, par 168° 45′ de longitude occidentale, on a observé, vers les deux heures du matin, la hauteur méridienne du bord inférieur de la lune, de 60° 5′ vers le sud. L'œil de l'observateur étoit élevé de 7 mètres au-dessus de la mer : on demande la latitude vraie du lieu de l'observation.

On trouve dans la *Connoissance des temps* de 1808 (page 136), que la lune passe au méridien de Paris le 8 août à $13^h 54^m$, temps astronomique, ou, ce qui est la même chose, le 9 à $1^h 54^m$, temps civil : donc, si la lune restoit toujours à la même distance du soleil, ce satellite auroit passé au méridien du vaisseau à $1^h 54^m$, temps vrai du vaisseau. Mais à cause que ce dernier est à 168° 45′, ou $11^h 12^m$ à l'ouest de Paris, il faut chercher le temps du retard du mouvement d'orient en occident de la lune, pendant ces $11^h 12^m$, c'est ce que nous trouverons par les parties proportionnelles, ainsi qu'il suit :

Passage de la lune au méridien de Paris, le 8 août.	$13^h 54^m$
Idem. . . . . 9 août.	14 38
Différence en 24 heures.	0 44
Différence en { 6.	11
3.	5 30ˢ
2.	3 40
Différence en. 12′.	22
Différence en 11^h 12′.	$20^m 32^s$ +
Heure du passage de la ☾ au méridien du vaisseau si elle ne s'éloignoit d'occident en orient du ☉.	13^h 54 0
Heure vraie, d'après l'estime de la longitude, du passage de la ☾ au méridien du vaisseau.	14 14 32
Différence en temps des méridiens de Paris et du vaisseau.	11 12
Temps vrai de Paris, toujours par estime, à l'instant de l'observation le 9 août	1 27

Déclinaison de la ☾ le 9 août à midi.	0° 57′ B
Idem. . . . . à 6^h.	2 2 B
Différence en. . . . . 6^h.	1 5
Différence en { 1^h.	10′ 50″
20^m. . .	3 37
5 . . .	54
2 . . .	20
Différence pour. . . . . . . 1^h. 27^m. . .	15 41
Déclinaison de la ☾ le 9 août à midi.	0° 57
Déclinaison de la ☾ le 9 août à $1^h 27^m$.	1 12 41
Ajoutant.	90
Distance de la ☾ au pôle austral.	91° 12′ 41″

Parallaxe horiz. de la ☾ pour Paris le 9 août à midi.		55′ 13″
Idem à minuit.		54 59
Différence en 12^h.		14
Différence en $1\frac{1}{2}$.		. 2
Parallaxe horiz. de la ☾ pour Paris le 9 août à $1^h 27'$ (*).		55′ 11″ log. sin. 8,2055154
Demi-diam. hor. de la ☾ le 9 août à midi. .	15 4	
Idem le 10 *id.*	14 57	
Différence en 24^h.	7	
Différence en $1\frac{1}{2}$. . . . moins d'une $\frac{1}{2}$ seconde.		
Donc $\frac{1}{2}$ diamètre horiz. de la ☾ le 9 à $1^h 27'$.	15′ 4″	
Augment. pour 60° de haut. (tab. VI). .	13	
$\frac{1}{2}$ diamètre de haut.	15′ 17″ +	
Haut. observée du bord inférieur . . .	60° 5	
Somme.	60 20 17	
Inclin. de l'horiz. pour 7 mèt. d'élévation (tab. IV).	5 6 —	
Hauteur apparente ☾. . . .	60 15 11	. . . . log. cos. 9,6956344
		Somme. 7,9011498
qui est le log. sin. de la parallaxe de haut. . . .	27 23	
Somme.	60 42 34	
Réfraction.	1	
Hauteur vraie ☾.	60 42 33	
Distance ☾ au pôle sud.	91 12 41	
Différence.	30 30 8	

(*) N'étant pas donnée dans l'énoncé de l'exemple, la latitude estimée, nous ne pouvons réduire la parallaxe horizontale de Paris à celle qui convient au lieu de l'observation (tab. V); mais dans ces cas-là, si l'on veut calculer avec beaucoup d'exactitude, on pourra avec la latitude trouvée, chercher dans la table V la correction, ensuite la multiplier par le cosinus de la hauteur, et ajouter ou retrancher le produit de la latitude obtenue, suivant que la correction sera positive ou négative. Ainsi, dans notre exemple, nous trouvons pour 30 degrés de latitude, et 55 minutes de parallaxe horizontale de la lune à Paris, la correction positive 3″; ajoutant son logarithme 0,4771213 avec celui 9,6956344 du cosinus de la hauteur apparente, nous avons pour somme 0,1727557 qui est le logarithme d'environ 1″. Donc la vraie latitude observée du vaisseau est 30°30′7″. Cette règle pose sur ce que l'équation $\sin. p = \cos. h \sin. P$, ou simplement $p = P \cos. h$, étant différenciée par rapport à p et P, donne $dp = \cos. h\, dP$.

Mais cette correction ne pouvant donner, au plus, que 3 à 4 secondes, on peut toujours la négliger lorsqu'on calcule la latitude du vaisseau par le moyen de la hauteur méridienne de la lune.

ce qui est la latitude nord du vaisseau, puisque la distance de la lune au pôle sud vers lequel s'est faite l'observation, est plus grande que la hauteur de l'astre.

205. Enfin le calcul de la latitude du vaisseau par l'observation de la hauteur méridienne d'une planète, ne pourra s'effectuer qu'en employant l'une des trois suivantes, Mars, Jupiter et Saturne : car, Mercure et Vénus sont trop près du soleil pour être observées au méridien, puisqu'elles y passent peu de temps avant, ou après le soleil; ce qui empêche de les voir en ce moment; et Cérès, Pallas, Junon, Vesta et Uranus, sont de trop petits astres pour que les marins puissent les observer facilement. Lorsque l'on voudra avoir la latitude du vaisseau par le moyen de la hauteur méridienne d'une des trois planètes citées précédemment, il faudra choisir celle qui passera au méridien du vaisseau pendant le crépuscule, afin d'observer une bonne hauteur, ainsi que nous l'avons fait pour les étoiles (art. 202.)

D'ailleurs, le calcul est le même que pour l'observation du soleil. L'on pourra même négliger, sans crainte de commettre une erreur d'une demi-minute dans la latitude, la parallaxe et le demi-diamètre de l'astre observé; car,

les plus grandes parallaxes de	Mars	sont	16"	et leurs demi-diamètres sont	14"
	Jupiter		2		20
	Saturne		1		9

Je ne donnerai pas d'exemples de pareils calculs, parce qu'ils n'offrent aucune difficulté, et que d'ailleurs, je n'ai jamais vu pratiquer cette méthode, que je n'indique que pour compléter la théorie qui nous occupe dans ce chapitre.

206. Il peut arriver que lors du passage au méridien de l'astre dont on veut observer la hauteur méridienne, l'horizon soit embrumé de ce côté, ou que des terres, dont les positions géographiques sont inconnues, se trouvent sous le méridien du côté où doit se faire l'observation. Alors on observe la hauteur par derrière, c'est-à-dire en tournant le dos à l'astre. Pour rendre l'octant ou le
Fig. 24. sextant propre à cette sorte d'observation, on a placé sur le côté A B de l'instrument, un petit miroir M Q, en partie transparent, et en partie étamé comme celui K dont nous avons déjà parlé; mais placé perpendiculairement sur la direction du miroir K. De manière que lorsque l'alidade A D est sur le point zéro, le miroir M N lui est perpendiculaire. L'œil de l'observateur étant placé à une pinnule fixée en R à quelque distance du miroir M N, voit tout à la fois l'horizon à travers la partie transparente, et l'image de l'astre sur la partie étamée. L'observateur fait arriver cette image sur le miroir M N en tirant à soi l'alidade

AD, de manière que le rayon de lumière SA parvient à l'œil en R, après deux réflexions successives en A et Q, suivant la droite QR; mais l'image est vue renversée, parce que, pour peu de hauteur que l'astre ait sur l'horizon, les deux miroirs A et MN font un angle obtus. En effet, le rayon parti du bord supérieur du soleil S pris pour exemple, étant parallèle à celui qui part du bord inférieur, frappera le grand miroir A en un point *a* supérieur à celui *b* où parvient le rayon du bord inférieur : donc, par la première réflexion, le rayon réfléchi du bord supérieur parviendra au miroir Q en un point M, inférieur à celui N où parvient le rayon réfléchi du bord inférieur du soleil. Mais l'observateur en R, voit l'objet S comme s'il étoit placé au miroir MN de la manière qu'il s'y figure par la seconde réflexion; donc, le point supérieur du bord du soleil lui paroîtra en M et le point inférieur en N, c'est-à-dire, qu'il verra l'astre renversé. Fig. 24.

207. Pour vérifier l'octant ou le sextant dans les observations faites par derrière, il faut, comme dans la vérification enseignée à l'article 180, relativement aux observations faites par devant, que l'on aperçoive sur une même ligne l'horizon vu directement à travers la partie transparente du miroir et celui dont l'image se réfléchit sur la partie étamée. Mais dans le cas de l'article 180, c'étoit le même côté de l'horizon que l'on voyoit directement et par réflexion; et dans le cas dont nous parlons, l'horizon réfléchi est l'opposé de celui vu directement : donc, il faudroit que l'alidade fût sur le point de zéro, et l'œil de l'observateur à la surface de la mer, pour que, les deux miroirs MN et *ab* étant perpendiculaires, les deux horizons fussent vus sur une même ligne; car, alors le miroir *ab* formeroit avec la verticale un angle de 22° 30′ pour l'octant, ou de 30° pour le sextant; donc le rayon de l'horizon réfléchi, lequel est dans un plan perpendiculaire à la verticale, frapperoit le grand miroir sous un angle de 67° 30′ pour l'octant ou de 60° pour le sextant. L'angle de réflexion seroit conséquemment de la même quantité, ce qui donneroit l'angle AQN formé par le rayon réfléchi et le miroir MN de 22° 30′ pour l'octant et de 30° pour le sextant, puisque le miroir MN étant perpendiculaire sur le plan du grand miroir placé le long de AC, on auroit AQN complément de QAC; donc l'angle RQM, formé par le second rayon réfléchi et le miroir NM, seroit de 22° 30′ pour l'octant ou de 30° pour le sextant; d'où il suit que le second rayon de réflexion QR seroit perpendiculaire à la verticale, et par conséquent sur la même direction que le rayon HR venu directement de l'horizon H. Ainsi, dans ce cas-là, les deux horizons seroient vus sur une même ligne droite; mais

Fig. 21. l'œil de l'observateur s'élevant au-dessus de la surface de la mer, les rayons visuels venus des deux horizons opposés et tangens à la surface de la mer s'abaissent; ainsi, ils forment un angle dont le sommet est à l'œil de l'observateur et qui est de 180° moins l'inclinaison de l'horizon des deux côtés, c'est-à-dire, le double de l'inclinaison de l'horizon correspondante à la hauteur de l'œil de l'observateur (table IV). Il faut donc, pour que les deux horizons se présentent sur une même ligne droite, que l'alidade A D se trouve en delà du point zéro du côté de L, d'une quantité égale au double de l'inclinaison, puisque les deux rayons que nous avons considérés, comme ne formant qu'une ligne droite horizontale, s'inclinent au-dessous, et forment un angle égal à la double inclinaison de l'horizon; donc, pour les rappeler à leur première position, il faudra écarter l'alidade du point zéro d'une quantité égale à l'angle formé par les deux rayons, et en sens contraire de ce que l'on auroit fait si les deux droites s'étoient inclinées au-dessus de l'horizontale, c'est-à-dire, qu'il faut éloigner l'alidade vers le point L de cette quantité.

Si, par exemple, l'élévation de l'œil de l'observateur est de 7 mètres, c'est-à-dire, si l'inclinaison de l'horizon est de 5′ 6″ (tab. IV), il faudra pour que les deux miroirs A et M N soient parallèles, que l'alidade A D soit éloignée du point zéro du côté de L de 10′ 12″. Si la chose n'a pas lieu, on touchera à la monture du miroir M N jusqu'à ce que l'alidade restant toujours au même point, les deux horizons se voient sur une même ligne droite.

Dans cette vérification l'on voit l'image de l'horizon réfléchi renversée, c'est-à-dire, que la mer paroît au-dessus du ciel; ce qui est une suite de ce que nous avons démontré à l'article 206.

Lorsque, dans l'observation par derrière de la hauteur du soleil ou de la lune, on ramènera le bord qui paroît l'inférieur, à être tangent à l'horizon, il faudra, pour avoir la hauteur du centre, retrancher de celle observée du bord le plus près de l'horizon, le demi-diamètre de l'astre; il faudra l'ajouter, si l'on a observé la hauteur du bord qui paroît le plus éloigné de l'horizon. Ce procédé est l'inverse de celui que nous avons prescrit à l'article 197 pour les observations par devant. En effet, dans ces dernières observations, les bords supérieur et inférieur de l'astre, étoient réellement ce qu'ils nous paroissoient: au lieu que dans les observations par derrière, les images des objets étant renversées, nous ne mesurons que la hauteur du bord supérieur, lorsqu'il paroît que nous mesurons la hauteur du bord inférieur, et réciproquement. Donc, la correction du demi-diamètre doit être faite en sens inverse.

CHAPITRE TROISIÈME.

Du Calcul de la latitude du Vaisseau par le moyen de deux hauteurs du Soleil prises hors du Méridien, de l'intervalle de temps écoulé entre les deux observations et de la latitude estimée du Vaisseau.

De toutes les méthodes connues pour obtenir la latitude du vaisseau, la plus usitée, après celle que nous avons enseignée dans le chapitre précédent, est la suivante, dont nous allons parler, et qui est due à *Douwes*. Cet astronome publia sa méthode en 1754 dans le premier volume de l'académie de Berlin. M. Lévêque est le premier qui l'ait fait connoître en France, en la publiant dans son *Guide du navigateur*, où il la donne sans démonstration. Le docteur Pemberton l'a démontrée d'une manière un peu compliquée dans les *Transactions philosophiques*, tom. 51; M. Lalande en donne une démonstration dans son *Astronomie*, art. 3993. Enfin, M. Mendoza démontre cette méthode dans la *Connoissance des temps* de 1793 (page 289..... 302), c'est cette dernière démonstration que nous allons faire connoître; mais en lui donnant de plus grands développemens relativement aux corrections, et ne suivant pas tout à fait la route tenue par le savant que je viens de citer.

Au reste, l'on pourra aisément comparer ce que nous allons dire dans ce chapitre et dans la note XIX, qui lui sert de complément, avec le mémoire cité de M. Mendoza. C'est même pour faciliter ce rapprochement, que nous nous servirons des mêmes figures et, à peu près, des mêmes symboles que ce géomètre.

208. Représentons par

l la latitude estimée L la latitude calculée L' la latitude corrigée	du vaisseau.
A la plus grande hauteur a la plus petite hauteur D la déclinaison H le plus grand angle horaire h le plus petit angle horaire M l'angle horaire moyen entre H et h R la hauteur méridienne calculée	du soleil.

t l'intervalle de temps entre les deux observations.
n le nombre de nœuds courus dans l'intervalle de temps entre les deux observations.
n' le nombre de minutes de degré à ajouter ou à retrancher de la première hauteur corrigée du soleil.
Q l'angle formé par la direction de la route avec la ligne du relèvement du soleil.

Fig. 56. Soit HO l'horizon du vaisseau, HZO son méridien, Z son zénith, P le pôle élevé de l'observateur, EQ l'intersection de l'équateur et du méridien, RS celle du parallèle parcouru par le soleil et du méridien, a et A les projections sur le plan du méridien des deux points du parallèle où le soleil a été observé.

Abaissant des points a, A et R les perpendiculaires aD, AC, RB sur le plsn de l'horizon, il est clair que ces droites seront respectivement les sinus des hauteurs du soleil lorsqu'il se trouve à ces trois points a, A et R; donc $a\text{D} = \sin.\ a$, $\text{AC} = \sin.\ \text{A}$ et $\text{RB} = \sin.\ \text{R}$; d'où il suit qne, menant AN, aK parallèles à l'horizon, on aura

$$\text{AF} = \sin.\text{A} - \sin.\ a = 2\sin.\left(\frac{\text{A}-a}{2}\right)\cos.\left(\frac{\text{A}+a}{2}\right).\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (a).$$

Mais si par le pôle P et par le centre du soleil, à l'instant où la projection des centres de cet astre sur le méridien est a, on fait passer un grand cercle horaire, l'angle formé en P par le cercle horaire et le méridien PEH sera l'angle horaire du soleil dans l'instant de l'observation de sa plus petite hauteur a; donc si le point I est celui de projection de l'intersection du cercle horaire avec l'équateur, on aura évidemment QI qui sera le cosinus de l'arc de l'équateur qui mesure l'angle horaire correspondant à la plus petite hauteur, c'est-à-dire le cosinus du plus grand angle horaire H. Mais l'arc du parallèle du soleil qui a pour projection Ra, est semblable à celui de l'équateur qui mesure l'angle horaire H. Or, l'on sait que les fonctions trigonométriques des arcs, semblables dans des cercles différens, sont entr'elles comme les rayons respectifs de ces cercles; d'où QI (cos. H) : aS :: EQ (1) : RS; donc $a\text{S} = \text{RS}\cos.\text{H}$. On démontrera de même que $\text{AS} = \text{RS}\cos.h$. Mais $\text{RS} = \sin.\text{PR} = \cos.\text{ER} = \cos.\text{D}$; donc, $a\text{S} = \cos.\text{D}\cos.\text{H}$, et $\text{AS} = \cos.\text{D}\cos.h$; d'où AS $-$ aS, ou

$$\text{A}a = \cos.\text{D}(\cos.h - \cos.\text{H}) = 2\cos.\text{D}\sin.\tfrac{1}{2}(\text{H}+h)\sin.\tfrac{1}{2}(\text{H}-h).\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (b)$$

Or, nous remarquerons que si les deux observations sont faites avant ou après midi, c'est-à-dire, du même côté du méridien, l'angle moyen M entre les deux angles horaires H et h sera $= \frac{1}{2}(\text{H}+h)$, et le demi-intervalle de temps $\frac{1}{2}t$ sera $= \frac{1}{2}(\text{H}-h)$. Mais si les deux observations sont faites, l'une avant, l'autre après midi, c'est-à-dire, des deux côtés du méridien, on aura, à l'inverse du premier

cas, $M = \frac{1}{2}(H - h)$, et $\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(H + h)$; donc, dans tous les cas, l'équation (b) se réduit à celle Fig. 56.

$$Aa = 2\cos.D\sin.M\sin.\tfrac{1}{2}t \;.\;.\;.\;.\;.\; (c).$$

Le triangle rectiligne rectangle AFa donne l'équation $Aa = \frac{AF}{\cos.FAa}$. Mais l'angle FAa est égal à celui ZQE ou l, comme étant opposés dans le parallélogramme $ATQO'$, donç $Aa = \frac{AF}{\cos.l}$, et substituant dans cette équation, les valeurs respectives de Aa (éq. c) et de AF (éq. a), on aura celle $\cos.D\sin.M \times \sin.\frac{1}{2}t = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A-a)\cos.\frac{1}{2}(A+a)}{\cos.l}$; d'où l'on tire l'équation

$$\sin.M = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A-a)\cos.\frac{1}{2}(A+a)}{\cos.D.\cos.l\sin.\frac{1}{2}t} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (56).$$

Connoissant M, on aura aisément H et h, car dans le cas où les deux observations sont faites du même côté du méridien, ce qui donne $M = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}h$, et $\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}h$, on trouve, par l'élimination de h et ensuite de H, les deux équations

$$\left\{H = M + \tfrac{1}{2}t \text{ et } h = M - \tfrac{1}{2}t\right\} \;.\;.\;. (57).$$

De même, si les observations sont faites des deux côtés du méridien, ce qui donne $M = \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}h$, et $\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}h$; on aura encore $H = M + \frac{1}{2}t$ par l'addition des deux équations, et par soustraction on trouvera $h = -(M - \frac{1}{2}t)$, valeur qui ne diffère de la seconde des deux (57), que dans le signe de la valeur de l'angle horaire h, lequel est négatif au lieu d'être positif comme dans le premier cas, ce qui doit être, puisque dans ce second cas, il est pris de l'autre côté du méridien, par rapport à l'angle horaire toujours positif H.

Actuellement remarquons que les deux triangles rectilignes rectangles aKR, ANR, nous donnent respectivement $KR = aR\cos.aRK$, et $RN = AR\cos.ARN$. Mais puisque, ainsi que nous l'avons déjà démontré, $aS = RS\cos.H = \cos.D\cos.H$; nous aurons $aR = RS - aS = \cos.D - \cos.D\cos.H = 2\cos.D\sin.^2\frac{1}{2}H$. On démontrera de même que $AR = 2\cos.D\sin.^2\frac{1}{2}h$. Donc $KR = 2\cos.D\sin.^2\frac{1}{2}H\cos.l$, et $RN = 2\cos.D\sin.^2\frac{1}{2}h\cos.l$. Or, le sinus RB de la hauteur méridienne est $= RK + KB = RK + aD = RK + \sin.a$; de même $RB = RN + NB = RN + AC = RN + \sin.A$. On aura donc les deux équations

$$\sin.R = 2\cos.D\sin.^2\tfrac{1}{2}H\cos.l + \sin.a \;.\;.\;. (58),$$

$$\sin.R = 2\cos.D\sin.^2\tfrac{1}{2}h\cos.l + \sin.A \;.\;.\;. (59),$$

qui donnent également la valeur de la hauteur méridienne R du soleil, d'où l'on conclura à l'ordinaire, la valeur de la latitude calculée L.

209. Les équations (58) et (59) présentent deux manières d'obtenir la hauteur méridienne R; soit en employant le plus grand angle horaire, et la plus petite hauteur, soit en employant le plus petit angle horaire et la plus grande hauteur. Mendoza donne la préférence à cette dernière manière (pag. 296 de la *Connoissance des temps* de 1793). Mais je démontrerai à la note XIX que, géométriquement parlant, c'est à tort que ce géomètre blâme le docteur Pemberton d'avoir dit (*Transactions philosophiques*, tom. 51), que les deux manières sont indifférentes (*).

210. Afin de faciliter le calcul logarithmique des formules (58) et (59), faisons pour celle (58)

$$\text{tang. B} = \text{sin.} \tfrac{1}{2}\text{H} \sqrt{\frac{2 \cos. l \cos. \text{D}}{\sin. a}} \quad \ldots\ldots (60),$$

ce qui donnera

$$\text{sin. R} = \frac{\sin. a}{\cos.^2 \text{B}} \quad \ldots\ldots (61.)$$

Mettant respectivement dans ces dernières équations, les lettres h et A à la place de celles H et a, on aura les deux équations relatives au calcul logarithmique de la formule (59), ainsi nous nous dispenserons de les écrire.

211. En réfléchissant sur la méthode que nous venons d'exposer, on voit aisément que l'une de ses plus grandes défectuosités, consiste dans l'élément l qui entre dans la formule (56), et dans celle des deux équations (58) et (59) dont on se sert; puisque l n'étant que la latitude estimée, et par conséquent pouvant être très-différente de la latitude vraie, il en peut résulter pour la valeur de la hauteur méridienne calculée, et par conséquent pour la latitude calculée L, une erreur assez considérable. Quelques auteurs proposent de recommencer le calcul avec cette première latitude calculée, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on par-

(*) Les formules (58) et (59) supposant toutes deux la formule (56), il est évident qu'en rigueur géométrique, elles sont également bonnes, et doivent donner la même valeur pour R; mais à cause de l'imperfection des tables de logarithmes, si R est fort grand et $\frac{1}{2}h$ fort petit, il arrivera souvent qu'une fraction de seconde négligée, changera considérablement log. $\sin^2 \frac{1}{2}h$, et par conséquent aussi log. sin. R, ce qui produit un effet sensible sur R; inconvénient qui n'auroit pas lieu au même degré pour $\sin.^2 \frac{1}{2}$H, dont le logarithme ne varieroit pas aussi considérablement pour la fraction négligée. (Remarque qui m'a été communiquée par M. Delambre.)

vienne à en avoir une qui diffère le moins de toutes celles trouvées, avec la dernière dont on s'est servi comme élément de calcul; cette méthode peut être beaucoup plus longue que celle des corrections directes que nous démontrerons à la note XIX, et que nous appliquerons dans l'exemple numérique qui terminera ce chapitre.

212. Une autre défectuosité assez considérable de la méthode précédente, est de supposer le soleil sur un même parallèle pendant les deux observations de hauteur, quoique dans l'intervalle de temps qui s'écoule entr'elles, la déclinaison puisse changer assez considérablement. Nous avons de même égard à ce changement dans la note XIX, où nous faisons encore connoître les erreurs qui peuvent résulter sur le calcul de la latitude, de celles commises dans la mesure du temps écoulé entre les observations, etc., et les circonstances les plus favorables à la bonté de la méthode. C'est d'après toutes ces considérations, que nous avons combiné le calcul des formules démontrées précédemment, avec celui des formules de corrections démontrées à la note XIX, de manière à rendre le calcul le plus simple et le plus exact possible. Mais avant d'énoncer avec détail la règle qui pose sur tous les principes démontrés dans ce chapitre et dans la note XIX, nous allons faire une observation assez essentielle, et qui contribuera à l'exactitude de la méthode.

213. Tout ce que nous avons dit précédemment suppose que l'observateur n'a pas changé de place entre les deux observations, c'est ce qui n'arrive pas ordinairement lorsqu'on est en mer: il faut donc ramener la première observation faite, à ce qu'elle auroit été si on l'avoit faite au même point que la seconde. Or, nous observerons que si de la première époque à la seconde, l'observateur a fait un nombre n de nœuds ou minutes de degrés vers le soleil, c'est-à-dire, vers le point où l'on a relevé cet astre à la première observation, il se sera rapproché de ce point d'un même nombre de minutes; donc, s'il avoit été à la première observation au lieu où il se trouve à la seconde, la première hauteur auroit été plus grande de ce nombre de minutes; cela auroit été le contraire si, dans l'intervalle de temps, le vaisseau avoit couru un nombre n de nœuds ou de minutes de degrés, en sens contraire du point où a été relevé le soleil à la première observation, c'est-à-dire, qu'alors il auroit fallu retrancher de la hauteur observée, le nombre de minutes courues en sens contraire de relèvement. Enfin, ces résultats se modifient lorsque la route n'est pas dans la direction de la ligne du relèvement du soleil; car alors, réduite à cette ligne, elle n'est plus que le produit de sa vraie longueur multipliée par le cosinus de l'angle formé

par la direction de la route avec la ligne du relèvement du côté du soleil; puisque, dans le triangle rectangle formé par la route dans l'intervalle des temps des observations, la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cette route sur la ligne du relèvement (laquelle est opposée à l'angle formé par la route et la ligne de relèvement), et par la partie de cette ligne qui est comprise entre le pied de la perpendiculaire et le point de départ (*), on a, en représentant par n' la partie interceptée, par n la longueur de la route, et par Q l'angle formé par la ligne du relèvement et par la route, l'équation

$$n' = n \cos. Q \quad \ldots\ldots (62);$$

de manière que, suivant que Q est < ou > que huit rumbs de vent, il faudra ajouter ou retrancher le nombre n' de minutes à la première hauteur observée.

214. Cela posé, voici toutes les règles de la méthode:

PREMIÈRE OBSERVATION. Observez la hauteur du bord inférieur du soleil; faites relever le soleil dans l'instant de l'observation, et notez l'heure exacte que marquoit une bonne montre à secondes dans ce même instant.

Vous veillerez à ce que l'on mesure, avec le plus d'exactitude possible, le chemin que fera le vaisseau depuis le moment de la première observation jusqu'à celui où vous ferez la seconde, et vous observerez la vraie direction de la route pendant cet intervalle de temps, en faisant des réductions si le vaisseau change de route (art 55).

SECONDE OBSERVATION. Observez encore la hauteur du bord inférieur du soleil, et faites noter l'heure juste de la montre dans cet instant.

CALCUL PRÉPARATOIRE. Corrigez vos deux hauteurs observées, de la dépression de l'horizon, du demi-diamètre et de la réfraction, pour avoir les hauteurs vraies du centre (**).

Ajoutez au logarithme du nombre de nœuds courus pendant l'intervalle de temps entre les deux observations, celui du cosinus de l'angle formé par le relève-

---

(*) Nous supposons que ce triangle est rectiligne à cause de l'extrême petitesse de ses côtés, car il est évident que, rigoureusement parlant, il se compose d'un arc de cercle et de deux arcs de loxodromie, savoir, celui qui est dans la direction du relèvement du soleil, et celui que parcourt le vaisseau.

(**) Nous avons négligé la correction de la parallaxe de hauteur du soleil, comme dans le calcul de la latitude par la hauteur méridienne de cet astre, étant guidés par les mêmes raisons qu'à l'article 200.

ment du soleil à la première observation et la direction de la route dans l'intervalle de temps, ce qui vous donnera le logarithme d'un nombre de minutes que vous ajouterez à la première hauteur vraie du centre, si l'angle de la direction de la route et du relèvement est moindre que huit rhumbs de vents ou 90 degrés, et que vous retrancherez dans le cas contraire. C'est cette première hauteur ainsi corrigée, que nous appellerons *première hauteur vraie.*

Par le moyen de la longitude estimée du vaisseau, des heures marquées par la montre aux instans des observations et de la *Connoissance des temps*, calculez la déclinaison du soleil pour chacun de ces deux momens.

1.° *Calcul de l'angle horaire moyen* (éq. 56). Faites la somme des logarithmes cosinus de la latitude estimée, et de la première déclinaison que vous marquerez, parce que cette somme vous servira dans une autre occasion : prenez le complément arithmétique de cette somme, et ajoutez-y les logarithmes du cosinus de la moitié de la somme des hauteurs vraies et du sinus de la moitié de leur différence, enfin le complément arithmétique du logarithme sinus de la moitié de l'intervalle des temps réduit en degrés. La somme de ces quatre nombres est le logarithme sinus de l'angle horaire moyen.

2.° *Calcul de l'erreur de l'angle horaire moyen* (éq. *y*, *z* et *c'*, note XIX). Ce calcul se fera en ne prenant que les quatre premières décimales des logarithmes.

Faites la somme des logarithmes de la tangente de la seconde déclinaison, du cosinus du plus grand angle horaire du soleil, d'après la montre, et de la cotangente de la latitude estimée : la moitié de cette somme sera le logarithme cosinus d'un arc subsidiaire, dont le double logarithme sinus, ajouté avec le complément arithmétique du logarithme cotangente de la latitude estimée, le logarithme de la différence des deux déclinaisons réduite en secondes, le logarithme 9,6989, le complément arithmétique du logarithme cosinus de l'angle horaire moyen, et le complément arithmétique du logarithme sinus du demi-intervalle de temps, donnera, pour somme, le logarithme de l'erreur en secondes de degrés de l'angle horaire moyen : d'où vous conclurez l'angle horaire moyen corrigé, en ajoutant ou retranchant la correction à l'angle horaire moyen, suivant que la déclinaison du soleil va en augmentant ou en diminuant.

Si la somme des trois premiers logarithmes étoit plus grande que 10, ce qui ne peut arriver que lorsqu'on navigue entre les tropiques (article 13 de la note XIX) : alors on prendroit le complément arithmétique de ce logarithme, ce qui donneroit le logarithme cosinus d'un arc subsidiaire, dont on ajouteroit

le double logarithme tangente, avec tous les logarithmes que nous avons ajoutés précédemment au double logarithme cosinus de l'arc subsidiaire, et le reste du calcul seroit le même.

5.° *Calcul de la latitude approchée du vaisseau* (éq. 57, 60, 61, et *h* ou *i* de la note XIX).

A l'angle horaire moyen corrigé, ajoutez le demi-intervalle de temps, ce qui donnera pour somme le plus grand angle horaire approché. Ensuite au logarithme sinus de la moitié de cet angle horaire, ajoutez la demi-somme provenant de l'addition du logarithme du produit des cosinus de la latitude estimée, et de la déclinaison (que l'on a déjà trouvé dans le calcul de l'angle horaire moyen), de 0,3010300, et du complément arithmétique du logarithme sinus de la plus petite hauteur vraie du centre du soleil; ce qui vous donnera le logarithme tangente d'un arc subsidiaire, dont vous ajouterez le complément arithmétique du double logarithme cosinus, avec le logarithme sinus de la plus petite hauteur; la somme sera le logarithme sinus de la hauteur méridienne, et combinant convenablement cette hauteur avec la déclinaison du soleil, vous aurez la latitude calculée du vaisseau.

4.° *Calcul de la latitude vraie* (éq. *m* et *o*, note XIX). Ce calcul se fera en ne prenant que les quatre premiers chiffres décimaux des logarithmes.

Au logarithme de 2, c'est-à-dire, à 0,3010, ajoutez le logarithme cosinus de la déclinaison du soleil, le logarithme sinus de la latitude, le logarithme sinus de la moitié du petit angle horaire approché, le logarithme sinus de la moitié du grand angle horaire approché, le complément arithmétique du logarithme sinus de la latitude moins, ou plus la déclinaison, suivant que cette dernière est de même, ou de dénomination différente de la latitude; enfin le complément arithmétique du logarithme cosinus de la moitié de la somme ou de la différence des deux angles horaires, suivant que les deux observations ont été faites du même côté ou des deux côtés du méridien : vous prendrez le complément arithmétique de cette somme, ce qui vous donnera le logarithme d'un nombre négatif ou positif, suivant que les deux observations auront été faites du même côté du méridien, ou que l'une sera faite avant, et l'autre après-midi : retranchez l'unité de ce nombre, et soustrayant le logarithme de ce dernier résultat de celui de la différence des latitudes estimée et calculée, réduite en secondes de degrés, vous aurez le logarithme d'un nombre de secondes, que vous ajouterez ou que vous retrancherez de la latitude calculée, suivant que les deux dernières quantités dont vous avez pris la différence des logarithmes, sont de même ou de différens

signes, ce qui vous donnera la latitude vraie du vaisseau pour l'instant de la seconde observation.

5.° *Calcul de l'heure vraie du vaisseau à l'instant de l'observation de la plus grande hauteur* (éq. d' et e' note XIX).

A la somme des logarithmes du sinus de l'angle horaire moyen corrigé, et du cosinus de la latitude estimée, ajoutez le complément arithmétique du logarithme cosinus de la latitude calculée, ce qui vous donnera le logarithme sinus du vrai angle horaire moyen, d'où vous conclurez l'angle horaire demandé, en retranchant de cet angle le demi-intervalle de temps.

EXEMPLE. Le 12 août 1791, étant par la latitude estimée de 41° 30′ nord, on a observé à 21 heures 44 minutes d'une bonne montre à secondes, une hauteur du soleil qui, corrigée, a été de 51° 2′ 18″. Au même instant où l'on faisoit cette observation, on a relevé le soleil au SSE.

A 22 heures 57 minutes de la même montre, le vaisseau ayant couru depuis la première observation 5 nœuds dans le NE¼N, on a encore observé la hauteur du soleil qui, corrigée, a été de 60 degrés. La déclinaison du soleil dans le moment de la première observation, étoit de 14° 39′ boréale, et au moment de la seconde observation, elle étoit de 14° 38′ 4″. On demande la latitude vraie du vaisseau à l'instant de la seconde observation.

Calcul de la correction de la première hauteur rapportée au point où s'est faite la seconde observation.

Chemin couru dans l'intervalle de temps . . . . 5 nœuds log. 0,69897
Ang. de la lig. du relèvement et de la direct. du vaiss. 123° 45′ log. cos 9,74474

Somme. 0,44371 log. de 2′ 48″ —
Première hauteur vraie ☉ . . . . 51° 2 18

Différence. 50 59 30

qui est la hauteur la plus éloignée de la méridienne dont on doit se servir dans le calcul.

Calcul de l'angle horaire moyen (éq. 56).

Latit. estim. 41° 30′. . . . . log. cos. 9,8744561
Déclin. ☉ 14 39 . . . . log. cos. 9,9856460

Somme. 9,8601021, qui est = log. (cos. l cos. D)

Hauteurs vraies du ☉. 9,8601021, qui est le log. de (cos. *l* cos. D)
Première. 50° 59′ 30″ c. a. du log. préc. 0,1398979
Heures des observations. Seconde. 60 0 0
1.re ... 21h 44m 0s Somme. 110 59 30
2.me ... 22 57 0 ½ som. 55 29 45. . . . log. cos. 9,7531740
interv. . 1 13 0 diff. des haut. 9 0 30
½ interv. 36 30 ½ diff. 4 30 15. . . . log. sin. 8,8950444
réd.t en deg. 9° 7′ 30″. . . . . c. ar. log. sin. 0,7997272

Somme. 9,5878435 log. sin. de 22° 46′ 31″,

ce qui est l'angle horaire moyen.

Calcul de l'erreur de l'angle horaire moyen (éq. *y*, *z* et *c′* de la note XIX).

Déclinaison du ☉ à 22h 57m . . . . . 14° 38. . . log. tang. 9,4168
Plus grand ang. hor. marq. par la montre 34 0. . . log. cos. 9,9186
Latitude estimée . . . . 41 30. . . log. cot. 0,0532

Somme. 9,3886
½ Somme. 9,6943, qui est le log. cos. de K, donc

K = 60° 21′ 10″. . . . . . 2 log. sin. 9,8781
Latitude estimée. . . 41 30 o com. ar. log. cot. . . 9,9468* (*)
Diff. des déclin. ☉. . 56″ log. 1,7482
log. const. 9,6989*
Angle horaire moyen 22° 46′ 30″ com. ar. log. cos. . . 0,0353
½ intervalle. . . . . 9 7 30 com. ar. log. sin. . . 0,7997

Somme. 2,1070, qui est le log. de 128″
Donc l'erreur dans l'angle horaire moyen est de. . . . . 2′ 8″
Angle horaire moyen. . . . . . . 22° 46 31

Somme. 22 48 39

qui est l'angle horaire moyen corrigé.

Calcul de la latitude approchée du vaisseau [éq. 57, 60, 61 et *h* ou *i* de la note XIX]

Ang. hor. moyen cor. . . . . 22° 48′ 39″
½ intervalle. 9 7 30

Somme qui est le plus grand ang. hor. 31 56 9

(*) Les astériques mis à côté des logarithmes, indiquent ceux qui sont répétés dans le calcul, ou les constans.

Donc demi plus grand ang. hor. 15° 58′ 5″ log. sin. 9,4394828
Log. (cos. l cos. D). . . . . . 9,8601021 *
Log. constant. . . . . 0,3010300 *
Plus petite hauteur ☉ 50° 59′ 30″ com. ar. log. sin. 0,1095486

Somme. 0,2706807 — ½ somme. 0,1353404

Somme. 9,5748232 qui est

le log. tang. de B = 20° 35′ 25″ com. 2 log. cos. 0,0573378
Plus petite haut. du ☉ 50 59 30 log. sin. . . . . 9,8904514 *

Somme. 9,9477892, qui est le logarithme sinus de la hauteur méridienne = 62° 27′ 53″
Déclin. ☉. 14 39 0

Diff. 47 48 53, dont le complément 42° 11′ 7″ est la latitude calculée.

Calcul de la latitude vraie (éq. *m* et *o*, note XIX).

log. const... 0,3010*
Déclin. ☉. . . . . 14° 39 — log. cos. . . 9,9856*
Lat. estimée. . . . . . 41 30 — log. sin. . . . 9,8213
½ petit ang. hor. appr. . . 6 50 30″. . . log. sin. 9,0761
½ grand ang. hor. appr. 15 58 10 . . . log. sin. 9,4395*
Lat. calc. moins déclin. 27 32 — c. a. log. sin. 0,3351
som. des ang hor. appr. 22 48 40 c. a. log. cos. 0,0354 lat. calc.—lat. est. 41′ 7″ ou 2467″ log 3,3922+

Somme. 8,9940
com. ar. 1,0060 qui est le log. de $\frac{1}{p}$ = —10,14
— 1

—11 14 log. 1,0469—

Diff. 2,3453

qui est le logarithme de 221″ ou 3′ 41″—
Latitude approchée du vaisseau 42° 10 54

Différence. 42 7 13
qui est la latitude vraie, et diffère de l'estimée 41° 30′ de 37′ 13″.

Calcul de l'heure vraie du vaisseau à l'instant de l'observation de la plus grande hauteur du ⊙ (éq. d' et e' note XIX).

Ang. hor. moy. corr.	22° 48′ 39″	log. sin. 9,5884845
Lat. estimée. . . .	41 30 0	log. cos. 9,8744561*
Lat. vraie.	42 7 13	com. ar. log. cos. 0,1297492

Somme.	9,5926898	log. sin. de l'ang. moy. vr. 23° 2′ 44″
		½ interv. réduit en degrés. 9 7 30
		Différence. 13 55 14

Cette différence, réduite en temps, donne le vrai petit angle horaire = 55ᵐ 41ˢ. Ainsi, l'heure vraie à l'instant de la seconde observation étoit 11ʰ 4ᵐ 19ˢ; mais la montre marquoit, dans ce même instant, 10ʰ 57′, donc elle retardoit sur l'heure vraie du vaisseau de 7ᵐ 19ˢ.

Si l'on n'avoit pas corrigé l'angle horaire moyen avant de l'employer à la recherche de la hauteur méridienne, on auroit trouvé, pour première latitude calculée, 42° 12′ 53″, et recommençant le calcul avec cette latitude, au lieu de l'estimée 41° 30′, on auroit trouvé pour latitude plus approchée, 42° 8′ 53″; un troisième calcul, en employant cette dernière latitude, auroit donné pour latitude 42° 8′ 59″ qui s'éloigne encore plus de la vraie 42° 7′ 13″ que nous avons trouvée par la méthode des corrections. Ainsi cette dernière méthode est en tout, préférable à l'autre par la briéveté du calcul, et par l'avantage de faire connoître avec beaucoup plus d'exactitude, l'heure vraie du vaisseau à l'instant de l'observation de la plus grande hauteur.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Du calcul de la latitude du vaisseau par le moyen des hauteurs vraies de deux étoiles observées simultanément, de leurs distances au pôle élevé et de la différence de leur ascension droite, ou par le moyen de deux hauteurs vraies du soleil observées à des heures différentes, de l'intervalle de temps entre les deux observations, et des déclinaisons de l'astre dans les deux instans où l'on a observé sa hauteur.

LA méthode dont nous allons nous occuper, et dont je ne connois pas l'auteur, me paroît préférable à celle de Douwes, tant pour l'exactitude que pour la brièveté du calcul; cependant, elle est très-peu connue, je n'ai même jamais vu s'en servir. La faute en est peut-être aux auteurs de *Traités de navigation*, qui n'en ont exposé que légérement la théorie, sans lui donner aucun développement (*). Je vais agir tout différemment; heureux, si je puis, par ce moyen, faire adopter une méthode qui, je le répète, m'a toujours paru fort bonne, et dont je me suis servi de préférence à toute autre, lorsqu'étant en mer je ne pouvois observer des hauteurs méridiennes.

215. Soit HO l'horizon, Z le zénith de l'observateur, P le pôle élevé, E, E' deux étoiles dont deux observateurs observent simultanément les hauteurs, et que nous supposons placées, non comme elles sont vues, mais comme elles doivent être, en corrigeant les hauteurs observées de la dépression de l'horizon et de la réfraction de hauteur. Faisons passer par ces deux étoiles les arcs de cercle de déclinaisons PE, PE', et les deux arcs de verticaux ZE, ZE'; enfin, joignons les deux étoiles par l'arc du grand cercle EE', ce qui formera deux triangles sphériques PE'E et ZE'E: or, dans le premier de ces triangles, on pourra toujours connoître les distances polaires EP, E'P, et la différence d'ascension droite E'PE par le moyen de la table des déclinaisons et ascensions droites des Fig. 57.

(*) Une note marginale de M. Delambre, écrite sur mon manuscrit, m'a appris que Pezenas avoit traité ce problème avec beaucoup de détail dans un ouvrage ayant pour titre *Astronomie des Marins*, mais d'une manière différente.

Fig. 37. principales étoiles visibles à Paris, qui se trouve dans la *Connoissance des temps*, ou par le moyen de ma table XVII qui en est le complément; on aura donc, par la solution de ce triangle, le côté EE' et l'angle PE'E; ainsi, dans le triangle sphérique E'ZE, l'on connoît le côté EE' et les deux autres côtés ZE, ZE' qui sont les distances vraies des deux astres au zénith, ou les complémens des hauteurs vraies des deux astres : donc on pourra trouver l'angle ZE'E, d'où, retranchant l'angle déjà connu PE'E, il restera l'angle ZE'P; on connoîtra donc dans le triangle sphérique ZPE' les deux côtés E'Z, E'P et l'angle compris ZE'P, d'où l'on conclura sans peine le côté ZP, c'est-à-dire, le complément de la latitude, et par conséquent la latitude du vaisseau.

216. Voici les formules du calcul dans lesquelles nous représentons par

E la hauteur vraie de l'étoile E.
E' la hauteur vraie de l'étoile E'.
D la distance polaire EP de la première étoile E.
D' la distance polaire E'P de l'étoile E'.
A la différence d'ascension droite E'PE des deux étoiles.
L la latitude vraie PO du vaisseau.

Le triangle sphérique E'PE donne les deux équations

$$\cos. EE' = \cos. D \cos. D' + \sin. D \sin. D' \cos. A \ldots\ldots (\alpha);$$

$$\cot. PE'E = \frac{\cot. D \sin. D' - \cos. A \cos. D'}{\sin A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta):$$

et le triangle sphérique E'ZE, dans lequel $ZE = 90° - E$ et $ZE' = 90 - E'$, donne l'équation

$$\cos. ZE'E = \frac{\sin. E - \sin. E' \cos. EE'}{\cos. E' \sin. EE'} \ldots\ldots (\delta).$$

Enfin, du triangle sphérique ZE'P, on tire l'équation

$$\sin. L = \sin. E' \cos. D' + \cos. E' \sin. D' \cos. (ZE'E - PE'E) \ldots\ldots (\iota).$$

217. Mais, pour faciliter le calcul logarithmique de ces formules, nous ferons

$$\text{tang}. M = \text{tang}. D \cos. A \ldots\ldots (63),$$

ce qui donne pour l'éq. (α)

$$\cos. EE' = \frac{\cos. D \cos. (D' - M)}{\cos. M} \ldots\ldots (64),$$

et pour l'éq. (β)

$$\text{tang}. PE'E = \text{tang}. A \sin. M \text{ cosec}. (D' - M) \ldots\ldots (65).$$

Fig. 57.

De l'éq. (δ) on tire

$$\sin.\tfrac{1}{2} ZE'E = \sqrt{\frac{\sin.(EE'+E') - \sin.E}{2\cos.E'\sin.EE'}} \ldots\ldots (66),$$

ou

$$\sin.\tfrac{1}{2} ZE'E = \sqrt{\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(EE'+E'+E)\sin.\tfrac{1}{2}(EE'+E'-E)}{\cos.E'\sin.EE'}}.$$

Enfin, on aura pour l'éq. (ι)

$$\text{tang.}N = \text{tang.}D'\cos.(ZE'E - PE'E) \ldots\ldots (67).$$

$$\sin.L = \frac{\cos.D'\sin.(E'+N)}{\cos.N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (68).$$

218. L'on peut encore employer cette méthode, en n'observant que deux hauteurs d'un même astre à deux époques différentes de la journée; mais alors l'angle A sera l'intervalle de temps entre les deux observations, que l'on évaluera avec le plus d'exactitude possible par le moyen d'une bonne montre à secondes.

Il faudra, de même que pour la méthode de Douwes, avoir égard au chemin fait par le vaisseau dans l'intervalle des deux observations, ainsi qu'à l'air de vent suivi (article 213, éq. 62). La méthode sera évidemment moins exacte, en observant le même astre à deux hauteurs différentes, qu'en observant dans le même instant deux astres différens : car, dans le premier de ces deux cas, l'on introduit l'intervalle de temps, et le changement de la première hauteur due au déplacement du vaisseau pendant cet intervalle, quantités qui, étant sujettes à quelques petites erreurs, peuvent en produire dans le résultat du calcul. Mais, d'un autre côté, l'astre dont on prend deux hauteurs, étant le soleil, celles-ci seront plus exactes.

Pour faire une application de cette méthode, prenons le même exemple qui termine le chapitre précédent; ce qui donnera, après avoir réduit la première hauteur vraie du soleil à l'instant de la seconde observation,

$$E = 50°59'30'',\ E' = 60°,\ A = 18°15',\ D = 75°21' \text{ et } D' = 75°21'46''.$$

Cela posé, voici le type du calcul :

D = 75° 21 log. tang. 0,5826735. . . . . log. cos. 9,4029724
A = 18 15 log. cos. 9,9775860

Somme. 0,5602595 log. tang. M = 74° 36' 36'' com. log. cos. 0,5761190
D' = 75 21 46

D' — M = 0 45 10 log. cos. 9,9999625

Somme. 9,9790539 qui est le

Fig. 37. log.cos. de EE′ = 17° 39′ 8″ c. log. sin. 0,5182156
E′ = 60 0 0 c. log. cos. 0,3010300
E = 50 59 30 | A = 18° 15′ 0″ log. tang. 9,5181855
Som. 128 38 38 | M = 74 36 36 log. sin... 9,9841409
½ som. 64 19 19 log. cos. 9,6368027 | D′—M = 0 45 10 c. log. sin. 1,8814683
½ som. — E. 13 19 49 log. sin. 9,3627914 |
Som. 1,3837947 qui est
Som. 19,8188397 le log. tang. PE′E = ... 87° 38′ 1″
½ som. 9,9094198 log. sin. de ½ ZE′E = 54° 16′ 0″,5, donc ZE′E = 108 32 1

ZE′E — PE′E = 20 54 0

D′ = 75° 21′ 46″ log. tang. 0,5830695
ZE′E — PE′E = 20 54 0 log. cos. 9,9704419

Somme. 0,5535114 log. tang. de N = 74° 22′ 50″ log. cos. 0,5698497
E′ = 60 0 0

Somme. 134 22 50 log. sin. 9,8542329
D′ = 75 21 46 log. cos. 9,4026017

Somme. 9,8266843

qui est le logarithme sinus de 42° 8′ 23″; donc la latitude vraie du vaisseau est, à l'instant de la seconde observation, de 42° 8′ 23″ : résultat qui est, à très-peu de chose près, le même que celui trouvé à la fin du chapitre précédent, et que nous venons d'obtenir avec beaucoup moins de calcul.

219. La méthode dont nous venons de nous servir, conduit, par un calcul bien simple, à trouver le vrai angle horaire de l'astre E′, et par conséquent l'heure vraie du vaisseau, dans l'instant de l'observation de cet astre E′, ou du soleil, lorsqu'il est le plus près du méridien, puisque le triangle sphérique EZP donne l'équation

$$\text{sin. angl. hor.} = \frac{\text{sin. ang. parallactique } ZE'P \times \text{cos. haut. vraie}}{\text{cos. lat. vraie du vaisseau}} \ldots\ldots (69).$$

Faisons l'application de cette formule à l'exemple précédent :

Ang. parall. ZE′P =	20°	54′	0″	log. sin.	9,5523494
haut. vr. ☉ =	60	0	0	log. cos.	9,6989700
lat. vr. du vaisseau =	42	8	23	com. log. cos.	0,1298825

Somme. 9,3812019 qui est le logarithme sin. de 13° 55′ 8″,

ce qui est l'angle horaire du soleil; et le réduisant en temps, on a $55^m 40^s 32^t$, ou $55^m 41^s$; donc l'heure de la seconde observation étoit $11^h 4^m 19^s$, même résultat que celui trouvé à la fin du chapitre précédent.

CHAPITRE CINQUIÈME.

De quelques autres Méthodes pour trouver la latitude en mer; mais beaucoup moins utiles et usitées que les précédentes.

* 220. ÉTANT *observées trois hauteurs d'un même astre, trouver l'heure vraie des observations, la latitude du vaisseau et la déclinaison de l'astre.*

* Soit P le pôle; Z le zénith de l'observateur; HZPO son méridien; HO son horizon; E, E', E'' les trois points du ciel, où l'astre observé, que je suppose être une étoile, se trouve réellement dans les instans des trois observations; ZB, ZB', ZB'' les verticaux respectifs de l'étoile, aux instans où on l'a observée; PE = PE' = PE'' la distance de cette étoile au pôle élevé P (*). De plus, représentons par Fig. 58.

E la plus petite }
E' la moyenne } hauteur de l'étoile observée.
E'' la plus grande }
L la latitude PO du vaisseau.
H l'angle horaire ZPE de l'étoile, lorsqu'elle étoit le plus près de l'horizon.
A l'intervalle de temps EPE' entre les observations en E et E'.
A' l'intervalle de temps EPE'' entre les observations en E et E''.
D la distance polaire PE = PE' = PE''.

Les trois triangles sphériques ZPE, ZPE' et ZPE'', nous donnent respectivement les trois équations

(*) Nous faisons toutes ces distances polaires égales, parce que, dans les intervalles de temps écoulés entre les observations, elles ne varient pas sensiblement, puisque les étoiles placées sur le colure des équinoxes, ou qui en sont les plus voisines, et dont conséquemment la variation en déclinaison est la plus forte, ne varient pas, par jour, de 0'',06.

$$\left.\begin{array}{l}\sin.E=\sin.L\cos.D+\cos.L\sin.D\cos.H.\\ \sin.E'=\sin.L\cos.D+\cos.L\sin.D\cos.(H-A)\\ \sin.E''=\sin.L\cos.D+\cos.L\sin.D\cos.(H-A').\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(a).$$

Soustrayant successivement des seconde et troisième équations, la première, on a

$$\cos.\left(\frac{E'+E}{2}\right)\sin.\left(\frac{E'-E}{2}\right)=\cos.L\sin.D\sin.(H-\tfrac{1}{2}A)\sin.\tfrac{1}{2}A\ldots..(b).$$

$$\cos.\left(\frac{E''+E}{2}\right)\sin.\left(\frac{E''-E}{2}\right)=\cos.L\sin.D\sin.(H-\tfrac{1}{2}A')\sin.\tfrac{1}{2}A'.$$

Eliminant entre ces deux équations cos. L sin. D, on a

$$\frac{\sin.(H-\frac{1}{2}A)}{\sin.(H-\frac{1}{2}A')}=\frac{\sin.\frac{1}{2}A'\cos.\frac{1}{2}(E'+E)\sin.\frac{1}{2}(E'-E)}{\sin.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}(E''+E)\sin.\frac{1}{2}(E''-E)}\ldots..(c),$$

ou faisant pour abréger

$$K=\frac{\sin.\frac{1}{2}A'\cos.\frac{1}{2}(E'+E)\sin.\frac{1}{2}(E'-E)}{\sin.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}(E''+E)\sin.\frac{1}{2}(E''-E)}\ldots..(70),$$

et développant le premier membre de l'équation (*c*), on aura

$$\frac{\sin.H\cos.\frac{1}{2}A-\cos.H\sin.\frac{1}{2}A}{\sin.H\cos.\frac{1}{2}A'-\cos.H\sin.\frac{1}{2}A'},\text{ ou }\frac{\text{tang.}H\cos.\frac{1}{2}A-\sin.\frac{1}{2}A}{\text{tang.}H\cos.\frac{1}{2}A'-\sin.\frac{1}{2}A'}=K,$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}H=\frac{K\sin.\frac{1}{2}A'-\sin.\frac{1}{2}A}{K\cos.\frac{1}{2}A'-\cos.\frac{1}{2}A}\ldots..(d),$$

équation qui peut être mise sous la forme

$$\text{tang.}H=\text{tang.}\tfrac{1}{2}A\left\{\frac{1-\dfrac{K\sin.\frac{1}{2}A'}{\sin\frac{1}{2}A}}{1-\dfrac{K\cos.\frac{1}{2}A'}{\cos.\frac{1}{2}A}}\right\}\ldots..(e);$$

donc, faisant

$$\left\{\text{tang.}M=\sqrt{\left(\frac{K\sin.\frac{1}{2}A'}{\sin.\frac{1}{2}A}\right)},\ \text{tang.}N=\sqrt{\left(\frac{K\cos.\frac{1}{2}A'}{\cos.\frac{1}{2}A}\right)}\right\}\ldots\ldots(71),$$

on aura

$$\text{tang.}H=\text{tang.}\tfrac{1}{2}A\left\{\frac{\text{tang.}^2 45^\circ-\text{tang.}^2 M}{\text{tang.}^2 45^\circ-\text{tang.}^2 N}\right\}\ldots.(f);$$

mais $\text{tang.}^2 45^\circ-\text{tang.}^2 M=\dfrac{\sin.(45^\circ+M)\sin.(45^\circ-M)}{\cos.^2 45^\circ\cos.^2 M}=\dfrac{2\sin.(45^\circ+M)\sin.(45^\circ-M)}{\cos.^2 M}$

Or, il est clair que $45°+M$ est le complément de $45°-M$, puisque la somme de ces deux binômes est $=90°$; donc $2\sin.(45°+M)\sin(45°-M)=2\sin.(45°-M)\cos.(45°-M)=\sin.(90°-2M)=\cos.2M$; d'où nous conclurons que $\frac{\text{tang.}^2 45°-\text{tang.}^2 M}{\cos.^2 M}=\frac{\cos.2M}{\cos.^2 M}$; et que de même $\text{tang.}^2 45°-\text{tang.}^2 N=\frac{\cos.2N}{\cos.^2 N}$; Fig. 36.
donc, substituant ces valeurs dans l'équation (f), l'on aura

$$\text{tang.}H=\text{tang}\tfrac{1}{2}A\times\frac{\cos.2M\cos.^2 N}{\cos.2N\cos.^2 M}\ \ldots\ (72)\,(^*).$$

De l'équation (b) on tire celle

$$\cos.L.\sin.D=\frac{\cos.\left(\frac{E'+E}{2}\right)\sin.\left(\frac{E'-E}{2}\right)}{\sin.(H-\frac{1}{2}A)\sin.\frac{1}{2}A}=P\ \ldots\ldots\ (g),$$

en faisant pour abréger

$$P=\frac{\cos.\left(\frac{E'+E}{2}\right)\sin.\left(\frac{E'-E}{2}\right)}{\sin.(H-\frac{1}{2}A)\sin.\frac{1}{2}A}\ \ldots\ldots\ (73);$$

donc la première équation du groupe (a) devient

$$\sin.E=\sin.L\cos D+P\cos.H,$$

d'où l'on tire

$$\sin.L\cos.D=\sin.E-P\cos.H\ \ldots\ldots\ (h),$$

(*) Nous aurions pu épargner deux logarithmes dans le calcul de H; pour cela il auroit fallu faire

$$\cos.M=\begin{cases}\sqrt{\left(\dfrac{K\sin.\frac{1}{2}A'}{\sin.\frac{1}{2}A}\right)} & \text{si } K\sin.\tfrac{1}{2}A'<\sin.\tfrac{1}{2}A\\[2ex] \sqrt{\left(\dfrac{\sin.\frac{1}{2}A}{K\sin\frac{1}{2}A'}\right)} & \text{si } K\sin.\tfrac{1}{2}A'>\sin.\tfrac{1}{2}A\end{cases}$$

$$\cos.N=\begin{cases}\sqrt{\left(\dfrac{K\cos.\frac{1}{2}A'}{\cos.\frac{1}{2}A}\right)} & \text{si } K\cos.\tfrac{1}{2}A'<\cos.\tfrac{1}{2}A\\[2ex] \sqrt{\left(\dfrac{\cos.\frac{1}{2}A}{K\cos.\frac{1}{2}A'}\right)} & \text{si } K\cos.\tfrac{1}{2}A'>\cos.\tfrac{1}{2}A\end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}H=\frac{\text{tang.}A\times\begin{cases}\sin.^2 M & \text{si } K\sin\frac{1}{2}A'<\sin.\frac{1}{2}A\\ \text{tang.}^2 N & \text{si } K\sin.\frac{1}{2}A'>\sin.\frac{1}{2}A\end{cases}}{\begin{cases}\sin.^2 N & \text{si } K\cos.\frac{1}{2}A'<\cos.\frac{1}{2}A\\ -\text{tang.}^2 N & \text{si } K\cos.\frac{1}{2}A'>\cos.\frac{1}{2}A\end{cases}}$$

Mais il est quelquefois préférable de n'avoir qu'une seule marche à suivre dans le calcul, dût-on acheter cet avantage par un calcul un peu plus long. Au reste, j'ai exposé les deux méthodes afin que le lecteur choisit celle qu'il préférera.

Fig. 38. ajoutant cette dernière équation avec celle (g), l'on a

$$\sin.(L+D)=\sin.E+2P\sin.^2\tfrac{1}{2}H \ldots\ldots (i),$$

et de l'équation (g) retranchant celle (h), il vient

$$\sin.(D-L)=2P\cos.^2\tfrac{1}{2}H-\sin.E \ldots\ldots (k).$$

Pour soumettre la formule (i) au calcul logarithmique, faisons

$$\tang.R=\sin.\tfrac{1}{2}H\sqrt{\left(\frac{2P}{\sin.E}\right)} \ldots\ldots\ldots (74),$$

ce qui donnera

$$\sin.(D+L)=\frac{\sin.E}{\cos.^2R} \ldots\ldots (75).$$

De même, pour soumettre la formule (k) au calcul purement logarithmique, mettons-la sous la forme

$$\sin.(D-L)=-\sin.E\left(1-\frac{2P\cos.^2\frac{1}{2}H}{\sin.E}\right) \ldots\ldots (l),$$

et faisons

$$\tang.S=\cos.\tfrac{1}{2}H\sqrt{\left(\frac{2P}{\sin.E}\right)}=\tang.R\cot.\tfrac{1}{2}H \ldots\ldots (76),$$

ce qui nous donnera $\sin.(D-L)=-\sin.E(\tang.^2 45^\circ-\tang.^2 S)=-\frac{2\sin.E\sin.(45^\circ+S)\sin.(45^\circ-S)}{\cos.^2S}$, ou

$$\sin.(D-L)=-\frac{\sin.E\cos.2S}{\cos.^2S} \ldots\ldots (77)\ (*).$$

Connoissant D+L et D−L, on aura sans peine les valeurs des deux quantités demandées D et L.

* 221. La solution précédente donne, à la vérité, les valeurs de D et de L, mais laisse dans l'incertitude si la latitude du vaisseau est septentrionale ou méridionale, et si conséquemment l'astre observé est dans l'hémisphère boréal ou dans l'austral, puisqu'alors on ignore quel est le pôle élevé du lieu de l'observation : heureusement que le cas où la déclinaison de l'astre observé et la latitude du vaisseau sont toutes les deux absolument inconnues, arrive très-rarement ; car cela ne pourroit arriver que si l'on étoit dépourvu de tout catalogue d'étoiles, et qu'il y eût assez de temps que l'on n'eût observé la latitude, pour que l'on pût ignorer si l'on est dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud.

(*) L'on trouvera à l'article 222 comment on peut épargner la recherche d'un logarithme pour avoir D—L.

Lorsque, comme cela arrive presque toujours, l'on connoît la déclinaison de l'astre observé, le calcul précédent se simplifie beaucoup; car, après avoir trouvé la valeur de l'angle horaire H, par le moyen des équations 70, 71 et 72, on aura la valeur de L par le moyen des deux autres équations Fig. 38.

$$\text{tang.}\, Q = \cos.\, H \,\text{tang.}\, D \ldots\ldots (78),$$

$$\sin.(Q+L) = \frac{\sin.E \cos.Q}{\cos.D} \ldots\ldots (79),$$

puisqu'alors on connoît dans le triangle ZPE, l'angle horaire EPZ (H), le côté PE (D) et le côté ZE (90° — E).

* 222. L'on trouve la solution du problème résolu à l'art 220, dans Bezout, page 307 du sixième volume de son cours. Mais la méthode employée par ce géomètre exige la recherche de vingt-sept logarithmes, et la nôtre n'exige que la recherche de dix-neuf logarithmes; elle pourroit même être réduite à la recherche de seize logarithmes; car on pourroit trouver tang. H avec deux logarithmes de moins, ainsi que c'est démontré dans le renvoi de la page 185, et l'on pourroit aussi trouver sin. (D — L) avec un logarithme de moins, ce qui s'obtiendroit en faisant

$$\cos.S = \begin{cases} \cos.\frac{1}{2}H \sqrt{\left(\frac{2P}{\sin.E}\right)} \text{ si } 2P\cos.^2\frac{1}{2}H < \sin.E \\ \frac{1}{\cos.\frac{1}{2}H} \sqrt{\left(\frac{\sin.E}{2P}\right)} \text{ si } 2P\cos.^2\frac{1}{2}H > \sin.E \end{cases} \ldots\ldots (80),$$

ce qui donneroit

$$\sin.(D-L) = \begin{cases} -\sin.E \sin.^2 S \text{ si } 2P\cos.^2\frac{1}{2}H < \sin.E \\ \sin.E \,\text{tang.}^2 S \text{ si } 2P\cos.^2\frac{1}{2}H > \sin.E \end{cases} \ldots (81).$$

Au reste, quoique nous ayons considérablement simplifié la solution de ce problème, dont plusieurs grands géomètres se sont occupés, nous la regardons comme plus curieuse qu'utile aux marins.

La méthode de trouver la latitude du vaisseau dont nous allons nous occuper, pose sur le principe suivant, qui n'est pas rigoureux, et entraîneroit dans des erreurs assez sensibles, si on lui donnoit un peu trop d'étendue.

223. *Le soleil passant au méridien à une certaine distance du zénith de l'observateur, les différences entre la hauteur méridienne et les hauteurs voisines, sont, à très-peu près, proportionnelles aux carrés des temps écoulés depuis ou avant midi.*

Soient E″ la hauteur méridienne du soleil, δ'' la déclinaison de cet astre à midi, D″ la distance méridienne du soleil au pôle élevé, E′ une autre hauteur

du soleil hors du méridien, et D' la distance polaire correspondante, enfin L la latitude du vaisseau.

Il est clair que si la déclinaison du soleil est de même dénomination que la latitude de l'observateur, on aura $\delta'' = 90° - D''$, et que si la déclinaison est de dénomination différente de la latitude, on aura $\delta'' = D'' - 90°$; donc, pour le cas où la déclinaison étant de même dénomination que la latitude, on a la première de ces deux quantités plus petite que la seconde, l'équation 52, art. 196, qui représente ce cas-là, deviendra

$$L = 180° - (E'' + D'') \ldots\ldots (\alpha),$$

et pour le cas où la déclinaison est de dénomination différente de la latitude, quel que soit le rapport de grandeur de ces deux quantités, on aura l'équation 55, art. 196, qui représente ce cas-là, qui se réduira aussi à l'équation précédente (α), dans laquelle E'' remplace la hauteur méridienne que nous représentions à l'article 196, par h.

Mais dans le cas où la déclinaison étant de même dénomination que la latitude, cette dernière quantité est plus petite que la première; alors substituant dans l'équation 53 de l'article 196, qui représente ce cas-là, la valeur de $\delta'' = 90° - D''$ à la place de δ qui représentoit aussi la déclinaison à l'heure du midi, on aura

$$L = E'' - D'' \ldots\ldots (\mathsf{C})\ (^*).$$

Or, représentant par A' l'angle horaire du soleil, à l'instant où sa hauteur vraie au-dessus de l'horizon, et sa distance polaire sont respectivement E' et D', la formule (44) de l'article 127, deviendra, en y substituant la valeur de L (éq. α), et respectivement A', E' et D' à la place de A, E et D.

$$\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2} A' = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(E'' - E' + D'' - D') \cos. \tfrac{1}{2}(E'' + E' + D'' - D')}{\sin. D' \cos. L} \ldots\ldots (\gamma).$$

De même, substituant dans cette équation (44) de l'article 127, la valeur de L donnée par l'équation C, et toutes les autres substitutions faites précédemment, on aura pour ce cas-là

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A' = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}[E'' - E' - (D'' - D')] \cos. \tfrac{1}{2}[E' + E'' - (D'' - D')]}{\sin. D' \cos. L} \ldots\ldots (\lambda).$$

Si l'on suppose dans ces équations que E' est une hauteur du soleil prise très-

(*) Je ne parle pas du cas représenté par l'équation 54 (art. 196), parce que, comme nous l'avons dit à ce même article, l'astre à son passage supérieur au méridien, rentre dans le cas de l'éq. 53.

près du méridien, ce qui donne l'angle A' très-petit, de même que E″—E', et rend D″—D' sensiblement = 0, on aura également pour l'une et l'autre équation γ et λ, celle

$$\tfrac{1}{4}A'^2 = \frac{\tfrac{1}{2}(E''-E')\cos.\tfrac{1}{2}(E'+E'')}{\sin.D'\cos.L},$$

ou

$$A'^2 = \frac{2(E''-E')\cos.\tfrac{1}{2}(E'+E'')}{\sin.D'\cos.L} \ldots\ldots (\pi).$$

De même, on démontrera que pour toute autre hauteur vraie E du soleil, fort voisine du méridien, et correspondant à un très-petit angle horaire A, on a

$$A^2 = \frac{2(E''-E)\cos\tfrac{1}{2}(E''+E)}{\sin.D\cos.L} \ldots\ldots (\pi').$$

Donc, comparant ces deux dernières équations, et faisant attention que sin. D est sensiblement égal à sin. D', on aura la proportion

$$(E''-E')\cos.\tfrac{1}{2}(E'+E''):(E''-E)\cos.\tfrac{1}{2}(E''+E)::A'^2:A^2.$$

Or, remarquons, qu'excepté pour les très-grands arcs de cercle, les cosinus des arcs qui diffèrent entr'eux d'une très-petite quantité, telle que $\tfrac{1}{2}(E'-E)$ (qui est la différence des deux arcs $\tfrac{1}{2}(E''+E')$, $\tfrac{1}{2}(E''+E)$) sont sensiblement égaux; donc, lorsque le soleil à son passage au méridien, ne passe pas au zénith, ou près du zénith de l'observateur, cas dans lesquels $\tfrac{1}{2}(E''+E')$ et $\tfrac{1}{2}(E''+E)$ s'approchent beaucoup de 90°, on pourra, sans erreur sensible, effacer dans les deux premiers termes de la proportion précédente, les facteurs cos. $\tfrac{1}{2}[E''+E']$ et cos. $\tfrac{1}{2}[E''+E]$; ce qui donnera la proportion

$$E''-E':E''-E::A'^2:A^2 \ldots\ldots (\omega),$$

qui est l'expression analytique du principe énoncé au commencement de cet article.

224. De la proportion (ω), on tire celle $E''-E':E'-E::A'^2:A^2-A'^2$; donc, représentant par $\Delta E'$ la différence de la hauteur méridienne E″ à celle E', que nous supposons la plus voisine du méridien, nous aurons l'équation

$$\Delta E' = \frac{(E'-E)A'^2}{(A+A')(A-A')} \ldots\ldots (82),$$

dont le calcul numérique est des plus simples. Ainsi, ayant déterminé dans la matinée, l'avance ou le retard d'une montre par des observations de hauteurs du soleil et calculs d'angles horaires (formule 44, article 127), on trouvera

l'heure que devra marquer la montre à l'instant du midi; et, à commencer depuis environ demi-heure avant cet instant, ou depuis cet instant, jusqu'à environ demi-heure après, ce qui est la même chose, on profitera des momens où le soleil est dégagé de nuages, pour faire à deux époques différentes et distantes l'une de l'autre d'un nombre convenable de minutes, des observations de la hauteur du bord inférieur de l'astre, en marquant bien exactement sur la montre l'heure de chacune de ces observations; après cela, faisant E' égale à la plus grande des deux hauteurs observées, $E =$ à la plus petite, $A =$ au plus grand angle horaire, lequel correspond à la plus petite hauteur E; enfin $A' =$ au plus petit angle horaire, lequel correspond à la plus grande hauteur E'; et substituant les valeurs de $E' - E$, A', $A' + A$ et $A - A'$ réduites en secondes de degrés dans l'éq. (82), on aura la valeur de $\Delta E'$, qu'on ajoutera à E', ce qui donnera la hauteur méridienne non-corrigée du bord inférieur du soleil.

Exemple. Le 29 mars 1800, étant par la latitude estimée 45° 30′ nord, et par 30° de longitude ouest; on a calculé que l'heure de la montre à l'instant du passage du soleil au méridien, devoit être $= 11^h 53^m 15^s$. A $11^h 21^m 7^s$ de cette montre, on a observé la hauteur du bord inférieur de l'astre de 47° 39′; et à $11^h 33^m 8^s$ de la même montre, on a observé la hauteur méridienne du bord inférieur de l'astre de 47° 59′. Donc $E' = 47° 59'$, $E = 47° 39'$, $A' = 11^h 53^m 15^s - 11^h 33^m 8^s = 20^m 7^s$, et $A = 11^h 53^m 15^s - 11^h 21^m 7^s = 32^m 8^s$; cela posé, voici le calcul.

$$\begin{array}{rlr}
E' - E = 20^m & = 1200^s \ldots\ \text{log.} & 3,0791812 \\
A' = 20^m\ 7^s & = 1207^s \ldots\ 2\ \text{log.} & 6,1634146 \\
A + A' = 52\ \ 15 & = 3135\ \text{com. ar. log.} & 6,5037625 \\
A - A' = 12\ \ \ 1 & = \ \ 721\ \text{com. ar. log.} & 7,1420647 \\
\hline
 & \text{Somme.} & 2,8884230
\end{array}$$

qui est le logarithme de $\Delta E'' = 773''$; donc la hauteur méridienne non-corrigée du bord inférieur du soleil, est de $47° 59' + 12' 53'' = 48° 11' 53''$.

225. Borda a donné dans son ouvrage sur la description du cercle de réflexion (pag. 44 et suiv.), une méthode qui pose sur le même principe que la nôtre, mais pour laquelle il a été obligé de calculer deux tables, dont l'une (x) donne la différence entre la hauteur méridienne d'un astre et sa hauteur observée, une minute avant ou après son passage au méridien, et dont l'autre (xi) donne les nombres par lesquels il faut multiplier ceux donnés par la table (x), pour avoir les corrections à appliquer aux hauteurs observées près du méridien,

afin d'en conclure la hauteur méridienne du soleil. Mais la méthode du grand géomètre que nous venons de citer, et la nôtre, pourront donner une, ou au plus, deux minutes d'erreur en latitude, lorsque les observations des hauteurs du soleil sont prises à 20 ou 30 minutes de tems de l'heure du vrai passage de cet astre au méridien, parce qu'à ces distances le principe établi à l'article 223, n'est plus sensiblement vrai. Cependant, si l'on n'appliquoit notre méthode que lorsqu'on peut observer le soleil dans les limites qui rendent le principe en question sensiblement vrai, il ne vaudroit plus la peine de faire le calcul, puisque le résultat ne seroit que de moins d'une minute à ajouter à la hauteur observée pour avoir la méridienne. Or, l'on sait que les marins, moins ambitieux d'une grande exactitude que les astronomes dans leurs observatoires à terre, ne regardent pas à une ou deux minutes d'erreur en latitude. Ainsi, je ne considère la méthode comme utile, que lorsqu'on ne peut observer le soleil qu'à une certaine distance du méridien, telle que demi-heure, ou trois quarts d'heure.

Dans l'exemple que donne Borda de l'usage de sa méthode, et quoique l'heure moyenne des observations y soit de $11^h 53^m 25^s$, et la plus éloignée du midi de $11^h 50^m 5^s$, il ne trouve que 34″ à ajouter à la hauteur méridienne, quantité si petite dans l'usage ordinaire des navigateurs, qu'elle ne vaut pas la peine des observations et des calculs qu'il faut faire pour l'obtenir. Il n'en est pas de même dans l'exemple que nous avons donné où, à la vérité, le principe sur lequel pose la méthode, n'est pas aussi exact, mais qui a fait connoître une correction de près de 13 minutes à appliquer à la plus grande hauteur observée pour avoir la méridienne, et en supposant que cette correction est elle-même fautive d'environ une minute, il n'en est pas moins vrai, que notre méthode conduiroit à trouver la latitude du vaisseau, à moins d'une minute près.

226. Au reste, l'on peut obtenir une plus grande exactitude, en ne s'appuyant plus sur le principe de l'article 223, et ne faisant plus que considérer, pour abréger, la déclinaison du soleil comme constante dans environ une demi heure de temps, ce qui ne peut causer d'erreur sensible, puisque la différence en déclinaison dans ce temps, n'est jamais de 30″. Ainsi, les formules γ et λ dans lesquelles on suppose $D'' = D'$, se réduiront également à celle

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A' = \frac{\sin. \frac{1}{2}(E'' - E') \cos. \frac{1}{2}(E'' + E')}{\sin. D' \cos. L}.$$

On aura de même, pour toute autre hauteur E, correspondante à un angle horaire A, l'équation

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin. \frac{1}{2}(E'' - E) \cos. \frac{1}{2}(E'' + E)}{\sin. D \cos. L},$$

donc les hauteurs E et E′ n'étant prises qu'à moins de demi-heure d'intervalle l'une de l'autre, ce qui donne sensiblement sin. D′ = sin. D, on aura, en comparant ces deux dernières équations, la proportion

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A' : \sin.^2 \tfrac{1}{2} A :: \sin. E'' - \sin. E' : \sin. E'' - \sin. E$$

d'où $\sin.^2 \frac{1}{2} A' : \sin.^2 \frac{1}{2} A - \sin.^2 \frac{1}{2} A' :: \sin. E'' - \sin. E' : \sin. E' - \sin. E$. Mais $\sin.^2 \frac{1}{2} A - \sin.^2 \frac{1}{2} A' = \sin. \frac{1}{2}(A + A') \sin. \frac{1}{2}(A - A')$, et $\sin. E' - \sin. E = 2 \sin. \frac{1}{2}(E' - E) \cos. \frac{1}{2}(E' + E)$, donc

$$\sin E'' - \sin. E' = \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} A' \sin. \frac{1}{2}(E' - E) \cos. \frac{1}{2}(E' + E)}{\sin. \frac{1}{2}(A + A') \sin. \frac{1}{2}(A - A')}$$

ou pour plus de facilité pour le calcul logarithmique, faisant

$$\text{tang.} Q = \sqrt{\frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} A' \sin. \frac{1}{2}(E' - E) \cos. \frac{1}{2}(E' + E)}{\sin. \frac{1}{2}(A + A') \sin. \frac{1}{2}(A - A') \sin. E'}} \dots (83),$$

on aura

$$\sin. E'' = \frac{\sin. E'}{\cos.^2 Q} \dots (84).$$

Faisons l'application de ces formules à l'exemple de l'article 224.

$\frac{1}{2}A' =$	2° 30′ 52″	2 log. sin.	7,2843600		
$\frac{1}{2}A =$	4 1				
$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A' =$	6 31 52	c. a. log. sin.	0,9440765		
$\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A' =$	1 30 8	c. a. log. sin.	1,5814382		
$\frac{1}{2}E' =$	23 59 30				
$\frac{1}{2}E =$	23 49 30				
$\frac{1}{2}E' - \frac{1}{2}E =$	0 10 0	log. sin.	7,4637255		
$\frac{1}{2}E' + \frac{1}{2}E =$	47 49 0	log. cos.	9,8270493		
$E' =$	47 59 0	c. a. log. sin.	0,1290403	log. sin.	9,8709597 +
	2	log. . .	0,3010300		
		Somme.	7,5307198		
		½ Somme.	8,7653599	log. tang. de Q = 3° 20′ 3″, 2 log. cos.	9,9985986 —
				Différence	9,8723611

qui est le log. sinus de E″ = 48° 21′ 11″ = hauteur méridienne qui ne diffère de celle que nous avons trouvée à l'article 224 que de 32″.

227. Il peut arriver qu'à la suite de quelqu'évènement, comme il n'en arrive

malheureusement que trop souvent à la mer, l'observateur soit dépourvu des instrumens qui servent à observer les hauteurs des astres; alors il pourra se servir de la méthode suivante, que je ne propose que pour ce cas extraordinaire, et dont on ne doit jamais se servir dans toute autre occasion, à cause de l'inexactitude qui doit très-souvent affecter l'observation qu'exige cette méthode. Au reste, le calcul et l'observation sont très-simples, ainsi que l'on va en juger d'après l'énoncé de la règle suivante.

Observation. A l'instant où le soleil en se levant lance son premier jet de lumière, regardez l'heure que marque une montre à secondes mortes, et à l'instant où le disque de l'axe est tangent à l'horizon, regardez encore l'heure que marque la même montre. Si c'est au coucher du soleil, observez de même, avec la plus grande exactitude possible, l'intervalle de temps qui s'écoule entre l'instant où le disque de l'astre est tangent à l'horizon, et celui où le soleil lance son dernier jet de lumière. Il est à propos, dans cette observation, d'être deux observateurs, l'un qui observe le passage du disque du soleil à l'horizon, et l'autre qui observe l'intervalle de temps marqué par la montre entre les deux instans où les bords supérieurs et inférieurs du disque du soleil touchent l'horizon.

Calcul. Ajoutez au logarithme sinus de la moitié du demi-diamètre apparent du soleil, les complémens arithmétiques du logarithme cosinus de la déclinaison du soleil pour le moment de l'observation, et du logarithme sinus du demi-intervalle de temps de l'observation réduit en parties de l'équateur; la somme sera le logarithme cosinus d'un arc subsidiaire, dont vous ajouterez le logarithme sinus au logarithme cosinus de la déclinaison, et cette somme sera le logarithme sinus de la latitude du vaisseau.

Démonstration *de la méthode*. Soit A l'angle horaire du soleil, à l'instant où le bord inférieur est tangent à l'horizon, A′ le même angle à l'instant où le bord supérieur de l'astre est tangent à l'horizon, λ le diamètre apparent de l'astre, δ sa déclinaison, que nous supposons la même aux deux époques, L la latitude du vaisseau, D la distance polaire de l'astre et E la hauteur vraie de son centre. Cela posé, il est clair que, dans la première position du soleil, nous aurons $E = \frac{1}{2}\lambda$, et dans la seconde $E = -\frac{1}{2}\lambda$; de plus, $D = 90° \mp \delta$; donc la formule 43, article 127, donnera pour la première position du soleil

$$\cos. A = \frac{\sin. \frac{1}{2}\lambda - \sin. \delta \sin. L}{\cos. \delta \cos. L} \quad \ldots\ldots (a);$$

et pour la seconde, la même formule donnera

$$\cos. A' = \frac{-\sin. \frac{1}{2}\lambda - \sin. \delta \sin. L}{\cos. \delta \cos. L} \quad \ldots\ldots (b),$$

en observant que lorsque δ est de dénomination différente de la latitude, c'est-à-dire, négatif, le second terme du numérateur des valeurs de cos. A et de cos. A', devient positif, ce qui est conforme à la formule $D = 90° \mp \delta$, d'où cos. $D = \pm$ sin. δ, et $-$cos. D sin. L $= \mp$ sin. δ sin. L, le signe supérieur lorsque la déclinaison est de même dénomination que la latitude de l'observateur; le signe inférieur dans le cas contraire.

Retranchant de l'équation (a) celle (b), il vient

$$\text{cos. A} - \text{cos. A}' = \frac{2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\lambda}{\text{cos. L cos.}\,\delta}$$

ou

$$\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}'+\text{A})\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}'-\text{A}) = \frac{\text{sin.}\,\frac{1}{2}\lambda}{\text{cos. L cos.}\,\delta} \;.\;.\;.\;.\;.\; (c);$$

et ajoutant les deux mêmes équations (a) et (b), on a cos. A' + cos. A $= -$2 tang. L tang. δ, ou

$$\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}'+\text{A})\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}'-\text{A}) = -\,\text{tang. L tang.}\,\delta \;.\;.\;.\;.\;.\; (d).$$

Soit fait pour un moment, et afin de simplifier le calcul

$$a = \tfrac{1}{2}(\text{A}'+\text{A}),\; b = \tfrac{1}{2}(\text{A}'-\text{A}),\; c = \frac{\text{sin.}\,\frac{1}{2}\lambda}{\text{cos. L cos.}\,\delta},\; \text{et}\; d = -\,\text{tang. L tang.}\,\delta,$$

ce qui réduit les deux équations (c) et (d) à celles

$$\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,b = c,\;\; \text{et cos.}\,a\,\text{cos.}\,b = d;$$

donc sin.$^2 a$ sin.$^2 b = c^2$, cos.$^2 a$ cos.$^2 b$, ou $(1-\text{sin.}^2 a)(1-\text{sin.}^2 b) = d^2$: effectuant la multiplication, cette dernière équation devient $1-\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2 b+\text{sin.}^2 a\,\text{sin.}^2 b = d^2$; substituant à la place de sin.$^2 a$ sin.$^2 b$ sa valeur c^2, et à la place de sin.$^2 b$ sa valeur $\frac{c^2}{\text{sin.}^2 a}$, on a $1-\text{sin.}^2 a-\frac{c^2}{\text{sin.}^2 a} = d^2 - c^2$, ou chassant le dénominateur, et ordonnant par rapport à sin. a, il vient

$$\text{sin.}^4 a - (1+c^2-d^2)\,\text{sin.}^2 a = -c^2;$$

et résolvant cette équation du quatrième degré, on a

$$\text{sin.}\,a = \sqrt{\left(\frac{1+c^2-d^2 \pm \sqrt{(1+c^2-d^2)^2-4c^2}}{2}\right)} \;.\;.\;.\;.\;.\; (e);$$

enfin, substituant dans cette dernière équation les valeurs de a, c et d, on aura, toutes réductions faites,

$$\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}'+\text{A}) = \sqrt{\left\{\frac{\text{cos.}(\text{L}+\delta)\text{cos.}(\text{L}-\delta)+\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}\lambda \pm \sqrt{(\text{cos.}(\text{L}+\delta)\text{cos.}(\text{L}-\delta)+\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}\lambda)^2-4\,\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}\lambda\,\text{cos.}^2\text{L}\,\text{cos.}^2\delta}}{2\,\text{cos.}^2\text{L}\,\text{cos.}^2\delta}\right\}} \;.\;.\; (f).$$

Nous remarquerons que les deux équations (c) et (d) étant symétriques par rapport à $\frac{1}{2}(A'+A)$ et $\frac{1}{2}(A'-A)$, l'on auroit eu, en les résolvant par rapport à $\sin.\frac{1}{2}(A'-A)$, le même second membre que celui de l'équation (f); mais il est aisé de voir que le double signe $\pm$ qui précède le second radical, constitue la différence entre les valeurs de $\sin.\frac{1}{2}(A'+A)$ et $\sin.\frac{1}{2}(A'-A)$, c'est-à-dire, que la première de ces deux quantités étant plus grande que la seconde, sa valeur sera le second membre de l'équation (f) pris avec le signe positif devant le second radical, et par conséquent la valeur de $\sin.\frac{1}{2}(A'-A)$ sera le second membre de l'équation (f) pris avec le signe négatif. Mais, au lieu de nous servir de cette valeur du sinus de la moitié du temps que le soleil a mis à passer l'horizon, nous en obtiendrons une plus simple, en observant que de l'équation (c) on tire $\sin.\frac{1}{2}(A'-A)=\frac{\sin.\frac{1}{2}\lambda}{\cos. L\cos.\delta\sin.\frac{1}{2}(A'+A)}$; donc substituant dans cette équation la valeur de $\sin.\frac{1}{2}(A'+A)$, donnée par l'équation (f), on aura

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A'-A)=\frac{\sin.\frac{1}{2}\lambda}{\sqrt{\left\{\frac{\cos(L+\delta)\cos.(L-\delta)+\sin.^2\frac{1}{2}\lambda+\sqrt{(\cos.(L+\delta)\cos.(L-\delta)+\sin.^2\frac{1}{2}\lambda)^2-4\sin.^2\frac{1}{2}\lambda\cos.^2 L\cos.^2\delta}}{2}\right\}}}\ldots(85).$$

Cette équation résout généralement et rigoureusement le problème: *Étant donnés le demi-diamètre et la déclinaison du soleil, ainsi que la latitude du lieu de l'observation, trouver le temps que le disque du soleil reste à passer l'horizon;* mais il est aisé de voir qu'elle est susceptible d'une grande simplification, sans en altérer sensiblement l'exactitude, lorsque le lieu de l'observation n'est pas trop près de l'un des pôles. Cette simplification consiste à négliger, dans le dénominateur, les termes affectés du carré du sinus du demi-diamètre du soleil, ce qui réduit la formule (85), à celle

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A'-A)=\frac{\sin.\frac{1}{2}\lambda}{\sqrt{\cos.(L+\delta)\cos.(L-\delta)}}\ldots.(86).$$

En faisant $L=60^\circ$, $\delta=23^\circ 28'$ et $\lambda=32'$, qui est un des cas les plus défavorables que l'on puisse choisir, en ne sortant pas des limites convenables à la méthode, la formule (85) donne $A'-A$ de $7^m 4^s 16^{tier}$, et la formule (86) donne $A'-A=7^m 3^s 20^{tier}$, ainsi il n'y a que 56^{tier} de différence.

Nous n'aurions pu profiter d'une si avantageuse simplification, si nous avions supposé à $\sin.\frac{1}{2}(A'-A)$, la valeur qui lui est donnée par le second membre de l'équation (f), pris avec le signe négatif devant le second radical; en effet, outre que

cette équation auroit été plus compliquée que celle (86), à cause du dénominateur $\cos. L \cos. \delta \sqrt{2}$, c'est qu'encore nous n'aurions pu négliger les termes affectés de $\sin.^2 \frac{1}{2}\lambda$; car si nous l'avions fait, nous aurions trouvé $\sin. \frac{1}{2}(A'-A)=0$, d'où $A'=A$ ce qui est absurde, puisque le passage du disque entier du soleil à l'horizon, ne peut être instantané.

Si dans l'équation (86) on fait $L+\delta =$ ou $> 90°$, on a $\sin. \frac{1}{2}(A'-A)$ infini ou imaginaire, ce qui est conforme à ce que nous avons dit au second livre de cet ouvrage, puisque dans ce cas-là le soleil ne s'abaisse pas au-dessous de l'horizon.

Représentant par ω l'intervalle de temps $A'-A$, et faisant attention que $\cos. (L+\delta) \cos. (L-\delta) = \cos.^2 \delta - \sin.^2 L$, on aura

$$\sin. \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sin. \frac{1}{2}\lambda}{\sqrt{\cos.^2 \delta - \sin.^2 L}};$$

d'où, tirant la valeur de sin. L, on a l'équation :

$$\text{Sin. } L = \cos. \delta \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\lambda}{\sin. \frac{1}{2}\omega \cos. \delta}\right)^2} \ldots\ldots (87),$$

qui résout la question.

Mais pour plus de simplicité dans le calcul logarithmique, faisons

$$\cos. P = \frac{\sin. \frac{1}{2}\lambda}{\sin. \frac{1}{2}\omega \cos. \delta} \ldots\ldots (88).$$

d'où

$$\sin. L = \sin. P \cos. \delta \ldots\ldots (89).$$

Ces deux équations sont, comme on le voit, la traduction analytique de la règle enseignée au commencement de cet article.

Exemple. Le 16 août 1800, vers les sept heures du soir, la déclinaison du soleil étant d'environ 14° 16' boréale, et son demi-diamètre de 15' 50", on a observé que le disque du soleil a resté, pour s'abaisser au-dessous de l'horizon, $3^m 4^s$: on demande la latitude vraie du lieu de l'observation.

Demi-diam. ⊙	15' 50"	log. sin.	7,6632969		
½ inter. réd. en part. de l'équat.	23 0	com. log. sin.	2,1745493		
déclin. ⊙	14° 16 0	com. log. cos.	0,0136048	..........log. cos.	9,9863952
		Somme.....	9,8514510	l. c. de 44° 44' 22" l. s.	9,8475010
				Somme.	9,8338962

qui est le log. sinus de 45° 0' 50". Ainsi cette dernière quantité est la latitude demandée, et il est évident qu'elle est boréale, puisque l'on a vu, au mois d'août, le soleil se coucher après six heures.

228. Nous n'avons pas eu égard dans cette méthode à la réfraction astronomique, quoiqu'à l'horizon, et pour une même densité de l'atmosphère, elle soit la plus forte possible; parce que toutes les parties du disque qui se trouvent successivement à l'horizon, étant également affectées de l'effet de la réfraction, cette dernière n'altère en rien l'intervalle de temps qui doit s'écouler entre les deux instans où l'horizon est en contact avec les bords supérieur et inférieur du disque solaire. Ainsi, ce n'est pas la réfraction qui empêche la méthode d'être rigoureuse, ni même le calcul enseigné dans l'article précédent (*). Mais la défectuosité de la méthode consiste, 1.° en ce que c'est du rapport des sinus de deux petits arcs, dont l'un est le demi-diamètre du soleil et l'autre le demi-intervalle, que l'on conclut le sinus d'un arc, qui peut être très-grand. Ainsi, la plus légère erreur sur le demi-diamètre ou sur l'intervalle des observations, doit produire un effet très-considérable sur le sinus de la latitude, et par conséquent sur la latitude même; 2.° dans la difficulté de faire l'observation d'une manière bien exacte, quelque simple qu'elle paroisse. En effet, on peut apprécier d'une manière suffisamment exacte, l'instant du premier ou dernier jet de lumière, suivant que l'on observe le soleil à son lever ou à son coucher, lorsque l'horizon est bien net; mais il est difficile d'apprécier d'une manière bien exacte l'instant où l'horizon est en contact avec le bord opposé du disque du soleil, et quelques secondes de temps d'erreur dans cette observation, en donnent une assez forte en latitude. (*Voy.* la note XXI, article 1.)

CHAPITRE SIXIÈME.

Correction du point par estime en faisant usage de la latitude vraie.

229. Nous avons vu aux articles 43, 44 et 45, que représentant par ξ la longueur de la route du vaisseau, L' la latitude du départ, L'' la latitude d'arrivée,

(*) J'en excepte pourtant le cas où la réfraction horizontale varieroit sensiblement dans l'intervalle des observations; ce qui est bien rare, lorsque la latitude de l'observateur n'excède pas 60°, puisque par cette latitude, et la déclinaison du soleil étant de 23°28', l'intervalle de temps n'est que d'environ 7^m.

R l'angle du rumb de vent, c'est-à-dire, l'angle formé par la route et la ligne nord et sud, λ le chemin couru en longitude, r' la différence en longitudes des points de départ et d'arrivée, enfin par $(Mr)'$ la différence des latitudes croissantes des mêmes points, on avoit les trois équations

$$\xi = \frac{L'' \overset{\backsim}{+} L'}{\cos. R} \ldots\ldots (2); \; \xi = \frac{\lambda}{\sin. R} \ldots\ldots (3); \; r' = (Mr)' \,\text{tang.}\, R \ldots\ldots (4),$$

que nous mettons sous les mêmes numéros (2), (3) et (4) que ceux qu'elles ont respectivement dans les articles cités.

Or, il est évident que le problème résolu par ces trois équations, reste indéterminé et ne donne que des résultats par estime, tant qu'on ne connoît pas exactement deux des quatre quantités ξ, $L'' \overset{\backsim}{+} L'$, R et λ. Ainsi, l'observation de la latitude qui donne exactement $L'' \overset{\backsim}{+} L'$, laisse encore le problème indéterminé; cependant, par de certaines considérations, qui posent en grande partie sur l'estime du rapport des erreurs que l'on peut avoir commises dans la mesure du chemin avec le loch, ou dans l'estime de la direction de la route, par le moyen de la boussole, on peut, en quelque sorte, se servir de la latitude observée pour corriger la longitude estimée, ou du moins pour obtenir une longitude estimée plus exacte que celle que l'on auroit eu sans les corrections que nous allons indiquer.

Il est aisé de voir, par la nature du problème que nous allons résoudre, qu'on ne doit pas s'attendre à une exactitude géométrique, ni même à une exactitude telle que celle que nous avons obtenue précédemment (*), lorsque nous nous permettions de négliger quelques petites quantités, dont nous prouvions que l'omission ne pouvoit causer une erreur trop sensible dans le résultat. Le lecteur ne doit donc pas oublier, en lisant ce chapitre, que nous n'avons d'autre objet, pour le moment, que de rendre moins inexacte une grandeur qui peut l'être déjà beaucoup, lorsqu'on n'obtient pas par l'observation, et suivant les méthodes que nous enseignerons au chapitre X, la longitude du vaisseau, et que l'on n'a que la latitude observée, ce qui, malheureusement, n'arrive que trop souvent, surtout dans les bâtimens du commerce, où les capitaines et officiers ne se servent

(*) Si l'on en exclut pourtant la solution du problème : *N'étant connues que la longueur du chemin par le moyen du loch, et la direction de la route du vaisseau par le moyen du compas de route depuis le point de départ, trouver la latitude et la longitude du point d'arrivée*, que nous avons résolu dans le premier livre.

ordinairement de leur octant ou sextant que pour prendre la hauteur méridienne du soleil.

230. Représentons par l la quantité $L'' \mp L'$ que nous supposons être la différence entre la latitude vraie de départ et la latitude par estime d'arrivée. De plus, représentons respectivement par ξ', l' et R' la vraie longueur du chemin parcouru depuis le point de départ, la différence entre les vraies latitudes de départ et d'arrivée et le vrai angle du rumb de vent : nous aurons donc

$$\text{Par estime } \xi = \frac{l}{\cos. R}, \text{ ou } l = \xi \cos. R \ldots\ldots (90);$$

$$\text{Réellement } \xi' = \frac{l'}{\cos. R'}, \text{ ou } l' = \xi' \cos. R' \ldots\ldots (91).$$

Retranchant l'équation (90) de celle (91), nous aurons $l' - l = \xi' \cos. R' - \xi \cos. R$, et supposant $\xi' = \xi + \Delta\xi$ et $R' = R + \Delta R$, en représentant par $\Delta\xi$ et ΔR les erreurs respectives dans l'estime de la longueur de la route et dans l'angle du rumb de vent, on aura $l' - l = \xi \cos. R \cos. \Delta R - \xi \sin. R \sin. \Delta R + \Delta\xi \cos. R \cos. \Delta R - \Delta\xi \sin. R \sin. \Delta R - \xi \cos. R$, ou $l' - l = -2\xi \cos. R \sin.^2 \tfrac{1}{2} \Delta R - \xi \sin. R \sin. \Delta R + \Delta\xi \cos. R \cos. \Delta R - \Delta\xi \sin. R \sin. \Delta R \ldots\ldots (c)$.

Mais n'étant guère probable que l'on puisse commettre dans l'estime du rumb de vent, une erreur de deux rumbs ou 22°30′, nous négligerons les premier et dernier termes du second membre de l'équation (c) ; ce que nous ferons avec d'autant moins de crainte d'altérer considérablement la valeur de $l' - l$, que ces deux termes produisent toujours des effets contraires : car, si les variations $\Delta\xi$ et ΔR sont de mêmes signes, il est clair que l'une d'elles augmentant $l' - l$, l'autre diminuera la valeur de cette quantité, et réciproquement, ce que démontrent évidemment les équations (90 et 91), en observant que cette dernière est constante. Si les erreurs $\Delta\xi$ et ΔR sont de signes contraires, elles feront varier dans un même sens $l' - l$; mais alors les premier et dernier termes seront de signes contraires ; donc encore ils produiront des effets contraires. Ainsi, nous permettant encore, à cause de la petitesse de ΔR, de faire dans le troisième terme du second membre de l'équation (c) $\cos. \Delta R = 1$, ce qui donne $\sin. \Delta R = 0$, cette équation se réduira à celle

$$l' - l = -\xi \sin. R \sin. \Delta R + \Delta\xi \cos. R \ldots\ldots (92).$$

L'on ne peut se dissimuler que cette réduction de l'équation (c) à celle (92), ne produise dans certains cas, une erreur pour la valeur de $l' - l$ qui pourroit aller jusqu'à 15 minutes sur une route de 100 lieues. Mais cette erreur devient

bien moins essentielle que ce qu'elle paroît, en faisant attention que l'équation (92) ne doit pas servir à trouver $l'-l$, qui est donné par l'observation, mais qu'elle n'est destinée qu'à nous faire connoître à peu près, et avec plus d'exactitude le loch et la boussole, la longueur de la route ξ et l'angle du rumb de vent R. Ainsi, admettant cette équation (92) pour obtenir les corrections approchées que nous voulons obtenir, nous observerons qu'il peut arriver trois cas, que nous allons successivement examiner.

231. *Premièrement*, la direction estimée de la route peut être fort voisine de la ligne *nord et-sud*, par exemple, entre le NNO et NNE, ou entre le SSO et SSE; alors l'angle R étant fort petit, la valeur de $l'-l$ dépendra presqu'entièrement de l'erreur dans l'estime du chemin, puisqu'on aura le terme $\xi \sin. R \sin. \Delta R$ assez petit pour qu'alors on puisse le négliger. L'équation (92) se réduira donc dans ce cas-là à celle $l'-l = \Delta\xi \cos. R$; mais de l'équation (90) on tire

$$\cos. R = \frac{l}{\xi}$$

donc

$$\Delta\xi = \frac{(l'-l)}{l}\xi \ldots\ldots (93).$$

Avec cette valeur de $\Delta\xi$ on aura à peu près ξ'; d'où on conclura avec la même approximation le vrai angle R′ du rumb de vent, par le moyen de l'équation

$$\cos. R' = \frac{l'}{\xi'} \ldots\ldots (94),$$

dans laquelle l' est connue par observation.

Enfin l'équation

$$r' = (Mr)' \operatorname{tang}. R' \ldots\ldots (95),$$

dans laquelle $(Mr)'$ représente la vraie différence des latitudes croissantes des points de départ et d'arrivée, servira à connoître avec une approximation semblable la différence des longitudes des mêmes points.

EXEMPLE. On est parti de 49° 36′ de latitude nord, et de 109° 45′ de longitude occidentale. On a couru par estime 156 nœuds au S$\frac{1}{4}$SE; mais, à la fin de cette route, on a observé la latitude, et on l'a trouvée de 46° 48′ nord : on demande le chemin corrigé et la longitude d'arrivée aussi corrigée.

Nous avons donc $\xi = 156$ et $R = 11°15'$; d'où nous conclurons à l'ordinaire par le moyen de la formule $l = \xi \cos. R$, que la différence des latitudes de départ et d'arrivée, par estime, est de 153 minutes; donc $l = 153'$; mais la vraie différence en latitude $l' = 49°36' - 46°48' = 168'$; donc $l'-l = 15'$; et puisque dans

cet exemple la direction estimée de la route ne s'éloigne que d'un rumb de vent de la ligne *nord-et-sud*, nous servant des formules 93 et 94 pour obtenir les corrections respectives de la route et du rumb de vent, nous ferons le calcul suivant :

$\xi = 156$ . . . . . log. 2,1931246 156,0
$l'-l = 15$ . . . . . log. 1,1760913
$l = 153$ com. ar. log. 7,8153086

Somme 1,1845245 log. de $\Delta\xi =$ 15,3

Somme ou $\xi' = 171,3$ . . . . . com. ar. log. 7,7662426
$l' = 168$ . . . . log. 2,2253093

Somme. 9,9915519

qui est le log. cos. de 11° 15′ 45″, donc R′ = 11° 15′ 45″ . . . . log. tang. 9,2991567
Latitude de départ 49° 36′ latitude croissante 3421 (tab. II)
Latitude d'arrivée 46 48 latitude croissante 3170 .

Différence . . . . . 251 . . . . log. 2,3996737

Somme. 1,6988304

qui est le logarithme de la différence en longitude r′ = 0° 50′ 0″ du côté de l'orient,
longitude du départ . . . . 107° 45′ 0″ occidentale,

Différence . . . . . 106° 55′ 0″ qui est la longitude occidentale d'arrivée du vaisseau.

232. *Secondement.* Il peut arriver que la direction de la route soit fort voisine de la ligne *est-et-ouest*, alors il est clair que l'erreur $\Delta\xi$ commise dans l'estime de la longueur de la route, influera foiblement sur la valeur de $l'-l$, puisque l'angle R se rapprochant beaucoup d'un angle droit, son cosinus est fort petit, et par conséquent le terme $\Delta\xi \cos. \mathrm{R}$ de l'équation (92) peut se négliger. Ainsi, cette équation se réduit dans ce cas à celle $l'-l = -\xi \sin. \mathrm{R} \sin. \Delta\mathrm{R}$; mais $\xi = \frac{l}{\cos. \mathrm{R}}$, (éq. 89); donc

$$\sin. \Delta\mathrm{R} = -\frac{(l'-l)\cot. \mathrm{R}}{l} \quad \ldots\ldots \quad (96).$$

Ayant ΔR et par conséquent R′, on calculera la différence en longitude r′ comme précédemment.

Exemple. On est parti de 60° 18′ de latitude nord et de 179° 15′ de longitude occidentale, on a couru par estime 78 nœuds à l'OSO 1° 28′ O, et à la fin de cette route, on a trouvé par l'observation que la vraie latitude d'arrivée étoit de 59° 42′ de latitude nord. On demande l'angle du rumb de vent corrigé, et la longitude corrigée d'arrivée.

Nous avons dans cet exemple $\xi = 78$, $R = 68° 58'$, $l' = 36'$, et, par le calcul de la formule $l = \xi \cos. R$, $l = 28'$; donc $l' - l = 8'$. Cela posé, voici le calcul de la formule (96)

$l' - l = 8'$	log.	0,9030900
$R = 68° 58'$	log. cot.	9,5849321
$l = 28'$	com. ar. log.	8,5528420
	Somme.	9,0408641 log. sinus de 6° 18′ 27″, donc $\Delta R = -6° 18',45$,

donc le rumb de vent corrigé R′ est de 62° 39′,55, c'est-à-dire que la direction de la route corrigée est l'OSO 4° 50′,45 S.

On trouve à l'ordinaire que la longitude d'arrivée corrigée est de 179° 10′ ouest + 2° 35′ ouest = 181° 45′ ouest, ou plutôt de 178° 15′ orientale.

233. Enfin il arrive le plus souvent, que la direction de la route du vaisseau est intermédiaire entre celles que nous avons considérées dans les deux articles précédens, et alors les erreurs dans les estimes de la longueur de la route et dans celle de l'angle du rumb de vent, participent ensemble et sensiblement à donner une valeur à $l' - l$, de manière que le problème paroît dans ce cas-là absolument indéterminé. Cependant les considérations suivantes peuvent nous guider dans la recherche de la solution de ce problème.

Il peut arriver que les erreurs commises dans les estimes de la longueur de la route et de l'angle du rumb de vent, soient toutes deux *par excès*, c'est-à-dire, qu'elles augmentent respectivement ces quantités; ou qu'elles soient toutes deux *par défaut*, c'est-à-dire, qu'elles diminuent respectivement ces quantités; ou enfin que l'une des deux soit par excès et l'autre par défaut. Or, il est évident que dans les deux premiers cas, les effets de ces erreurs seront en sens contraire, puisque la différence en latitude diminue lorsque l'angle du rumb augmente, et qu'elle croît lorsque la longueur de la route augmente; et réciproquement, lorsque l'angle du rumb de vent augmente et que la longueur de la route diminue; mais il est clair que dans le troisième cas les effets des deux erreurs seront dans le même sens, puisque l'une de ces erreurs tendant à augmenter ou à diminuer le

changement en latitude, l'autre erreur, qui est en sens inverse de la première, tendra à produire un effet semblable à celle-ci.

Il faudra donc, dans les deux premiers cas, donner à l'effet produit par l'une de ces deux erreurs ΔR, $\Delta \xi$ une valeur qui surpasse $l'-l$ d'une grandeur x qui sera considérée comme l'effet de l'autre erreur; car il est évident que sans l'effet x de cette dernière erreur, qui est en sens contraire de celui produit par la première, ce dernier effet seroit celui réellement existant par le concours des deux erreurs, plus l'effet x détruit par l'autre erreur.

Mais, dans le troisième cas, les effets étant dans le même sens, chacun d'eux n'est qu'une partie de l'effet produit par le concours des deux erreurs; donc, l'un de ces effets étant $l'-l-x$, celui de l'autre sera x.

Le choix qu'il faut faire des valeurs $l'-l+x$, ou $l'-l-x$ et x que l'on doit donner à $\Delta \xi$ et ΔR dépend des cas suivans que nous allons examiner.

234. Si les erreurs $\Delta \xi$ et ΔR sont toutes deux par défaut, et si la différence l' en latitude résultante de l'observation est plus grande que celle l en latitude résultante de l'estime, on supposera l'effet de l'erreur $\Delta \xi$ égal à $l'-l+x$, et celui de l'erreur ΔR, égal à x. On corrigera ensuite le chemin par l'équation

$$\Delta \xi = \xi \frac{(l'-l+x)}{l} \ldots\ldots (97),$$

et le rumb de vent par celle

$$\sin.\Delta R = \frac{x \cot. R}{l} \ldots\ldots (98).$$

En effet, soit R le point de départ, Rl le changement en latitude par estime, Rl' la différence en latitude par observation, $lR\xi$ l'angle du rumb de vent estimé, $R\xi$ la longueur de la route estimée, supposons une erreur ll'' dans le changement en latitude plus grande que la vraie ll' d'une quantité $l'l''$; du point l'' élevons sur Rl'' une perpendiculaire $l''\xi''$ prolongée jusqu'à la rencontre en ξ'' de $R\xi$ prolongé. Du point R comme centre et d'un rayon $R\xi''$, décrivons l'arc de cercle $\xi''\xi'$, et élevant du point l' une perpendiculaire $l'\xi'$ jusqu'à sa rencontre en ξ' avec l'arc $\xi''\xi'$, menons la droite $R\xi'$; ce qui donnera le triangle rectiligne rectangle $Rl'\xi'$, dans lequel $R\xi'$ est la route corrigée, et l'angle $l'R\xi'$ est l'angle du rumb de vent corrigé; or, les deux côtés Rl'', $R\xi''$ du triangle $Rl''\xi''$ étant coupés proportionnellement par la droite $l\xi$ parallèle à la base, on a la proportion $Rl : R\xi :: ll'' : \xi\xi''$; mais $Rl = l$, $R\xi = \xi$, $ll'' = ll' + l'l'' = Rl' - Rl + l'l'' = l' - l + x$, et $\xi\xi'' = R\xi'' - R\xi = R\xi' - R\xi = \Delta\xi$; donc $l : \xi :: l' - l + x : \Delta\xi$; d'où l'on tire l'équation (97). Fig. 39

Fig. 39. De même nous déduirons de cette construction l'équation (98); car, si du point ξ'' nous abaissons sur $l'\xi'$ la perpendiculaire $\xi''p$, et si nous joignons les extrémités de l'arc $\xi'\xi''$, par une corde, nous aurons, dans le triangle rectiligne rectangle, $\xi'\xi''p$, la proportion corde $\xi'\xi''$, ou $2\,R\,\xi\,\sin.\frac{1}{2}\xi'R\,\xi'' : 1 :: \xi''p$ ou $x : \sin.\,\xi''\xi'p$; mais, à cause de la petitesse de l'angle $\xi''R\,\xi'$, ou ΔR, et par conséquent de l'arc $\xi''\xi'$, on a sensiblement $2\,R\,\xi'\sin.\frac{1}{2}\xi'R\,\xi''=R\,\xi'\times\xi'R\,\xi''=\xi'\Delta R$, et $R\,\xi'$ perpendiculaire à $\xi''\xi'$, ce qui donne, sans erreur sensible, angle $\xi''\xi'p=$ angle $l\,R\,\xi=R$; donc la proportion précédente se réduit à celle $\xi'\Delta R : 1 :: x : \sin.R$, d'où ΔR, ou, pour plus de facilité dans le calcul, $\sin.\Delta R=\frac{x}{\xi'\sin.R}$; mais $\xi'=\frac{l}{\cos.R'}$: donc $\sin.\Delta R=\frac{x\cos.R'}{l\sin.R}$, ou, sans une erreur essentielle pour cette espèce de calcul, mettant $\frac{\cos.R}{l}$ à la place de $\frac{\cos.R'}{l}$, on a l'équation (98).

235. Si les erreurs $\Delta\xi$ et ΔR de la route et du rumb de vent sont encore par défaut, et si la différence en latitude, résultante de l'observation, est plus petite que la la différence en latitude résultante de l'estime, ou supposera que $l-l'+x$ est l'effet de l'erreur ΔR dans le rumb de vent, et que x est l'effet de l'erreur $\Delta\xi$ dans la route; ensuite l'on trouvera les valeurs de ces erreurs par le moyen des équations

$$\Delta\xi=\frac{x\xi}{l-x}\,\ldots\ldots\ldots(99),$$

$$\sin.\Delta R=\frac{(l-l'+x)\cot.R}{l}\,\ldots\,(100).$$

Fig. 40. En effet, soit $R\,l$ le changement en latitude estimée, $R\,l'$ celui en latitude observée, $l\,R\,\xi$ l'angle de rumb de vent estimé, d'où il suit que $R\,\xi$, hypothénuse du triangle rectiligne rectangle $R\,l\,\xi$, est la longueur de la route estimée. Prenons en-dessous de l' une longueur $l'\,l''$, que nous représentrons par x. Du point l'', élevons sur la ligne nord-et-sud $R\,l$, la perpendiculaire $l''\xi''$, que nous limiterons en ξ'', par l'arc de cercle $\xi\,\xi''$, décrit du point R comme centre, et d'un rayon égal à $R\,\xi$. Enfin, joignons les points R et ξ'' par la droite $R\,\xi''$, que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre en ξ' de la perpendiculaire $l'\xi'$. Il est clair que, par cette construction, le triangle $\xi'\,l'\,R$ est le corrigé; or, à cause de sa similitude avec le triangle $R\,l''\xi''$, on a la proportion $R\,l'' : R\,\xi''$ ou $R\,\xi :: l'\,l'' : \xi'\xi''$; mais $R\,l''=R\,l'-l'\,l''=l'-x$, $R\,\xi=\xi$, $l'\,l''=x$ et $\xi'\xi''=R\,\xi'-R\,\xi=\Delta\xi$; donc $l'-x : \xi :: x : \Delta\xi$, d'où l'on tire l'équation (99).

De même, dans le triangle rectangle mixtiligne $\xi\,p\,\xi''$, que l'on peut considé-

rer comme rectiligne, à cause de la petitesse de l'arc $\xi\xi''$, l'on a la proportion $\xi\xi'' : 1 :: \xi p : \sin. p\xi''\xi$; mais $\xi\xi'' = \xi\Delta R$, $\xi p = ll'' = Rl - Rl' + l'l'' = l - l' + x$, et l'angle $p\xi''\xi$ égal à l'angle $lR\xi = R$, à cause que ces deux angles ont leurs côtés réciproquement perpendiculaires. Ainsi la proportion précédente se réduit à celle $\xi\Delta R : 1 :: l - l' + x : \sin. R$, d'où $\Delta R = \frac{l - l' + x}{\xi \sin. R}$: mais $\xi = \frac{l}{\cos. R}$; donc $\Delta R = \frac{(l - l' + x) \cot. R}{l}$; et mettant, pour avoir ΔR en parties de degrés, $\sin. \Delta R$ à la place de ΔR, l'on a l'équat. (100). Fig. 40.

236. Si les erreurs dans l'estime de la longueur de la route et de l'angle du rumb de vent sont par excès, et si le changement en latitude observée est plus grand que celui en latitude estimée; alors il faudra faire l'effet de l'erreur dans l'angle du rumb de vent plus grand que celui donné par le concours des deux erreurs, d'une quantité x qui sera l'effet de l'erreur dans l'estime de la longueur de la route, et l'on aura, pour déterminer les valeurs de ces deux erreurs, les équations

$$\Delta\xi = \frac{x\xi}{l' + x} \;\ldots\ldots\; (101),$$

$$\sin. \Delta R = \frac{(l' - l + x) \cot. R}{l} \;\ldots\ldots\; (102).$$

Pour démontrer ces équations, soit le triangle rectiligne rectangle $Rl\xi$, se composant des quantités estimées $Rl = l$, $R\xi = \xi$ et $lR\xi = R$: soit de plus Rl' le vrai changement l' en latitude, et $l'l''$ une grandeur x. Du point R comme centre, et d'un rayon $R\xi$, décrivons l'arc de cercle $\xi\xi''$ jusqu'à sa rencontre en ξ'' de la perpendiculaire $l''\xi''$ menée sur Rl'; joignons les points R et ξ'' par la droite $R\xi''$, et au point l' élevons la perpendiculaire $l'\xi'$, ce qui formera le triangle rectiligne rectangle réel $Rl'\xi'$ qui, étant semblable à celui $Rl''\xi''$, donne la proportion $Rl'' : R\xi'' :: l'l'' : \xi'\xi''$, ou $l' + x : \xi :: x : \Delta\xi$, d'où l'on tire l'équation (101). Fig. 41.

Le triangle mixtiligne et rectangle $\xi''p\xi$ étant assez petit pour pouvoir le considérer comme rectiligne, donne $\xi\xi'' : 1 :: \xi''p : \sin. \xi''\xi p$. Mais $\xi\xi'' = \xi\Delta R$, $\xi'p = l''l = l'l + l'l'' = l'R - lR + l'l'' = l' - l + x$, et $\xi''\xi p = l'R\xi' = R$; donc $\xi\Delta R : 1 :: l' - l + x : \sin. R$, d'où $\Delta R = \frac{l' - l + x}{\xi \sin. R}$; et mettant la valeur de $\xi = \frac{l}{\cos. R}$, ainsi que $\sin. \Delta R$ à la place de ΔR, on a l'équation (102).

237. Si les erreurs dans les estimes de la longueur de la route et du rumb de vent, sont encore par excès; mais si le changement en latitude par l'observation

est plus petit que celui par l'estime, on attribuera à l'erreur $\Delta\xi$ de l'estime du chemin, l'erreur connue en latitude $l-l'$ plus une quantité x, et à l'erreur dans l'estime du rumb de vent, l'excès x sur la vraie erreur en latitude $l-l'$; ensuite on trouvera les valeurs de $\Delta\xi$ et de ΔR, par les équations

$$\Delta\xi = -\xi\frac{(l-l'+x)}{l} \ldots\ldots (103),$$

$$\sin.\Delta R = \frac{x \cot. R}{l} \ldots\ldots (104).$$

Fig. 42. En effet, soit le triangle rectiligne rectangle $Rl\xi$, se composant des élémens obtenus par la seule estime; $Rl'\xi'$ le triangle qui se compose du vrai changement en latitude, de la vraie route et du vrai angle du rumb de vent. Du point R comme centre, et d'un rayon $R\xi'$, décrivons l'arc de cercle $\xi'\xi''$; et des points ξ'', ξ' menons à la ligne nord-et-sud Rl, la perpendiculaire $\xi''l''$, et la parallèle $\xi'p$; enfin représentons par x la partie $l'l''$. Cela posé, les triangles semblables $Rl''\xi''$ et $Rl\xi$, donneront la proportion $Rl : R\xi :: ll'' : \xi\xi''$. Mais $Rl = l$, $R\xi = \xi$, $ll'' = ll' + l'l'' = l - l' + x$, et $\xi\xi'' = R\xi - R\xi' = -\Delta\xi$; donc $l : \xi :: l - l' + x : -\Delta\xi$, d'où l'on tire l'équation (103).

De même, le triangle rectangle mixtiligne $\xi'p\xi''$, assez petit pour être considéré comme rectiligne, donne la proportion $\xi'\xi'' : 1 :: \xi'p : \sin.\xi'\xi''p$; mais $\xi'\xi'' = \xi'\Delta R$, $\xi'p = x$, et $\sin.\xi'\xi''p = \sin.R$, donc $\xi'\Delta R : 1 :: x : \sin.R$, d'où $\Delta R = \frac{x}{\xi'\sin.R}$; ou, sans une erreur essentielle dans ce calcul, $\sin.\Delta R = \frac{x}{\xi\sin.R}$, d'où l'on déduit l'équation (104), en mettant à la place de ξ, sa valeur $\frac{l}{\cos.R}$.

238. Soit maintenant l'angle du rumb de vent trop grand, et le chemin trop court, alors la première erreur ΔR étant par excès, et la seconde $\Delta\xi$ par défaut, ces deux erreurs produiront des effets qui seront dans le même sens; donc l'erreur $l'-l$ devra être divisée en deux parties $l'-l-x$ et x, dont, abstraction faite des raisons particulières que l'on pourroit avoir d'après les circonstances de la navigation, pour agir autrement, on considérera la plus forte comme étant l'effet de l'erreur en chemin, si l'angle du rumb de vent est $<45°$, ou comme étant l'effet de l'erreur dans l'angle du rumb de vent, si ce dernier angle est $>45°$ (art. 230 et 231). Donc x et $l'-l-x$ étant pris convenablement à ces cas là, on aura

$$\Delta\xi = \frac{x\xi}{l} \ldots\ldots (105),$$

$$\sin.\Delta R = \frac{(l'-l-x)\cot.R}{l} \ldots\ldots (106),$$

équations qu'on démontrera de la manière suivante :

Soit $R l \xi$ le triangle par estime; $R l' \xi'$ le triangle vrai; $l l''$, $l'' l'$ les deux parties x et $l'-l-x$, dans lesquelles on décompose l'erreur réelle $l' l$ en latitude; menons du point l'' la perpendiculaire $l'' \xi''$, prolongée jusqu'à sa rencontre en ξ'' de l'arc $\xi' \xi''$ décrit du point R comme centre, et d'un rayon $= R\xi'$; ensuite abaissons du point ξ' la perpendiculaire $\xi' p$. Cela posé, les triangles semblables $l R \xi$, $l'' R \xi''$ donneront la proportion $R l : R\xi :: l l'' : \xi \xi''$; mais $R l = l$, $R \xi = \xi$, $l l'' = x$ et $\xi \xi'' = R\xi'' - R\xi = R\xi' - R\xi = \Delta \xi$. Donc $l : \xi :: x : \Delta \xi$; d'où l'on déduit l'équation (105). Fig. 43.

Le triangle mixtiligne rectangle $\xi' p \xi''$, assez petit pour être considéré comme rectiligne, donne la proportion $\xi' \Delta R : 1 :: l' l''$ ou $l'-l-x : \sin. \xi' \xi'' p$, ou $\sin. R$; donc $\Delta R = \frac{l'-l-x}{\xi \sin. R}$, ou, à très-peu de chose près, $\sin. \Delta R = \frac{l'-l-x}{\xi \sin. R} = \frac{(l'-l-x) \cos. R}{l \sin. R}$, d'où l'on déduit l'équation (106).

239. Soit enfin supposé que l'erreur $\Delta \xi$ de la route est par excès, et que celle ΔR du rumb de vent est par défaut, ce qui donne évidemment $l > l'$, on aura les effets de ces erreurs qui seront dans le même sens; donc, décomposant l'erreur totale $l-l'$ résultante des deux erreurs $\Delta \xi$ et ΔR en deux parties $l-l'-x$ et x, attribuant la première à ΔR et la seconde à $\Delta \xi$, on aura les équations

$$\Delta \xi = -\frac{\xi x}{l' + \xi} \ldots\ldots\ldots\ldots (107),$$

$$\sin. \Delta R = \frac{(l-l'-x) \cos. R}{l} \ldots (108).$$

Pour le démontrer, soit $\xi l R$ le triangle par estime, $\xi' l' R$ le réel. Prolongeons le côté $R\xi'$ jusqu'à sa rencontre en ξ'' de l'arc $\xi \xi''$ décrit du point R comme centre avec un rayon égal à $R\xi$, enfin des points ξ'' et ξ menons la perpendiculaire $\xi'' l''$ et la parallèle ξp à la ligne nord-et-sud $R l$. Cela posé, nous aurons les triangles semblables $R l'' \xi''$, $R l' \xi'$, qui nous donneront la proportion $R l'' : R\xi''$ ou $R\xi :: l' l'' : \xi' \xi''$; mais $R l'' = R l' + l' l'' = l' + x$, $R\xi = \xi$, $l' l'' = x$ et $\xi' \xi'' = R\xi - R\xi' = -\Delta \xi$; donc $l' + x : \xi :: x : \Delta \xi$, d'où l'on tire l'équation (107). Fig. 44.

Le triangle mixtiligne rectangle $\xi p \xi''$, assez petit pour être considéré comme rectiligne, donne aussi la proportion $\xi \xi'' : 1 :: \xi p : \sin. \xi \xi' p$; mais $\xi \xi'' = \xi \Delta R$, $\xi p = l - l' - x$ et $\xi \xi' p = R$; donc $\xi \Delta R : 1 :: l - l' - x : \sin. R$; d'où il est aisé de déduire l'équation (108).

240. Le problème dont la solution est l'objet que nous nous proposons dans ce chapitre, seroit résolu d'une manière assez satisfaisante, s'il n'entroit pas

dans les valeurs de $\Delta\xi$ et de ΔR, la quantité x qui est à peu près indéterminée ; car elle n'est donnée que par des probabilités, suites d'une observation très-attentive des circonstances de la navigation, par ceux qui sont chargés de cette partie. De même, ce n'est que par des conjectures qui posent sur les mêmes observations, que l'on juge si les erreurs commises dans l'estime de la longueur de la route et du rumb de vent, sont par excès ou par défaut.

Les seuls cas traités aux articles 231 et 232 présentent un peu moins d'incertitude, parce que dans les formules des corrections 93 et 96 il n'entre pas la quantité indéterminée x.

Le peu d'exactitude que l'on a à espérer des corrections de la longitude estimée par le moyen de la latitude observée, doit encore mieux faire sentir aux navigateurs qu'ils ne doivent jamais négliger, lorsqu'ils le peuvent, de trouver directement la longitude du vaisseau par le moyen de l'observation et des méthodes que nous leur enseignerons bientôt.

En attendant, nous allons faire quelques applications des formules précédentes aux exemples suivans :

I. On est parti de 112° 48′ de longitude occidentale et de 23° 10′ de latitude nord. On a couru selon l'estime, 100 lieues dans le N O $\frac{1}{4}$ O ; et ayant observé la latitude, on l'a trouvée de 26° 5′ ; mais, examen fait des circonstances de la route, on a lieu de croire qu'on s'est plus approché vers l'ouest, et que l'on a fait plus de chemin : on demande la correction que l'on doit faire éprouver au rumb de vent et à la route.

L'on a $\xi = 100$ lieues $= 300'$, $R = 56° 15'$, $l' = 2° 55'$, et l'on trouve aisément par le moyen de la formule $l = \xi \cos. R$, que le changement en latitude estimée $l = 2° 47'$; donc $l' - l = 8'$, ainsi cet exemple est dans le cas traité à l'article 234.

Supposons que d'après les circonstances de la route, depuis le point de départ, on présume que l'effet de l'erreur du chemin sur la latitude ne peut dépasser 14′ ; j'aurai donc $l' - l + x = 14$, d'où $x = 8$. Cela posé, voici le calcul de $\Delta\xi$ et de ΔR (éq. 97 et 98).

$\xi = 300$	log.	2,4771213	$x = 6'$	log.	0,7781513
$l' - l + x = 14'$	log.	1,1461280	$R = 56° 15'$	log. cot.	9,8248926
$l = 167'$	com. ar. log.	7,7772835			7,7772835
	Somme.	1,4005328		Somme.	8,3803274
qui est le log. de 25′,2			qui est le log. sin. de 1° 22′ 32″		

donc $\Delta\xi = 25',2$ et $\Delta R = 1° 22' 32''$, d'où il suit que la route corrigée ξ' est de

$500'+25', 2=325', 2=108,4$ lieues; et que l'angle corrigé R′ du rumb de vent est de $56°15'+1°22'52''=57°37'52''$; donc la vraie direction de la route est le NO$\frac{1}{4}$O 1° 22′ 52″ O.

L'équation (95) donne la différence en longitude de 5° 2′ 8″, donc la longitude du point d'arrivée est de 117° 50′ 8″ O.

II. On est parti de 52° 42′ de longitude orientale et de 8° 45′ de latitude sud. On a couru 143 lieues au SE 5° E, et la latitude observée a été de 13° 47′; mais, d'après l'examen fait des circonstances de la route, on a lieu de croire que cette latitude, qui ne s'accorde pas avec la latitude estimée, pèche parce que la distance a été estimée trop petite et le rumb trop grand : on demande la longitude corrigée du vaisseau.

Nous avons $\xi=143$ lieues $=429'$, $R=48°$, $l'=5°\,4'$ et $l\ (=429'\cos.48)=4°\,47'$; donc $l'-l=17'$.

Cet exemple est donc dans le cas résolu à l'article 238. Or, si l'on suppose que rien, dans l'observation des circonstances de la route, ne donne lieu d'attribuer l'erreur plutôt an rumb qu'à la distance, j'en attribuerai plus au rumb qu'à la distance, parce que la route se rapproche plus de la ligne *est-et-ouest* que de la ligne *nord-et-sud*. Je ferai donc $x=8'$ et $l'-l-x=17'-8'=9'$. Cela posé, voici le calcul des formules (105 et 106.)

$x=8$	log.	0,9030900	$l'-l-x=9'$	log.	0,9542425
$\xi=429$	log.	2,6324573	$R=48°$	log. cot.	9,9544374
$l=427$	com. ar. log.	7,5421181			7,5421181
	Somme.	1,0776654		Somme.	8,4507980
qui est le log. de 12′			qui est le log sinns de 1° 37′ 5″		

douc $\Delta\xi=12'$, ce qui donne $\xi'=441'=147$ lieues, et $\Delta R=1°\,37'\,5''$, d'où $R=46°\,22'\,55''$, c'est-à-dire que l'air de vent couru par le vaisseau n'est que le SE 1° 22′ 55″ E.

Par le moyen de cette valeur corrigée du rumb de vent et de l'équation (95), on trouve la différence en longitude corrigée de 5° 22′ 35″, donc la longitude d'arrivée du vaisseau, ainsi corrigée, est de 58° 4′ 35″ orientale.

CHAPITRE SEPTIÈME,

Où sont indiquées les Circonstances les plus favorables au calcul de l'angle horaire d'un astre, ainsi que les moyens à prendre pour parvenir à cette exactitude. Enfin, du calcul de l'heure juste d'une montre, à l'instant que le Soleil passe au méridien, par les observations correspondantes de cet astre.

Le calcul de l'heure vraie du vaisseau par l'observation de la hauteur des astres dont nous avons déjà parlé à l'art. 127, chap. VI, liv. II, étant de la plus grande importance dans la partie nautique de la navigation, nous croyons devoir joindre, à ce que nous en avons dit dans l'article cité, quelques détails dont nous n'avions pas fait mention au chapitre VI, liv. II, où nous considérions généralement les calculs dont celui-ci fait partie.

241. Nous avons trouvé à l'article 127, que représentant par A l'angle horaire de l'astre observé, par E sa hauteur vraie, par D sa distance au pôle élevé de l'observateur, et par L la latitude vraie de ce dernier; on avoit les équations

$$\cos. A = \frac{\sin. E - \sin. L \cos. D}{\sin. D \cos. L} \dots\dots (43),$$

ou

$$\sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2} (D + L + E) \sin. \frac{1}{2} (D + L - E)}{\sin. D \cos. L}} \dots (44),$$

auxquelles nous conservons les mêmes numéros (43 et 44), que ceux qu'elles avoient à l'article 127.

Or, d'après un examen détaillé à la note XXII, sur l'influence des erreurs commises dans l'observation de la hauteur de l'astre, et dans l'estime de la latitude du lieu de l'observation, sur l'exactitude du résultat du calcul de la formule (44), il suit principalement : 1.° Que l'erreur dans l'angle horaire étant toujours plus grande que celle commise dans l'observation de la hauteur de l'astre, il faut porter la plus grande attention à obtenir la hauteur vraie de l'astre avec beaucoup d'exactitude, et qu'en conséquence il est à propos, autant que cela est possible, de déduire l'heure vraie du vaisseau de la hauteur du so-

leil, préférablement à celle d'une étoile ou de la lune, parce que les observations de hauteur faites la nuit, ne sont pas aussi bonnes que celles faites le jour, et que les variations assez sensibles qu'éprouvent la déclinaison de la lune, sa parallaxe et son demi-diamètre dans un petit intervalle de temps, peuvent essentiellement influer sur le résultat du calcul.

242. 2.° Que l'on doit observer la hauteur de l'astre à son passage au premier vertical, ou du moins le plus près possible de ce vertical. La table XVIII, qui est calculée par le moyen de la formule 4, article 2 de la note XXII, fait connoître d'une manière bien simple, la hauteur la plus convenable à laquelle il faut observer l'astre lorsqu'il est dans le même hémisphère que le zénith de l'observateur; car, dans le cas contraire, il n'est pas possible de voir l'astre en question au premier vertical, ni même suffisamment près du premier vertical, puisqu'il n'y passe qu'en dessous de l'horizon, et que quand il est élevé au-dessus de l'horizon de 6 à 7 degrés, c'est-à-dire hors de la partie la plus épaisse de l'atmosphère par rapport à l'observateur, ce qui est nécessaire lorsqu'on veut observer de bonnes hauteurs, il est trop éloigné du premier vertical, pour que l'on puisse avoir égard à la règle prescrite au commencement de cet article.

243. L'usage de la table XVIII (qui n'est calculée que pour le soleil ou pour les astres, dont la déclinaison ne dépasse pas 24 degrés) est bien simple. En effet, supposons qu'étant par environ 48° de latitude nord, et la déclinaison de l'astre observé étant d'à peu près 14° boréale, on veut calculer l'angle horaire de cet astre au moment le plus favorable à l'exactitude du calcul. On trouvera, par le moyen de la table XVIII, que la hauteur à laquelle il faudra observer l'astre est de 19°, puisque ce nombre-là se trouve dans la case qui correspond à 14° de déclinaison et 48° de latitude. Ainsi, déduisant de cette hauteur vraie 19°, la hauteur à laquelle l'astre doit être observé, en faisant à l'inverse toutes les opérations que nous avons faites pour passer de l'observée à la vraie, ce qui n'est pas rigoureusement exact, mais suffisant dans le cas actuel où l'on ne veut qu'avoir à peu près la hauteur observée de l'astre, lorsqu'il passe au premier vertical, on placera l'alidade de l'octant sur ce degré; et aux approches du moment où l'astre doit se trouver à cette hauteur, on le suivra jusqu'à ce qu'on l'observe à la hauteur en question, et notant exactement l'heure que marque dans cet instant une bonne montre, on aura, par le moyen de la formule 44, l'angle horaire de l'astre dans cet instant, d'où l'on déduira l'heure vraie du vaisseau pour le moment de l'observation, et par conséquent la différence de cette heure à celle marquée par la montre; ce qui, comme nous le verrons au chapitre X,

est très-utile lorsqu'on veut connoître l'heure vraie du vaisseau à l'instant d'une observation nocturne de distance, en employant les angles horaires solaires déterminés dans la journée qui précède la nuit où l'on observe.

Si l'on fait une observation de jour qui exige que l'on connoisse l'heure vraie du vaisseau pour le même instant, ce qui a lieu pour le calcul de longitude, ainsi que nous le verrons au chapitre X, on tâchera de faire cette observation lorsque le soleil sera à peu près à la hauteur indiquée par la table XVIII.

Faisons maintenant une application de la formule 44, en ne nous assujétissant pas à observer la hauteur du soleil au premier, ou près du premier vertical, afin de mettre le lecteur dans le cas de mieux apprécier l'influence d'une erreur dans la latitude estimée, lorsqu'on n'a pas la précaution de suivre le procédé indiqué à l'article 242.

EXEMPLE. Le 2 juillet 1789, étant par 28° 19′ de latitude nord, on a observé à 4 heures 40 minutes d'une montre, la hauteur du soleil, laquelle étant corrigée, comme c'est enseigné à l'article 121, a donné pour hauteur vraie du centre de cet astre 26° 33′ 50″; sa distance au pôle élevé étoit, au moment de l'observation, de 67° 0′ 10″: on demande l'heure vraie du vaisseau pour l'instant où on a observé.

Type du calcul de la formule (44).

Lat. du vaisseau. . .	28° 19′ 0″.	com. ar. log cos.	0,0553499
Dist. pol. du ⊙. . .	67 0 10	com. ar. log. sin.	0,0359650
Haut. vraie du ⊙. . .	26 33 50 (*).		
Somme.	121 53 0		
½ somme.	60 56 30	log. cos.	9,6863679
½ som. — haut. vr. du ⊙	34 22 40	log. sin.	9,7517770
		Somme.	9,5294598
		½ somme.	9,7647299
		C'est le log. sin. du demi-angle horaire. . . .	35° 34′ 33″
		Multipliant par.	8
		On a l'heure vraie du vaisseau =	$4^h 44^m 36^s$

donc la montre retarde sur l'heure vraie du vaisseau de $4^m 36^s$.

(*) Si nous nous étions conformés à la règle enseignée à l'article 242, nous aurions dû, d'après la table XVIII, observer le soleil à peu près à 55° 43′ de hauteur, c'est-à-dire beaucoup plutôt que $4^h 44^m$.

L'on trouvera à la note XXII par les applications des formules (1, 5 et 6) de la même note, à l'exemple que nous venons de donner, quelle seroit sur le résultat du calcul, l'influence d'une erreur de 12 minutes dans la hauteur du centre, et de 10 minutes dans l'estime de la latitude du vaisseau.

M. Delalande a publié en 1793 des tables qu'il appelle *tables horaires*, et que M.[me] Le Français Delalande a calculées, par le moyen desquelles les navigateurs peuvent se dispenser du calcul de la formule 41. J'ai dit mon opinion sur ces tables dans l'*Art du calcul astronomique*.

244. Il est quelquefois très-utile en mer, de connoître l'heure juste que marquoit une montre à l'instant du passage du soleil au méridien du point où se trouve le vaisseau dans un instant déterminé. Pour y parvenir, on observe des *hauteurs correspondantes*, c'est-à-dire des hauteurs égales du soleil de part et d'autre du méridien, et ayant égard au changement en latitude et longitude du vaisseau, ainsi qu'au changement en déclinaison du soleil dans l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre l'observation du matin et celle de l'après-midi; on applique ces corrections avec les signes convenables, à la moitié de l'intervalle de temps en question; ce qui donne le temps à ajouter à l'heure marquée par la montre dans l'instant de la première observation, pour avoir l'heure juste que marquoit cette même montre à l'instant où le soleil passoit au méridien du point où se trouvoit le vaisseau au moment de la seconde observation.

Voici la règle de cette méthode dont nous développons la théorie à la note XXII (art. 4 et suiv.), et dans laquelle il n'est nécessaire de prendre les logarithmes qu'avec quatre chiffres décimaux.

Ajoutez ensemble les logarithmes du cosinus de l'angle horaire du soleil, de la cotangente de la distance polaire du même astre et de la cotangente de la latitude, le tout pour l'instant de la première observation; cette somme sera le logarithme de la tangente du premier arc subsidiaire, dont vous retrancherez 45 degrés; et ajoutant au logarithme sinus de cette différence, le logarithme de la tangente de la latitude, le complément arithmétique du logarithme sinus de l'angle horaire, le complément arithmétique du logarithme cosinus du premier arc subsidiaire, le logarithme de la différence des déclinaisons du soleil entre les deux momens de l'observation, enfin la quantité constante 9,8495; vous aurez le logarithme du nombre de secondes qu'il faudra ajouter ou ôter à l'heure donnée par le demi-intervalle, pour avoir l'heure vraie du midi, si le vaisseau n'avoit pas bougé de place. Mais, afin d'avoir égard au déplacement du vaisseau, vous calculerez la différence en latitude des points de départ et d'arrivée, en ajoutant au

logarithme cosinus de l'angle du rumb de vent celui du nombre de nœuds courus pendant l'intervalle de temps, ce qui donnera le logarithme du nombre de nœuds courus au nord ou au sud (éq. 62); et faisant entrer cette différence en latitude, comme correction à appliquer au résultat, vous calculerez ainsi qu'il suit :

Du double logarithme cosinus de l'angle horaire, vous retrancherez le logarithme tangente du premier angle subsidiaire déjà trouvé, ce qui vous donnera le logarithme de la tangente d'un second angle subsidiaire, que vous retrancherez de 45°; ensuite vous formerez la somme des logarithmes du sinus de la différence du second arc subsidiaire à 45°, de la cotangente de la distance polaire, de la différence en latitude réduite en secondes, à laquelle vous ajouterez encore les complémens arithmétiques des logarithmes du sinus de l'angle horaire du soleil et du cosinus du second angle subsidiaire, enfin la quantité constante 0,1505; ce qui vous donnera pour somme totale le logarithme de la correction à faire à la dernière heure trouvée du passage du soleil au méridien du point où s'est faite la première observation correspondante à la différence en latitude.

Enfin, calculant à l'ordinaire la différence en longitude du vaisseau, depuis le point où s'est faite la première observation jusqu'à celui où s'est faite la seconde (éq. 4) (art. 45), vous réduirez cette différence en temps, et vous l'ajouterez ou retrancherez de l'heure déjà trouvée, suivant que la route a été dans l'ouest ou dans l'est; ce qui donnera l'heure juste que marquoit la montre à l'instant du passage du soleil au méridien du point où s'est faite l'observation de la seconde hauteur correspondante du soleil.

Exemple. Le 22 mars 1798, étant par 52° de latitude nord et par 43° de longitude à l'ouest de Paris, on a observé dans l'instant où une montre à secondes marquoit $6^h 44^m$ du matin, que la hauteur du soleil étoit de 10° 1′.

A $5^h 21^m$ du soir marquées par la même montre, on a de même observé que la hauteur du soleil étoit de 10° 1′.

Dans l'intervalle des observations, on a fait 15 nœuds dans la direction de l'air de vent N E $\frac{1}{4}$ N du monde.

On demande l'heure juste que devoit marquer la montre à l'instant du passage du soleil au méridien du point d'arrivée.

Il est évident que si le vaisseau n'avoit pas changé de place depuis l'instant de la première observation, et que si le soleil avoit constamment couru sur le même parallèle pendant l'intervalle de temps écoulé entre les deux observations, on auroit l'heure demandée de la montre égale à celle $6^h 44^m$ qu'elle marquoit le

matin, plus le demi-intervalle de temps $5^h 18^m 30^s$, c'est-à-dire, qu'elle seroit $= 0^h 2^m 30^s$.

Mais la latitude du vaisseau a augmenté, sa longitude a diminué, ainsi que la distance polaire du soleil : il faut donc avoir égard à toutes ces variations; c'est ce qu'on fera de la manière suivante. L'angle du rumb de vent sur lequel le vaisseau a couru 15 nœuds, étant de 33° 45′, il est clair que le nombre de nœuds faits dans le nord est $= 15 \times \cos. 33°45 = 12,5$; ce qui donne pour latitude d'arrivée 32° 12′ 30″; d'où il est aisé de conclure, par le moyen de la table II et de l'équation 4 (art. 45), que la diminution en longitude est, à moins d'un dixième près, de 9′,8, ou environ 39^s en temps.

La longitude du vaisseau au moment de la première observation, étant de $2^h 52^m$ à l'ouest de Paris, il est clair que dans cet instant il étoit à Paris $9^h 36^m$: calculant la déclinaison du soleil pour cette heure-là, par les parties proportionnelles, on la trouve de 0° 48′ 24″ boréale; donc, dans l'instant de la première observation, on a la distance polaire D = 89° 11′ 36″.

De plus, on trouve dans la *Connoissance des temps* que la différence en déclinaison pendant les 24 heures correspondantes, est de 23′ 39″; d'où, par le moyen de la table XVI, on conclut que dans l'intervalle de temps $10^h 37^m$, elle doit être de $10^m 28^s$; donc, la distance polaire diminuant, cette différence $10^m 28^s$ ou 628^s devra être prise négativement. Cela posé, voici le type du calcul :

A l'instant de la première observat.

Ang. hor. ☉ . . .	79° 37′ 30″	log. cos.	9,2555.	. . . .	c. a. log. sin.	0,0072
Lat. du vaisseau.	32 0 0	log. cot.	0,2042.	. . . .	c. a.	9,7958
Dist. pol.	89 11 36	log. cot.	8,1486			
		Somme.	7,6083	log. tang. N = 0° 13′ 57″	c. a. log. cos.	0,0000
				45 0 0 —		
				Différence (— 44 46 3) . . .	log. sin.	9,8477
				Différence en distance polaire ☉ (— 628″)	log.	2,7979
				log. constant.		9,8495
					Somme.	2,2981

qui est le logarithme de 199″ ou 13^s, 3 de temps, quantité qui est additive, puisqu'elle se compose du produit de quantités positives et du produit des deux quantités négatives — sin. 44° 46′ 3″, et de la différence négative de la distance

polaire ; car, dans l'intervalle de temps, la déclinaison augmentant, la distance polaire diminue.

Donc, si dans l'intervalle de temps entre les deux observations, le vaisseau n'avoit pas changé de place, l'heure demandée de la montre auroit été $0^h\,2^m\,36^s + 13^s,3$, ou $2^m\,49^s,3$. Mais le vaisseau ayant, dans l'intervalle de temps, fait 12 nœuds et demi vers le nord, il faut avoir égard à la différence en latitude, ainsi qu'il suit :

Ang. hor. ⊙	79° 37′ 30″	2 log. cos.	8,5110 +	c. a. log. sin.	0,0072
Ang. N = . .	0 13 57	log. tang	7,6083 —		
Différence.			0,9027	log. tang de M = 82° 52′ 10″ c. a. log. cos.	0,9061
				45 0 0	
			Différence.	37 52 10. . . log. sin.	9,7881
			Distance polaire ⊙	89 11 36. . . log. cot.	8,1486
			Différence en latitude	750″ . . . log. . .	2,8751
				Log. const.	0,1505
				Somme.	1,8756

qui est le logarithme de 75″, ce qui fait en temps 5^s. Donc, cette correction étant négative, puisque $45° - 82° 52' 10''$ est un arc négatif, et que par conséquent son sinus est aussi négatif (*voyez* la for. 6 de la note XXII), il faudra retrancher de l'heure déjà trouvée $2^m\,49^s,3$ la quantité 5^s. Ainsi l'heure juste de la montre à l'instant du passage du soleil au méridien du lieu où l'on a fait la première observation, est $2^m\,49^s,3 - 5^s = 2^m\,44^s,3$. Mais le méridien passant par le point d'arrivée, est plus à l'est de 59^s en temps ; donc l'heure vraie de la montre à l'instant du midi, pour ce point-là, étoit de $0^h\,2^m\,44^s,3 - 59^s = 0^h\,2^m\,5^s,3$.

CHAPITRE HUITIÈME.

Des Méthodes dont on doit se servir en mer, pour déterminer la déclinaison de l'Aiguille aimantée, ou variation du Compas: et de la manière de trouver à quel air de vent du monde reste un objet terrestre, sans employer le Compas de variation.

245. Nous avons vu à l'article 56 que la ligne magnétique *nord-et-sud* n'est presque jamais dans la direction de la vraie ligne *nord-et-sud* du monde. Cette différence qui, comme nous l'avons dit, s'appelle *déclinaison de l'aiguille aimantée*, est on ne peut pas plus essentielle à connoître dans le cours de la navigation, puisque c'est le vrai air de vent du monde, et non celui marqué par la boussole, que l'on doit considérer dans les solutions de toutes les questions où la direction de la route du vaisseau entre comme l'une des données.

246. La déclinaison de l'aiguille aimantée, que les marins appellent plus souvent *variation du compas* ou *de la boussole*, est dite *nord-est*, lorsque le nord de la boussole décline du côté de l'est par rapport au nord du monde, c'est-à-dire, lorsque pour mettre la ligne *nord-et-sud* du compas dans la direction de la ligne *nord-et-sud* du monde, il faut faire tourner la rose des vents de l'est à l'ouest, en passant par le nord. Par la raison contraire, la variation est dite *nord-ouest*, ou simplement *noroi*, lorsque le nord de la boussole décline vers l'ouest, c'est-à-dire, lorsque pour mettre la ligne nord-et-sud du compas sur celle du monde, on est obligé de faire tourner la rose des vents de l'ouest vers l'est en passant par le nord; ou, ce qui revient au même, la variation est NE, lorsque le point où l'on auroit dû observer l'astre, est à la droite de celui où on l'a réellement observé, et elle est NO, lorsque le premier de ces points est à la gauche du second.

247. Non-seulement la déclinaison de l'aiguille diffère d'un point de la terre à un autre, c'est qu'encore elle varie dans un même point de la terre, et oscille autour du nord du monde suivant des lois régulières qui rendent les périodes de la déclinaison égales pour un même lieu. Par exemple, Burckhardt, célèbre astronome et membre de l'institut de France, a trouvé une formule qui représente

les déclinaisons de l'aiguille aimantée observées à Paris depuis 1580. Il en a conclu que pour cette capitale, la déclinaison oscille depuis 23 degrés à l'orient jusqu'à 30°, 4 à l'occident, et que la durée d'une oscillation est de 860 ans, ce qui fait environ 3′ 43″, 5 par an. Enfin, d'après les calculs de ce savant, la plus grande déclinaison 23° N E a eu lieu en 1018, et la plus grande déclinaison 30°, 4 N O aura lieu en 1878.

Cette déclinaison est à présent d'à peu près 22° N O. Au reste, l'on sait que les différences dans la densité de l'atmosphère en apportent quelques-unes dans la déclinaison de l'aiguille aimantée.

Les meilleures manières de déterminer la variation du compas lorsqu'on est en mer, sont les trois que nous allons enseigner dans ce chapitre.

248. La première est celle du calcul de l'amplitude des astres, et particulièrement du soleil, que l'on obtient en se servant de la formule

$$\sin. M = \frac{\sin. \delta}{\cos. L} \ldots\ldots (51) \text{ (art. 135)},$$

dans laquelle M représente l'amplitude vraie de l'astre, δ sa déclinaison et L la latitude vraie du vaisseau. Comparant cette amplitude vraie avec celle donnée par le relèvement de l'astre au moment de son lever ou de son coucher, la différence de ces deux amplitudes fera connoître la variation de l'aiguille aimantée. Si l'astre observé est le soleil (*), on le relèvera au compas de variation (art. 39), dans l'instant où le bord inférieur est à environ 16 ou 17 minutes au-dessus de l'horizon, qui sera celui du vrai lever du centre du soleil, puisque la réfraction astronomique fait paroître les objets qui sont réellement à l'horizon à environ 33′ au-dessus (art. 120).

Si l'amplitude calculée et l'amplitude observée sont de même dénomination, c'est-à-dire, toutes les deux nord, ou toutes les deux sud, la variation du compas sera la différence entre les deux amplitudes. Si au contraire les deux amplitudes sont de dénominations différentes, c'est-à-dire, si l'une est nord et l'autre est sud, alors la somme de ces deux amplitudes sera la variation demandée du compas.

(*) Pour que le résultat soit exact, il faut observer ce seul astre; car l'on a trop de peine à apercevoir les étoiles et planètes à l'instant où elles sont très-près de l'horizon; et les variations assez sensibles de la déclinaison de la lune dans des petits intervalles de temps, rendent les calculs moins exacts lorsqu'on ne connoît pas exactement la longitude du vaisseau.

Faisons quelques applications de cette méthode.

Exemples. I. Le 29 août 1798, étant par une latitude estimée de 42° 35′ N, et la déclinaison du soleil étant à l'instant de son coucher = 9° 7′, on a relevé cet astre au compas de variation, dans le moment où son bord inférieur étoit à environ 17′ au-dessus de l'horizon, et l'on a trouvé qu'il restoit à l'ONO 3° 57′ O du compas. On demande la déclinaison de l'aiguille aimantée.

Calcul de la formule 51 (art. 135 et 248).

Décl. ☉ 9° 7′ log. sin. 9,1998793 +
Lat. du vaisseau 42 35 log. cos. 9,8670512 —

Différence 9,3328281 qui est le log. sin. de l'ampl. vr. ☉ = 12° 25′ 35″ N.
Mais le compas de variation donne l'amplitude magnétique = 18 33 0 N.

Différence 6 7 25

Ce qui est la déclinaison de l'aiguille aimantée: et il aisé de voir qu'elle est NO; car le point où a été observé le soleil s'éloignant plus de l'ouest vers le nord, que celui où il auroit dû être observé, ce dernier point est à la gauche du premier. Donc la variation est NO (art. 246).

II. L'amplitude ortive du soleil, c'est-à-dire, celle qui a lieu à son lever, ayant été calculée par le moyen de la formule 51, de 32° 50′ vers le nord, on ne l'a trouvée par le relèvement au compas de variation, que de 20° 10′ vers le nord. On demande la variation du compas.

Les deux amplitudes étant de même dénomination, la variation est égale à la différence 12° 40′ des deux amplitudes, et puisque le point où auroit dû être relevé le soleil, est plus éloigné de l'est que celui où il a réellement été relevé, et que conséquemment le premier de ces points est sur la gauche du second, la variation est NO.

III. La vraie amplitude occase du soleil étant de 18° 20′ sud, et l'observée au compas de variation étant de 36° 10′ sud, on demande la variation.

Les deux amplitudes étant de même dénomination, la variation est égale à leur différence 17° 50′; et de plus il est aisé de voir qu'elle est N E, puisque le point où auroit dû être observé le soleil, étant plus rapproché du nord que celui où il a réellement été relevé, le premier de ces deux points est à la droite du second, et par conséquent la variation est NE.

IV. La vraie amplitude ortive du soleil ayant été trouvée par le calcul de

15° 10′ vers le nord, et l'observée étant de 5° 30′ vers le sud, on demande la variation du compas.

Les deux amplitudes étant de dénominations différentes, la variation sera égale à la somme 20° 40′ des deux amplitudes; de plus, le point où auroit dû être observé le soleil étant compris entre l'est et le nord, et celui où il a été observé sur le compas étant entre l'est et le sud, il est évident que le premier de ces deux points est à la gauche du second, et que conséquemment la variation est N O.

249. Remarque. Les erreurs de quelques minutes dans le calcul de la variation du compas étant très-peu considérables, puisqu'on ne porte l'exactitude dans l'estime de la direction de la route, et dans les relèvemens qu'à un demi-degré, ou tout au plus à un quart de degré, on peut regarder, comme sensiblement nulle, l'influence que doivent avoir sur le calcul de l'amplitude, les erreurs que l'on peut avoir commises dans l'estime de la latitude du vaisseau et de la déclinaison du soleil, au moment de l'observation. Au reste, on trouvera à la note XXIII, les formules de corrections, et les circonstances les plus favorables à cette méthode.

250. La méthode que nous venons de donner pour trouver la variation du compas par le moyen du calcul de l'amplitude vraie du soleil, est la plus simple et la plus exacte dont on puisse se servir; mais elle exige que l'horizon soit net lorsque le soleil s'y trouve. Or, il arrive très-souvent que des nuages qui sont à l'horizon, empêchent de voir cet astre jusqu'à ce qu'il se trouve à une certaine hauteur, ce qui rend impossible l'usage de la méthode précédente. Mais alors on trouve la variation par le moyen de l'azimut, en opérant de la manière suivante :

L'observation se fait par le concours de deux observateurs, dont l'un observe la hauteur de l'astre avec un octant ou un sextant, et l'autre relève le même astre au compas de variation. Il faut que les deux observations se fassent dans le même instant, et, pour cela, il faut que l'observateur du relèvement suive sans cesse l'astre jusqu'à ce que celui de la hauteur le prévienne par un mot convenu et court, tel que celui *stop*, dont on se sert lorsqu'on mesure la vitesse du vaisseau par le moyen du loch (art. 34), qu'il a ramené le bord inférieur du soleil à être tangent à l'horizon. Il est à propos, pour plus d'exactitude, 1.° de répéter plusieurs fois de suite cette opération simultanée, et le terme moyen des résultats donnera, pour l'instant moyen, considéré comme celui d'une observation unique, l'azimut magnétique, et la hauteur observée de l'astre pour cet instant. 2.° De ne pas attendre que l'astre observé soit trop élevé au-dessus de l'horizon,

car les relèvemens au compas de variation ne sont exacts, que lorsque l'objet relevé a peu de hauteur (art. 39). D'ailleurs, nous démontrons à la note XXIII que pour diminuer les influences des erreurs en latitude du vaisseau, et celles commises dans l'observation de la hauteur, il est à propos que cette hauteur soit petite.

251. Ayant la hauteur observée de l'astre, on aura aisément la vraie pour le même instant; donc, par le moyen de la formule

$$\cos. Z = \frac{\sin. E \sin. L - \cos. D}{\cos. E \cos. L} \ldots\ldots (49)\ (\text{art. } 134),$$

ou plutôt celle

$$\sin. \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2}(E + D + L) \cos. \frac{1}{2}(E + L - D)}{\cos. E \cos. L}} \ldots\ldots (50)\ (\text{art. } 134),$$

dans laquelle Z représente l'angle azimutal de l'astre, toujours compté depuis le méridien élevé (art. 134), D la distance polaire de l'astre, E sa hauteur vraie, et L la latitude du vaisseau; on aura le vrai angle azimutal du soleil, et cet angle comparé au magnétique observé, donnera la variation du compas dont la valeur sera la différence des deux azimuts, s'ils sont tous les deux du même côté du méridien élevé par rapport à l'*est* ou à l'*ouest*. Mais si les angles azimutaux sont de part et d'autre du méridien, alors la variation du compas sera égale à la somme des azimuts vrai et magnétique.

Exemple I. Le 4 juillet 1787, étant, d'après l'estime, par 30° 43′ de latitude nord, et 48° de longitude occidentale, on a observé une hauteur du soleil qui, toutes corrections faites, a donné pour la hauteur du centre 7° 43′; et, en même temps, on a relevé le soleil au compas, à l'O N O 5° 30′ N; ce qui donne l'azimut magnétique de 118°. On demande la variation du compas.

Calcul de l'équation 50.

Hauteur vraie ☉	7° 43′ 0″	com. ar. log. cos.	0,0039508
Latit. du vaisseau	30 43 0	com. ar. log. cos.	0,0656512
Distance pol. ☉	67 8 0		
Somme.	105 34 0		
½ Somme.	52 47 0.	log. cos.	9,7816339.
Dist. pol.—½ som.	14 21 0.	log. cos.	9,9862340
		Somme.	19,8374699
		½ Somme.	9,9187349 log. sin. ½ ang. azim. = 56° 1′ 50″
			Angle azimutal = 112 3 40
			Azimut. magnétique 118 0 0
			5 56 20

ce qui est la variation du compas : et de plus elle est NO; car, pour ramener le soleil au 112.e degré de la boussole, il faudroit faire tourner la rose de l'ouest vers l'est en passant par le nord (art. 246).

On trouvera, à la note XXIII, art. 4, les corrections que l'on devroit faire à ce résultat, en supposant une erreur en latitude de — 10′, une erreur en hauteur de 2′ et une erreur en déclinaison de — 1′.

II. Etant par une certaine latitude sud et par conséquent le méridien élevé passant par le nord, l'on a observé une hauteur du soleil qui a donné pour son vrai azimut, dans l'instant de l'observation, 50° vers l'ouest; mais le relèvement au compas de cet astre au même moment, a donné son azimut magnétique de 61° vers l'ouest : on demande la variation du compas et sa dénomination.

Les deux azimuts étant de même dénomination, la variation du compas est égale à leur différence 11°. Mais, pour ramener le soleil qui correspond au soixante et unième degré du nord vers l'ouest à ne correspondre qu'au cinquantième degré, il faudroit faire tourner la rose des vents de l'est vers l'ouest en passant par le nord; donc la variation du compas est de 11° NE (art. 246).

III. Par une certaine latitude nord, et par conséquent le méridien élevé passant par le sud, on a calculé que le vrai azimut du soleil est de 25° vers l'ouest; mais l'azimut magnétique a été trouvé de 10° vers l'est : on demande la variation du compas et sa dénomination.

Les deux azimuts étant de dénominations différentes, la variation est égale à

leur somme 35°; et puisque, pour ramener le soleil qui correspond au 10.° degré vers l'est, à correspondre au 25.° degré vers l'ouest, il faut faire tourner la rose de la boussole de l'est vers l'ouest, en passant par le nord, nous en conclurons que la variation du compas est de 35° NE.

252. L'on peut encore se servir pour le calcul de la variation de l'aiguille aimantée, de la méthode suivante, qui est simple et dans laquelle on peut, plutôt que dans les méthodes précédentes, employer les étoiles et même les planètes, mais avec la condition absolue, que la déclinaison de l'astre observé est de même dénomination que la latitude de l'observateur.

Cette méthode consiste à relever un astre au moment où il passe au premier vertical; l'angle que formera la ligne de relèvement avec la ligne *est-et-ouest* du compas de variation, est la variation demandée de ce compas, laquelle sera NO, si, pour ramener l'astre dans la direction de la ligne *est-et-ouest* du compas, on doit faire tourner la rose de l'ouest vers l'est en passant par le nord; et est NE lorsque, pour ramener l'astre observé dans la direction de la ligne E et O de la boussole, on est obligé de faire tourner la rose des vents de l'est vers l'ouest en passant par le nord.

Pour connoître le moment où l'astre passe au premier vertical, on calculera sa hauteur vraie, pour ce moment-là, par le moyen de la formule

$$\text{sin. E} = \frac{\text{sin.}\,\delta}{\text{sin.}\,L} \ldots\ldots (109),$$

que donne le triangle sphérique rectangle KGD, formé, 1.° par l'arc KD du premier vertical qui est, dans le moment en question, la hauteur E de l'astre; 2.° l'arc KG qui est la déclinaison δ de l'astre; 3°. l'arc GD de l'équateur compris entre le cercle de déclinaison PKG et le vrai point est ou ouest D: car, dans ce triangle rectangle en G on a l'angle KDG qui, évidemment, est égal à la latitude L, puisqu'il est le complément de celui QDH formé par l'équateur et l'horizon, qui est lui-même le complément de la latitude. Or, l'on a dans ce triangle, sin. KG : sin. KDG :: sin. DK : 1, ou sin. δ: sin. L :: sin. E : 1, d'où l'on tire l'équation (109). Ayant la hauteur vraie E de l'astre, on en déduira la hauteur observée, en y ajoutant la dépression de l'horizon, et la réfraction si c'est une étoile; et retranchant de ce résultat le demi-diamètre du soleil et la parallaxe de cet astre si c'est le soleil qu'on observe (art. 121). Quant à la lune, nous l'excluons toujours de ces sortes d'opérations, à cause de la rapidité de ses mouvemens qui compliqueroient trop les calculs si l'on vouloit obtenir une exactitude suffisante. Fig. 15.

La hauteur observée de l'astre étant connue pour le moment où il passe au premier vertical, on placera l'alidade de l'octant ou sextant à ce point de division ; et aux approches du moment où l'astre devra passer au premier vertical, les deux observateurs, savoir celui du relèvement au compas de variation et celui de la hauteur, suivront l'astre jusqu'à l'instant où le dernier de ces deux observateurs avertira l'autre par le mot *stop*, que l'astre est rendu à la hauteur où il doit se trouver à l'instant de son passage au premier vertical.

REMARQUE I. Il faudra éviter, lorsqu'on emploiera cette méthode, d'observer un astre qui, à son passage au premier vertical, est trop élevé au-dessus de l'horizon, à cause de l'inexactitude qui en pourroit résulter dans le relèvement.

II. Lorsque l'astre observé sera le soleil, ou une étoile dont la déclinaison n'excède pas 24 degrés, on pourra éviter le calcul de la formule (109), par le moyen de la table XVIII, qui donne la hauteur de ces astres lorsqu'ils passent au premier vertical (art. 242).

EXEMPLE. Étant par 40° de la latitude sud, et la déclinaison du soleil étant de 8° australe, on veut connoître la variation de la boussole par l'observation du relèvement du soleil au moment où il passe au premier vertical du côté de l'est.

La table XVIII donne, pour 8° de déclinaison du soleil et 40° de latitude du vaisseau, 12° 30′, ce qui est conséquemment la hauteur vraie que doit avoir le centre du soleil lorsqu'il est au premier vertical. Ajoutant à cette hauteur 4′ de réfraction, on a, à moins d'une minute près, la hauteur apparente du centre de 12° 34′; ajoutant à cette quantité la dépression de l'horizon que je suppose de 5′, et retranchant le demi-diamètre du soleil 16′, on a pour hauteur observée du bord inférieur 12° 23′. Plaçant l'alidade de l'octant ou sextant sur cette division du limbe, soit supposé que dans l'instant où l'observateur de la hauteur aperçoit que le bord inférieur du soleil est en contact avec l'horizon, celui du relèvement, relève cet astre à l'ESE du compas de variation ; on en conclura que la variation est de 22° 30′, ce qui est l'angle de la ligne de relèvement avec celle de la ligne E et O, et que de plus, cette variation est NO, puisque, pour ramener le soleil à l'est du compas, il faudroit faire tourner la rose de l'ouest à l'est, passant par le nord.

253. Lorsqu'à la mer et en vue de terre, on veut connoître à quel air de vent reste un objet terrestre, trop élevé pour que l'on puisse le relever avec une exactitude suffisante au compas de variation, on opérera de la manière suivante :

Deux observateurs observeront respectivement et simultanément la hauteur

du sommet de l'objet terrestre, que je suppose être une montagne et le bord inférieur du soleil. Un troisième observateur observera dans le même instant, avec un cercle de réflexion ou avec un sextant, s'il n'a pas le premier de ces deux instrumens, la distance angulaire du sommet de la montagne avec le bord le plus voisin du soleil; cette observation finie, on en conclura les hauteurs apparentes du sommet de la montagne et du centre du soleil, ainsi que la distance apparente de ces deux points, ce qui donnera un triangle sphérique dont les deux côtés adjacens au zénith seront les complémens des deux hauteurs apparentes, et dont le troisième côté est la distance apparente : donc, représentant par Z' l'angle au zénith, c'est-à-dire, celui qui mesure la différence d'azimut du soleil et de la montagne; par E' la hauteur apparente du centre du soleil; par H' la hauteur apparente du sommet de la montagne, et par Δ la distance apparente de deux points observés, on aura

$$\cos. Z' = \frac{\cos. \Delta - \sin. E' \sin. H'}{\cos. E' \cos. H'} \ldots\ldots (110),$$

d'où

$$\cos. \tfrac{1}{2} Z' = \sqrt{\frac{\cos. (E'+H') + \cos. \Delta}{2 \cos. E' \cos. H'}},$$

ou

$$\cos. \tfrac{1}{2} Z' = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2}(E'+H'+\Delta) \cos. \frac{1}{2}(E'+H'-\Delta)}{\cos. E' \cos. H'}} \ldots\ldots (111).$$

Cette équation donnant la différence d'azimut entre le soleil et la montagne, on aura aisément l'azimut de la montagne, et par conséquent l'air de vent du monde auquel elle reste dans le moment de l'observation; puisque, par le moyen de l'équation 50 (art. 134 et 251), on pourra trouver l'azimut vrai du soleil pour le même moment.

Exemple. Le 25 avril 1787, à $7^h\frac{1}{2}$ du matin, étant par une latitude estimée de 28°6' sud, et par une longitude de 19°30' à l'ouest de Paris, on a pris une hauteur du bord inférieur du soleil de 11°42'; en même temps, un second observateur a mesuré avec un cercle de réflexion, ou avec un octant, la distance apparente entre le sommet d'une montagne vue dans l'éloignement, et le bord le plus voisin du soleil : cette distance s'est trouvée de 46° 19'. La hauteur apparente de la montagne a été observée de 4°5', et elle étoit du côté du sud par rapport au soleil. Enfin les observateurs étoient élevés de 5 mètres 2 décimètres

au-dessus du niveau de la mer : on demande l'azimut de la montagne, ou l'air de vent auquel on l'a relevée.

Hauteur observée du ☉	11°	42′	0″
Dépression de l'horizon à retrancher		4	0
Différence.	11	38	0
Demi-diamètre à ajouter.		15	56
Somme qui est la hauteur apparente ☉	11	53	56
Réfraction à retrancher		4	24
Différence qui est la hauteur vraie du centre du soleil	11	49	32
Distance mesurée de la montagne au bord le plus voisin du soleil .	46	19	0
Demi-diamètre du ☉ à ajouter.		16	0
Distance apparente du soleil à la montagne.	46	35	0
Hauteur observée de la montagne	4	5	0
Dépression de l'horizon à retrancher		4	0
Différence qui est la hauteur apparente de la montagne	4	1	0

On trouve, par le moyen de *la Connoissance des Temps*, que la déclinaison du soleil est, au moment de l'observation, de 13° 13′ boréale, et par conséquent sa distance au pôle élevé, de 103° 13′; d'où l'on conclura, en se servant de la formule (60), que l'azimut du soleil, toujours pris depuis le méridien élevé, est de 67° 52′. Cela posé, voici le calcul de la différence d'azimut entre le soleil et la montagne (for. 111).

Dist. app. du ☉ à la montagne . . .	46°	35′		
Haut. appar. du ☉	11	54	com. ar. log. cos.	0,0094352
Haut. appar. de la montagne	4	1	com. ar. log. cos.	0,0010681
Somme.	62	30		
Demi-somme.	31	15	. . . . . . log. cos.	9.9319213
Dist. app. — ½ som.	15	20	. . . . . log. cos.	9.9842589
			Somme.	19.9266835
			Demi-somme.	9.9633417 qui est le log.

cosinus de la demi-différence d'azimut	23° 13′
Donc différence d'azimut entre le soleil et la montagne	46 26 }
Azimut du soleil.	67 52 }
Somme.	114 18

qui est l'azimut de la montagne. Donc, dans le moment de l'observation, la montagne restoit à l'est 24° 18′ sud, ou ES E 1° 48′ S.

Cette méthode, pour déterminer le gissement de deux points vus à terre, et par conséquent, la vraie position du vaisseau dans le moment de l'observation, étant beaucoup plus exacte que celle du relèvement au compas de variation, on devra s'en servir toutes les fois que l'on voudra obtenir beaucoup de précision, quoiqu'elle soit beaucoup plus compliquée et difficile que celle des relèvemens.

CHAPITRE NEUVIÈME.

Premières notions sur quelques manières de calculer exactement la longitude en mer.

TROUVER exactement la latitude du vaisseau par les méthodes enseignées aux chapitres IV et V, n'est que résoudre en partie le problème dont la solution exacte est l'objet de cet ouvrage. Il nous reste donc, afin de résoudre complètement le problème, à déterminer, d'une manière exacte, la longitude du vaisseau pour le moment même où l'on connoît déjà sa vraie latitude. Or, parmi les moyens que l'on a proposés avant celui dont on se sert uniquement à présent, et que nous développerons avec détail dans le chapitre suivant, voici les principaux que nous examinerons succinctement dans ce chapitre, afin d'en venir plutôt à la méthode des distances, qui est le sujet du chapitre X.

254. Si la déclinaison de l'aiguille aimantée étoit constante pour un même lieu de la terre, ou si ses variations se faisoient suivant une certaine loi qui pût s'exprimer, par une formule analytique, en fonctions des latitude et longitude géographiques du lieu de la terre pour lequel on calcule, ainsi qu'en fonctions de certains mouvemens ou positions des astres qui seroient donnés par les ta-

bles astronomiques ; alors tirant de cette formule la valeur de la longitude géographique qui, conséquemment, seroit toute en quantités données, puisque l'on sait trouver exactement la latitude géographique, on auroit, théoriquement parlant, la solution du problème, objet unique de l'art nautique ; mais, comme dans cette opération, il faudroit déterminer la déclinaison de l'aiguille aimantée au moyen du calcul de l'azimut vrai et de l'observation de l'azimut magnétique ; ce qu'il n'est guère possible de faire, à moins de 20 ou 30 minutes d'erreur, il en résulteroit une fort grande sur le calcul de la longitude. Cet inconvénient, qui rendroit déjà la méthode très-inexacte, doit nous donner moins de regret que la formule en question n'existe pas, et que les cartes sur lesquelles on avoit tracé les courbes de déclinaison, d'après les observations des navigateurs, soient devenues, par la variation qu'ont éprouvée ces courbes depuis ces temps-là, si fautives, qu'elles seroient plutôt nuisibles qu'utiles aux marins. Ainsi cette manière de déterminer la longitude du vaisseau est tout à fait mauvaise, et doit être rejetée.

255. La méthode la plus simple dont on pourroit se servir pour déterminer la longitude en mer, seroit d'avoir une montre dont la marche fût absolument régulière ; car, réglant cette montre sur l'heure du port d'où l'on partiroit, ou plutôt sur l'heure de Paris, ce que l'on peut toujours faire si l'on connoît avec exactitude la longitude du port d'où l'on part, on n'auroit, lorsque l'on veut déterminer la longitude en mer, qu'à calculer l'heure vraie du vaisseau (chap. VII), réduire cette heure vraie en temps moyen, ce qui peut toujours se faire avec une exactitude suffisante par l'estime de la longitude du vaisseau, et l'indication du temps moyen au midi vrai pour le jour où l'on calcule, que l'on trouve à la seconde page de chaque mois dans la *Connoissance des Temps* ; ensuite comparer cette heure en temps moyen avec celle marquée par la montre en question, dans l'instant de l'observation qui a servi à trouver l'heure vraie du vaisseau ; cette différence en temps convertie en degrés, à raison de 15 degrés par heure, donneroit évidemment la longitude, laquelle seroit orientale ou occidentale, suivant que l'heure moyenne du vaisseau avanceroit ou retarderoit sur celle de la montre, c'est-à-dire, sur celle de Paris.

Quelqu'impossible qu'il paroisse de pouvoir construire des montres d'une si grande perfection, cependant l'horlogerie a fait, de nos jours, de si grands progrès par l'ingénieuse industrie des célèbres artistes *Berthould* et *Leroi*, que l'on est parvenu à réaliser en partie ce que nous n'avons énoncé précédemment que comme une simple supposition ; et plusieurs navigateurs dont les noms honore-

ront toujours la partie nautique de l'histoire de la marine, tels que les Fleurieu, Borda, etc., se sont servis dans leur voyage de ces *horloges* et *montres marines*, que l'on appelle encore *garde-temps*, et qui sont parvenus à un plus grand degré de perfection, que dans le temps où les marins que nous venons de citer s'en servoient.

256. Pour vérifier l'exactitude de ces montres marines, et la quantité de mouvement en retard ou en avance qu'elles ont dans un temps déterminé, on peut se servir de la méthode des hauteurs correspondantes (art. 244), et, encore mieux, de la suivante, lorsqu'on est à terre.

On fixera d'une manière solide, et autant que possible à l'abri du vent, une bonne lunette d'environ 15 décimètres, vers un endroit du ciel où l'on saura que doit passer une étoile de première ou seconde grandeur, et observant pendant plusieurs jours de suite l'heure exacte que marque le *garde-temps* dans l'instant où l'étoile passe par un ou plusieurs fils placés au foyer de la lunette, on verra si les intervalles de temps d'une observation à l'autre marqués par la montre, sont exactement d'un jour sidéral $23^h 56^m 4^s$ (art. 83); et dans ce cas-là on sera sûr de l'exactitude de la montre. Mais, dans le cas contraire, on notera la différence du vrai jour sidéral à celui marqué par la montre; ce qui pourra faire connoître, après un certain nombre d'observations semblables, la loi des variations du garde-temps. Cela bien connu, on pourra s'en servir avec autant d'avantage que si son mouvement étoit parfaitement uniforme, puisque les variations étant connues, on aura, après les réductions convenables, la vraie heure moyenne de Paris (*).

257. Mais tout ouvrage mécanique sorti des mains de l'homme, ne pouvant qu'être imparfait et susceptible de dégradation, abandonnons ces montres, ou du moins ne nous en servons que comme de moyens secondaires pour trouver la longitude, et cherchons-en d'autres dans les mouvemens parfaits et inaltérables des corps célestes. Ceux qui paroissent au premier aspect devoir le mieux remplir l'objet que l'on se propose, sont les observations des éclipses de soleil et de lune. Mais ces phénomènes instantanés se présentent trop rarement pour qu'on puisse les regarder comme une ressource pour les marins. D'ailleurs, afin que ces observations, surtout celles d'éclipses de lune, soient exactes, il faut les faire avec un soin qu'il n'est guère possible aux marins de pouvoir donner à

(*) *Voyez*, pour avoir de plus grands détails sur cet objet, les *Voyages de Fleurieu* et *de Borda*.

leurs opérations astronomiques, à cause de la mobilité continuelle du vaisseau.

Il en est de même pour les occultations des étoiles par la lune et les éclipses des satellites de Jupiter, que l'on ne peut guère observer qu'avec un télescope, instrument qui, comme on le sait, ne peut servir que dans l'état de la plus grande immobilité. Ainsi, tous ces moyens astronomiques, qui sont excellens pour déterminer les longitudes géographiques, lorsqu'on est à terre, sont à peu près inutiles aux marins. Heureusement que par une autre opération astronomique, dont nous allons parler dans le chapitre suivant, l'on est enfin parvenu à pouvoir déterminer d'une manière suffisamment exacte la longitude du vaisseau.

CHAPITRE DIXIÈME.

Du Calcul de la longitude en mer par la mesure de la distance angulaire de la Lune au Soleil, ou à une Étoile.

258. Les moyens pour obtenir la longitude de vaisseau dont nous avons parlé dans le chapitre précédent, ne remplissant pas toujours d'une manière suffisante l'objet que l'on se propose, on a mis à profit l'idée extrêmement heureuse qu'eut le premier, *Reineras-Gemma*, médecin hollandois (*), de considérer une distance de la lune, dont les mouvemens sont très-rapides, au soleil ou à une étoile, comme un phénomène instantané dont la comparaison des temps pour deux lieux différens, donne la différence en longitude de ces mêmes lieux. Ainsi, la longitude de l'un de ces lieux étant connue, on aura celle de l'autre. Cette idée fut perfectionnée par *Longamantanus* (**) et surtout par *Morin* (***), enfin par

(*) Il naquit à Dockum, ville de la Frise dans l'Ostergow, en 1508, écrivit plusieurs ouvrages d'astronomie, qui eurent de la réputation, et mourut à Louvain, en 1555.

(**) Ou *Christian Sévérini*, fils d'un laboureur de Danemarck, naquit en 1562, et mourut en 1647 à Copenhague. L'on a de lui des tables astronomiques et plusieurs ouvrages d'astronomie, il est aussi auteur d'un système planétaire, qui est une modification de celui de Ticho-Brahé.

(***) *Jean-Baptiste Morin*, né à Villefranche en Beaujolois, le 23 février 1583, fut professeur

plusieurs autres astronomes. Mais cette méthode n'a pu acquérir le degré d'exactitude auquel elle est parvenue, et qui la rend si utile aux marins, que de nos jours où Borda a perfectionné le cercle de réflexion qui sert à déterminer avec beaucoup de justesse les distances angulaires, et où les sublimes théories de l'auteur de la *Mécanique céleste* et l'usage qu'en ont fait les savans Delambre, Burg, ont produit ces célèbres tables astronomiques que le bureau des longitudes vient de publier, et dans lesquelles les astronomes peuvent trouver tout ce qui doit contribuer à la justesse et à la facilité de leurs calculs. De là résulte la précision si essentielle qui existe dans les tables des distances vraies pour Paris de la lune au soleil ou aux étoiles (*Connoissance des Temps*, pages 9, 10, 11 et 12 de chaque mois.)

259. Avant de donner tous les développemens nécessaires à la méthode, voici sommairement en quoi elle consiste :

On observe, étant en mer, les hauteurs de la lune et du soleil ou d'une étoile, ainsi que les distances des bords les plus voisins des astres observés ; on en conclut les distances apparentes des deux astres au zénith et la distance apparente des astres ; on peut donc, dans le triangle sphérique formé par ces trois distances apparentes, trouver l'angle au zénith formé par les deux verticaux des astres dans l'instant de l'observation. Ensuite, corrigeant les distances apparentes au zénith, pour avoir les vraies ; ce qui n'altère en rien la différence d'azimut des astres déjà trouvée, puisque les corrections ne sont que dans le sens vertical, on aura un nouveau triangle sphérique formé par les vraies distances des deux astres au zénith et leur vraie distance respective, dans lequel on connoît deux côtés et l'angle compris, qui est la différence d'azimut ; donc on pourra connoître le troisième côté, c'est-à-dire, la distance vraie à l'instant de l'observation. La hauteur vraie d'un seul de ces astres, donne l'heure vraie du vaisseau pour le même instant (art. 127, 241) ; et comparant cette heure-là avec celle de Paris, pour l'instant où la distance vraie des deux astres étoit la même que celle trouvée sur le vaisseau, la différence des heures donne la différence en longitude de Paris et du vaisseau, et par conséquent on a la longitude demandée.

Mais, au lieu de résondre séparément les deux triangles sphériques que nous venons de considérer, nous observerons que l'angle au zénith se trouvant dans

de mathématiques au collège royal ; il devint célèbre par son livre sur la science des longitudes, dont la première partie parut en 1634. C'est lui qui, le premier, appliqua des lunettes aux instrumens astronomiques. Il mourut en 1656.

les formules de solutions des deux triangles, on peut éliminer cette quantité, et il ne restera plus qu'une formule entre les deux distances vraies et les deux distances apparentes des astres observées au zénith de l'observateur, enfin les distances apparente et vraie des deux astres, d'où l'on conclura la valeur de cette dernière quantité. C'est de la manière dont se fait cette élimination et des différentes formes que l'on peut donner aux produits et sommes des fonctions trigonométriques, que résultent un grand nombre de formules différentes qui donnent d'une manière plus ou moins simple, l'expression d'une fonction trigonométrique de la distance vraie en fonctions trigonométriques des quantités connues par l'observation. Mais de toutes ces formules, que chaque géomètre a variées à son gré, il suit, d'après un examen réfléchi, que le grand géomètre qui nous a procuré l'instrument avec lequel nous pouvons mesurer d'une manière si exacte les distances angulaires, est aussi celui dont la formule des réductions de distances est la plus simple. Ainsi, au lieu de compliquer la théorie suivante d'un échafaudage inutile de calculs, qui ne tendroit qu'à rebuter beaucoup de nos lecteurs, nous ne donnerons et ne démontrerons que la formule de Borda; ceux qui voudront connoître une grande partie des équations purement trigonométriques dont on peut se servir pour réduire les distances apparentes en vraies, pourront lire les écrits de MM. *Lévêque* (*Connoissance des Temps*, de 1798) et *Callet* (*Supp. à la Trig. sphé. et à la Nav. de Bezout*); ils pourront même, s'ils le désirent, en trouver d'autres en partant du même principe que celui qui a servi à obtenir celles déjà connues, d'où elles découlent toutes. Au reste, voici la démonstration de la formule de Borda.

260. Soit HO l'horizon

Fig. 45.

				Notation
HL, OS	la hauteur apparente	de la lune.		a
		du soleil ou de l'étoile.		b
HL′, OS′	la hauteur vraie	de la lune.		α
		du soleil ou de l'étoile.		β
d'où LS, L′S′	est la distance	apparente	des deux astres observés	D
		vraie		x

Les triangles sphériques LZS, L′ZS′ donnent respectivement les équations $\cos. Z = \frac{\cos. LS - \cos. ZL \cos. ZS}{\sin. ZL \sin. ZS}$, $\cos. Z = \frac{\cos. L'S' - \cos. ZL' \cos. ZS'}{\sin. ZL' \sin. ZS'}$: mais mettant dans ces formules les symboles qui représentent les arcs, et faisant attention que $ZL = 90° - a$, $ZS = 90° - b$, $ZL' = 90° - \alpha$ et $ZS' = 90° - \beta$, on aura les deux

équations $\cos. Z = \frac{\cos. D - \sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b}$, et $\cos. Z = \frac{\cos. x - \sin. \alpha \sin. \beta}{\cos. \alpha \cos. \beta}$. Or, on sait que $\sin. a \sin. b = \cos. a \cos. b - \cos. (a+b)$, et $\sin. \alpha \sin. \beta = \cos. \alpha \cos. \beta - \cos. (\alpha + \beta)$; donc $\cos. Z = \frac{\cos D - \cos. a \cos b + \cos. (a+b)}{\cos. a \cos. b} = \frac{\cos. D + \cos. (a+b)}{\cos. a \cos. b} - 1$, et $\cos. Z = \frac{\cos. x + \cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta} - 1$, donc $\frac{\cos. x + \cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta} = \frac{\cos. D + \cos (a+b)}{\cos. a \cos. b}$ $= \frac{2 \cos \frac{1}{2} (D + a + b) \cos. \frac{1}{2} (a + b - D)}{\cos. a \cos. b}$, mais $\cos. x = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} x$, et $\cos. (\alpha + \beta) = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$; donc, $1 - \sin.^2 \frac{1}{2} x - \sin.^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ ou $\cos.^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) - \sin.^2 \frac{1}{2} x = \frac{\cos. \alpha \cos. \beta \cos. \frac{1}{2} (D + a + b) \cos. \frac{1}{2} (a + b - D)}{\cos. a \cos b}$, d'où, représentant par S la somme $a + b + D$ des hauteurs apparentes des deux astres et de leur distance apparente, on tire Fig. 45.

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} x = \cos.^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) - \frac{\cos. \alpha \cos. \beta \cos. \frac{1}{2} S \cos. (\frac{1}{2} S \backsim D)}{\cos a \cos. b} \ldots\ldots (112),$$

ce qui est la formule dont Borda est l'auteur, et que ce géomètre soumet au calcul logarithmique, en observant qu'elle peut être mise sous la forme suivante,

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} x = \cos.^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\cos. \alpha \cos. \beta \cos. \frac{1}{2} S \cos. (\frac{1}{2} S \backsim D)}{\cos. a \cos. b \cos.^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}\right);$$

donc, faisant

$$\sin. A = \frac{\sqrt{\left(\frac{\cos. \alpha \cos. \beta \cos. \frac{1}{2} S \cos. (\frac{1}{2} S \backsim D)}{\cos. a \cos. b}\right)}}{\cos. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} \ldots\ldots (113),$$

on aura

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} x = \cos.^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos.^2 A,$$

d'où

$$\sin. \tfrac{1}{2} x = \cos. \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos. A \ldots\ldots (114).$$

261. Ces formules (113, 114) réunissent à la plus grande simplicité possible dans cette espèce de calcul, l'avantage de résoudre le problème, quelles que soient les hauteurs et distances apparentes des deux astres observés : car a, b, α et β étant toujours des quantités plus petites que 90°; la valeur de sin. A ne pourroit être imaginaire, qu'en tant que la somme S des hauteurs apparentes HL, OS, et distance apparente LS des deux astres observés, seroit $> 180°$, ce qui est impossible; car, dans le triangle sphérique ZLS, on a $LS < ZL + ZS$; donc $LS + 180° < ZL + ZS + 180°$, ou $LS + 90° - ZL + 90° - ZS < 180°$, d'où $LS + HL + OS$, ou $S < 180°$; donc $\cos. \frac{1}{2} S$ est toujours positif; et par conséquent sin. A est toujours réel.

Les formules 78 et 79, que j'ai démontrées dans l'*Art du Calcul astronomique des Navigateurs*, réunissent à peu près les mêmes avantages que celles de Borda, mais il y a une soustraction d'arcs de plus, ce qui rend le calcul tant soit peu plus compliqué.

262. Ayant calculé par le moyen des formules (113 et 114) la distance vraie des deux astres observés dans l'instant de l'observation, on cherchera dans la *Connoissance des temps*, ou par la méthode que nous enseignerons au chapitre XI, deux distances vraies des mêmes astres relativement à l'observatoire de Paris, et à trois heures d'intervalle l'une de l'autre, de manière que l'une soit plus grande et l'autre plus petite que la calculée x, d'après l'observation faite sur le vaisseau. Cela fait, nommant p la première de ces deux distances pour Paris, q la seconde, et t le temps qui doit s'écouler entre l'heure vraie de Paris à laquelle la distance étoit p, jusqu'à celle où la distance, relativement à la même ville, sera celle x calculée d'après l'observation, on fera la proportion $p \backsim q : p \backsim x ::$ 3^h ou $10800^s : t$; donc $t = \frac{10800^s(p \backsim x)}{p \backsim q}$, ou à cause que t est toujours positif, puisque, lorsque les distances augmentent, c'est-à-dire, lorsque $p < q$, on a aussi $p < x$; on aura

$$t = \frac{10800^s(x-p)}{q-p} \ldots\ldots (115).$$

263. Pour rendre plus sensible à tous nos lecteurs l'usage de la méthode que nous venons d'enseigner, nous allons, comme l'a fait Borda, l'appliquer à un exemple qui sera le même que celui donné par ce géomètre.

Le 26 avril 1787, à cinq heures du soir, étant par 16° 10′ de latitude nord, et par 27° de longitude estimée à l'ouest de Paris, le thermomètre centigrade marquant 25°, et le baromètre étant à 0,752 : trois observateurs ont fait les observations suivantes des distances de la lune au soleil, et des hauteurs de ces deux astres sur l'horizon.

Hauteurs du bord inférieur ☉.	Hauteurs du bord inférieur ☾.	Angle total marqué par le cercle de réflexion.
19° 14′ 30″	43° 42′ 0″	
19 5 0	43 52 0	
18 51 0	44 5 0	696° 53′
18 33 0	44 23 0	
18 7 30	44 39 0	
18 4 30	44 51 30	

Les observations des hauteurs ont été faites à 5 mètres au-dessus du niveau de la mer.

L'observateur qui mesuroit les distances des deux astres, a eu l'attention de remarquer, à chaque observation, le point du champ de la lunette où il apercevoit le contact, et il en conclut les déviations suivantes :

	Déviations.
Première observation	20
Deuxième	40
Troisième	0
Quatrième	35
Cinquième	15
Sixième	25

Enfin, il avoit été reconnu, par une vérification faite à terre, pareille à celle qui est expliquée à l'article 191, que le grand miroir n'avoit pas ses surfaces exactement parallèles, et que, dans la mesure d'un angle de 95°, il donnoit 12″ de trop : on demande de conclure de ces observations la longitude du vaisseau.

Réduction des observations à trois observations simultanées.

On divisera par 6 les sommes des six hauteurs observées de chaque astre, ainsi que l'angle total des six distances données par le cercle de réflexion, et on aura les trois observations simultanées suivantes :

Hauteur moyenne du bord inférieur du ☉	18°	40′	55″
Hauteur moyenne du bord inférieur de la ☾	44	15	25
Distance moyenne observée ☉ ☾	116	8	50

Parallaxe horizontale ☾, *et demi-diamètre pris dans* la Connoissance des Temps.

Pour trouver la parallaxe de la lune, je remarque qu'il étoit 5 heures du soir à bord du vaisseau, lorsqu'on a fait l'observation, et que le vaisseau étoit à 27°, ou, en temps, à $1^h 48^m$ à l'ouest de Paris; par conséquent il étoit $6^h 48^m$ à Paris.

On cherchera donc la parallaxe de la lune pour le 26 avril, à $6^h 48'$, et on trouvera	56′	56″
On trouvera aussi, pour la même heure, le demi-diamètre de la ☾	15	32
Et ajoutant l'augmentation pour 44° de hauteur (tab. VI)		11
on aura le demi-diamètre corrigé	15	43
Enfin, on aura le demi-diamètre du soleil pour le 26 avril	15	56

Fig. 38.

Distance apparente des centres et hauteurs apparentes, ainsi que les vraies de chaque astre.

Distance observée des deux bords des disques	116°	8′	50″
Ajoutant le demi-diamètre du ☉		15	56
Et le demi-diamètre corrigé de la ☾		15	43
On aura une première distance apparente	116	40	29

Mais il faut corriger cette distance des erreurs de la déviation et du défaut de parallélisme qu'on a supposé dans les surfaces du grand miroir.

D'abord la table XIV donnera les corrections des déviations, comme il suit :

On y trouvera pour l'angle observé de 116°, et pour la première déviation supposée de 20′			11″
Pour la deuxième de 40′			45
Pour la troisième de 0			0
Pour la quatrième de 35′			35
Pour la cinquième de 15′			6
Pour la sixième de 25′			17
Somme.			114
Dont la sixième partie est			19″
Première distance apparente . .	116°	40′	29
Prenant la différence, parce que l'effet de la déviation est toujours de donner des angles trop grands, il restera	116	40	10

Pour avoir l'erreur du grand miroir, qui convient à l'angle mesuré de 116°, nous nous servirons de la table XIII; or, par les données du calcul, on a supposé que ce miroir donnoit 12″ de trop pour l'angle mesuré de 93°; mais, dans la table XIII (troisième colonne) on a pour 93° l'erreur 35″; et pour 116°, elle est de 1′ 16″ (*). On fera donc la proportion 35 : 76 :: 12 est à un quatrième terme, qu'on trouvera = 26″, ce qui est la correction qui convient à 116°; ainsi, le

(*) Nous avons trouvé 1′ 16″, en supposant que les quantités qui sont dans la troisième colonne croissent proportionnellement, c'est ce qui n'est pas exactement vrai; ainsi, pour opérer rigoureusement, il faudroit avoir égard, au moins, aux secondes différences, et alors on trouveroit, comme Borda, 74″ au lieu de 76″; mais à cause que ce calcul seroit trop long, et que le dernier résultat ne différeroit pas sensiblement de celui obtenu par le calcul rigoureux, il suit que l'on peut se servir des parties proportionnelles.

miroir donnant les angles trop grands, il faudra retrancher de la distance apparente déjà trouvée. . . . . — 116° 40′ 10″
ces 26

et il restera la distance apparente corrigée 116 39 44
Hauteur observée du bord inférieur du soleil. 18 40 55
retranchant la dépression de l'horizon pour 5 mètres de haut. (tab. IV). 4 19

Il reste. 18 36 36
Ajoutant le demi-diamètre du ☉ 15 56

On aura la hauteur apparente du centre du soleil. 18 52 32
ou plus simplement (note XXIV, article 3). 18 52 30
La réfraction pour 18° 53′ est de . . . . 165″ (*Conn. des temps* de 1808)
Pour 25° du thermomètre et 0,752 du baromètre (tab. VIII). . . 0,943

1485
66
5

155,6
Parallaxe du soleil pour 19° de haut. (tab. XV). 8

Différence. 147,6. . . . . 2′ 28″

Différence qui est la hauteur vraie ☉. 18 50 2
Hauteur observée du bord inférieur de la lune. 44 15 25
Dépression pour 5 mètres d'élévation (tab. IV). 4 19

Différence. 44 11 6
Ajoutant le demi-diamètre corrigé de la lune. 15 43
On aura la hauteur apparente du centre de la lune. 44 26 49
ou plus simplement (note XXIV, article 5). 44 26 50
Parallaxe horizontale ☾. 56′ 56″ log. sin. 8,2190729
Hauteur apparente. . . . 44 26 50 log. cos. 9,8536348

Somme. 8,0727077 log. sin. parallaxe haut. ☾ 0 40 39

Somme. 45 7 29

Réfraction pour 44° 26′. . . . . 58″
Pour 25° du thermomètre et 0,752 du baromètre (tab. VIII) 0,943

7544
4715

54,694. . . . . 55—

Différence qui est la hauteur vraie du centre ☾ 45° 6′ 34″

Réduction de la distance apparente à la vraie (formules 113 et 114).

Dist. app. ☉ ☾.	116° 39′ 40″		
Haut. app. ☉...	18 52 30	com. ar. log. cos.	0,0240048
Haut. app. ☾...	44 26 50	com. ar. log. cos.	0,1463652
Somme.	179 59 0		
½ somme.	89 59 30	log. cos.	6,1626961
Dist. — ½ somme.	26 40 10	log. cos.	9,9511484
Haut. vraie ☉	18 50 2	log. cos.	9,9761016
Haut. vraie ☾	45 6 34	log. cos.	9,8486539
Somme.	63 56 36	somme.	36,1089700
		½ somme.	18,0544850
½ somme.	31 58 18	log. cos.	9,9285546
		log. cos. A	9,9999610
		Somme.	9,9285156

diff. 8,1259304 qui est le log. sin. de A
A = 0° 45′ 57″.

C'est le log. sinus de la demi-distance.	58 1 12
Distance. . .	116 2 24
Restituant la quantité supprimée. . . .	4
On aura pour distance vraie ☉ ☾. .	116 2 28

Calcul de l'heure de Paris, (formule 115).

Distance réduite trouvée ci-dessus. . .		116° 2′ 28″
Distances prises dans *la Conn. des temps*	première à 6h	115 39 5
	seconde à 9	117 9 9

diff. 1403″	log.	3,1470577
diff. 5404	com. ar. log.	6,2672847
	log. const.	4,0334238
	Somme	3,4477662

qui est le logarithme de 2804, donc $t = 0^h\,46^m\,44^s$
Heure pour Paris de la dist. qui précède = 6 0 0

Donc, heure vraie de Paris. 6 46 44

Calcul de l'heure vraie du vaisseau.

Commençons par calculer la distance polaire du soleil.

Déclinaison du soleil le 26 avril à midi. . .	13° 34′ 31″ bor.
Et le 27 avril à midi. . .	13 53 40
Différence.	0 19 9

On trouve, par le moyen de la table XVI, des parties proportionnelles de la déclinaison, que la différence dans $6^h 46^m$ est de. . . . . 5′ 28″
Donc, déclinaison ☉ à $6^h 46^m$ de Paris. . . . . 13°39 59 bor.
et distance polaire pour la même heure. 76 20 1
ou simplement. 76 20 0

Connoissant cette distance polaire, on aura l'heure vraie du vaisseau pour le même instant, par le moyen de la formule 44, art. 127, dont voici le calcul :

Hauteur vraie ☉. . .	18° 50′ 2″		
Latitude du vaisseau. .	16 10 0	com. ar. log. cos.	0,0175226
Distance polaire ☉. .	76 20 0	com. ar. log. sin.	0,0124737
Somme.	111 20 2		
½ somme.	55 40 1	log. cos.	9,7512811
½ somme — haut. ☉.	36 49 50	log. sin.	9,7777787
		Somme.	19,5590561
		½ somme.	9,7795280

C'est le log. sin. du demi-angle horaire ☉. 37 0 23
Multipliant par. 8

On aura l'heure vraie du vaisseau. . . . . . . $4^h 56^m 3^s 4^t$

Conclusion du calcul.

Heure vraie de Paris dans l'instant de l'observation. . . . . $6^h 46^m 44^s$
Heure vraie du vaisseau dans le même instant. 4 56 3

Différence de longitude en temps entre le vaisseau et Paris. 1 50 41
Donc la longitude ouest du vaisseau est 27° 40′ 15″ (*)

(*) Cette longitude diffère en moins de celle 27° 42′ 0″ trouvée par Borda, de 1′ 45″, parce que depuis la page 57 de l'ouvrage, d'où nous avons tiré cet exemple, il s'est glissé plusieurs fautes, dont quelques-unes ont altéré le résultat. Voici celles que j'ai remarquées.

1.° Page 57, ligne 12, en partant du bas de la page, *au lieu de* 25′, il devroit y avoir 35′.

2.° Même page, ligne 11, en partant de la dernière, *au lieu de* pour la cinquième de 20′. . . 11
lisez pour la cinquième de 15′. 6

3.° Même page, ligne 10, en partant de la dernière, *au lieu de* pour la sixième de 25. . . 18
lisez pour la sixième de 25. 17

4.° Page 58, ligne 7. Les 16 pieds d'élévation que Borda suppose à l'œil de l'observateur, équivalent sensiblement à 5 mètres et 2 décimètres, et ma table IV des dépressions, donne pour cette élévation 4′ 24″, ce qui excède de 21″ celle de 4′ 3″ donnée par Borda. Mais, pour me rapprocher un peu plus du résultat de ce géomètre, j'ai supposé que la hauteur de l'œil au-dessus de la mer, n'étoit que de 5 mètres, ce qui ne donne plus de dépression que 4′ 19″.

264. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la terre est parfaitement sphérique : or, pour avoir égard dans le calcul de la longitude en mer à la non sphéricité de notre planète, il suffit, ainsi que nous le démontrons à la note XXIV, art. 10, de réduire la parallaxe horizontale de la lune pour Paris à celle qui convient à la latitude du lieu de l'observation table V, c'est ce que nous faisons dans le tableau suivant, où, pour la commodité du lecteur, nous donnons le type de tout le calcul, comme l'a déjà fait Borda.

REMARQUE. Nous avons, dans le calcul précédent, négligé 2″ dans la hauteur apparente du soleil, et augmenté d'une seconde celle de la lune, ce qui ne peut altérer sensiblement le résultat (art. 3 et 5 de la note XXIV), afin de simplifier le calcul lorsqu'on se sert des tables de *Callet*, où il n'y a les logarithmes cosinus que des arcs qui croissent de 10 en 10 secondes. Mais dans les hauteurs vraies nous n'avons pas altéré le nombre des secondes, afin de conserver intactes les différences des hauteurs apparentes aux vraies, c'est ce que l'on doit toujours faire, ainsi que nous le démontrons à l'article 9 de la note XXIV.

265. SCHOLIE. Il suit, de tout ce que nous avons dit précédemment, ainsi que de ce que nous avons dit à la note XXIV, que pour obtenir, avec une exactitude sensiblement suffisante, la longitude du vaisseau par les observations de la distance de la lune au soleil, il faut,

1.° De la parallaxe horizontale de la lune pour Paris et prise dans la *Connoissance des temps*, déduire celle du lieu de l'observation par le moyen de la table V;

2.° Ajouter au demi-diamètre horizontal de la lune qu'on trouve pour tous les jours de l'année dans la *Connoissance des temps*, le nombre de secondes dont il a augmenté par la hauteur où cet astre a été observé (table VI);

3.° De la parallaxe horizontale de la lune pour le lieu de l'observation, déduire la parallaxe de hauteur de cet astre, en multipliant le sinus de l'horizontale par le cosinus de la hauteur de cet astre (for. 28.);

5.° Page 58, lignes 17 et 18, *au lieu* d'ajouter à la hauteur vraie 15°80′ 13″ du soleil, non corrigée des effets de la densité de l'atmosphère, les corrections 6″ et 1″ de la table II de la description du cercle de réflexion, respectivement relatives à 20° du thermomètre de Réaumur (ancienne division), et 28 pouces de hauteur du baromètre (ancienne division), il falloit retrancher ces 7″, ce qui auroit donné une hauteur vraie moindre de 14″.

6.° Page 58, ligne 5, en partant du bas de la page, *au lieu* d'ajouter la correction 2″ du baromètre et thermomètre, il falloit encore la retrancher.

7.° Page 60, ligne pénultième et anté-pénultième, *au lieu de* mai, *lisez* avril.

TYPE du Calcul des Longitu

Elémens du calcul.	
Latitude	16° 10′
Heure appr. du vaisseau	5ʰ 0ᵐ
Longitude estimée	27° 0′
Heure estimée de Paris	6ʰ 48ᵐ
Demi-diam. ☉	0° 15′ 56″
Parall. du ☉	0 0 8″
Demi-diam. hor. ☾	0 15′ 32″ }
Aug. pour 44° de haut. (tab. VI)	11″ }
Demi-diamètre corr. ☾	15′ 43″
Parall. hor. ☾ pour Paris	56′ 56″ }
Réduct. pour 16° 10′ lat. (tab. V)	0 5″ }
Parallaxe hor. ☾ pour le lieu de l'observation	57′ 1″

Dist. observée ☉ ☾	116° 8′ 50″ —
Demi-diam. ☉	0 15 56
Demi-diam. ☾	15 43
Hauteur apparente ☾	44 26 49
Ou 44° 26′ 50″ log. cos.	9.8536348
Parall. hor. ☾ pour 16° 10′ de latitude, 57′ 1″ log. sin.	8,2197080
Somme.	8,0733428
Qui est le log. sin. parall. de haut.	40′ 42″ }
Haut. app. ☾	44° 26 50 }
Somme.	45 7 32
Réfraction corrigée	55 —
Hauteur vraie ☾	45 6 37

Calcul de l'heure vraie servation faite sur le vaiss.

Dist. appar. ☉ ☾	116 39 40
Haut. appar. ☉ .	18 52 50
Haut. appar. ☾ .	44 26 50
Somme.	179 59 0
Demi-somme.	89 59 30
Dist. — ½ somme.	26 40 10
Haut. vraie ☉ . . {	18 50 2
Haut. vraie ☾ . . {	45 6 37
Somme.	63 56 39

Demi-somme. 31 58 20 log. différ. 8,1259298, qui est le log. sin. de A.

A:

C'est le log. sin. de la demi-dist.

Distance

[illegible] 70 20 0

Heure vraie d m 36ˢ

Heure vraie d 3

m 33ˢ

Réduction en degrés m 0ˢ }

15 }

15

ce qui est la longitu



4.° Faire aux réfractions atmosphériques, correspondantes aux hauteurs apparentes des deux astres observés, les corrections relatives au thermomètre et baromètre données par la table VIII. Cette correction est essentielle, puisque, comme nous l'avons dit à l'article 9 de la note XXIV, une petite erreur dans les différences $\alpha - a$ et $b - \mathfrak{C}$ des hauteurs apparente et vraie de ces astres, en peut produire une assez considérable dans la longitude calculée.

5.° Ne pas ajouter ou retrancher de la distance apparente des deux astres plus de 5″, ce qui est suffisant pour rendre le nombre de secondes de cette distance multiple de 10.

6.° Avoir l'attention de rendre à la distance calculée le nombre de secondes dont on a altéré l'apparente.

7.° Ne pas ajouter ou retrancher des hauteurs apparentes des deux astres observés plus de 15″, ce qui est suffisant pour que le nombre de secondes des somme, demi-somme, et la différence de cette demi-somme à la distance apparente soit multiple de 10.

8.° Faire éprouver aux hauteurs vraies des deux astres observés, les mêmes altérations qu'aux hauteurs apparentes, dussent les premières ne pas avoir leurs secondes de degrés en nombres multiples de 10, afin de conserver $\alpha - a$ et $b - \mathfrak{C}$ intacts (art. 9 de la note XXIV).

266. Dans le cas où l'on ne pourroit se faire seconder dans les observations maritimes des longitudes, on opérera ainsi qu'il suit.

1.° On prendra une hauteur du bord inférieur du soleil, immédiatement après une hauteur du bord supérieur ou inférieur de la lune, ayant la plus scrupuleuse attention de noter l'heure exacte d'une montre à secondes pour chacune de ces deux observations.

2.° Prenant tout de suite après, par des observations croisées, plusieurs distances du bord éclairé de la lune au plus voisin du soleil, on notera sur la même montre les heures marquées à chacune de ces observations.

3.° Après ces opérations, on observera le plutôt possible une hauteur du même bord que précédemment, de la lune, et immédiatement après une du bord inférieur du soleil, ayant toujours le soin, à chaque observation, de noter l'heure marquée par la montre.

4.° Faisant la somme de toutes les heures marquées par la montre lorsqu'on observoit les distances, on la divisera par le nombre de ces observations, et on aura l'heure moyenne à laquelle il faudra ramener toutes les observations. Celle des distances s'y ramènera aisément, en divisant l'arc total marqué par le

cercle, par le nombre des observations. Quant à l'observation de la hauteur du soleil, on la ramènera à l'heure moyenne en faisant la proportion : *la différence des heures entre les observations des premières et secondes hauteurs du soleil, est à la différence des heures entre les observations de la première hauteur et l'heure moyenne des distances, comme la différence des deux hauteurs est à un quatrième terme*, qui sera le nombre de parties de cercle qu'il faudra ajouter ou retrancher de la première hauteur observée, suivant que le soleil s'éloigne ou se rapproche de l'horizon, ce qui donnera sensiblement la hauteur observée du soleil à l'heure moyenne des distances.

On opérera exactement de même pour la lune, et alors les observations étant ramenées à un même instant, on rentrera dans le cas précédent, et le reste de l'opération sera le même.

Si l'observateur n'avoit qu'un cercle de réflexion, ou s'il ne vouloit opérer qu'avec ce seul instrument, il seroit à propos qu'il doublât et même triplât les observations des hauteurs des deux astres, afin de réparer par l'avantage des arcs multiples que l'on peut obtenir sur le cercle de réflexion, le désavantage de la petitesse du rayon de cet instrument.

Pour rendre plus sensible la méthode que nous venons de prescrire, appliquons-la à l'exemple suivant, en supposant que l'observateur ne se sert que du cercle de réflexion.

Le 12 décembre 1790 après midi, étant par 42° 45′ de longitude estimée ouest de Paris, et par 2° 15′ de latitude méridionale, un observateur, dont l'œil étoit élevé au-dessus du niveau de la mer de 6 mètres, a fait avec le cercle de réflexion les observations suivantes, des hauteurs du bord inférieur du soleil et du bord supérieur de la lune, ainsi que des distances de ces deux astres.

	Heur. des observ.	Ang. donnés par le cercle de réf.
Premières observ. du bord supérieur de la lune	$1^h\,58^m\,15^s$ 1 59 20 2 0 10	105° 14′ 39″
Premières observ. du bord inférieur du soleil	2 2 12 2 3 5 2 3 45 2 4 10	242 23 52
Observations des distances	2 5 15 2 8 20 2 9 25 2 10 10 2 11 30	413 34 10
Secondes observ. du bord inférieur du soleil	2 14 38 2 15 30 2 16 20 2 17 0	231 3 52
Secondes observ. du bord supérieur de la lune	2 18 25 2 19 20 2 20 0	118 30 39

On demande de conclure de ces observations la longitude du vaisseau.

Faisant la somme des trois heures marquées par la montre lors des trois premières observations du bord supérieur de la lune, prenant le tiers de cette somme $5^h\,57^m\,45^s$, ainsi que le tiers de l'arc total 105° 14′ 39″ des trois hauteurs observées du bord supérieur de cet astre, et opérant de même pour les cinq groupes d'observations, on a les réductions suivantes :

		Heures moyennes.
Première hauteur de la ☾	35° 4′ 53″	$1^h\,59^m\,15^s$
Première hauteur du ☉	60 35 58	2 3 18
Distance ☉ ☾	82 42 50	2 8 56
Seconde hauteur ☉	67 45 58	2 15 52
Seconde hauteur ☾	39 30 13	2 19 15.

Cela posé, nous réduirons les observations des hauteurs à l'heure moyenne $2^h\,8^m\,56^s$ des distances, ainsi qu'il suit. D'abord pour la lune, nous ferons la proportion $2^h\,19^m\,15^s - 1^h\,59^m\,15^s : 2^h\,19^m\,15^s - 2^h\,8^m\,56^s :: 39°\,30'\,13'' - 35°\,4'\,53''$ est à la différence de la dernière hauteur à la moyenne $= \frac{619}{20} \times 796'' = 2°\,16'\,52''$. Donc la hauteur observée du bord supérieur de la lune réduite à l'heure

$2^h 8^m 56^s$ de la moyenne distance observée, est 39° 30′ 13″ — 2° 16′ 52″ = 37° 13′ 21″. Ensuite pour le soleil, nous ferons la proportion $2^h 15^m 52^s$ — $2^h 3^m 18^s$: $2^h 15^m 52^s$ — $2^h 8^m 56^s$ :: 60° 35′ 58″ — 57° 45′ 58″ est à la différence de la première hauteur à la moyenne = $\frac{16}{39}$ × 10200 = 1° 33′ 48″. Donc la hauteur observée du bord inférieur du soleil réduite à l'heure moyenne $2^h 8^m 56^s$ de la moyenne distance observée, est 57° 45′ 58″ + 1° 33′ 48″ = 59° 19′ 46″.

De ces opérations il suit que la solution du problème se réduit au cas où trois observateurs auroient observé simultanément vers les $2^h 9^m$ d'une montre, la hauteur du bord supérieur de la lune de 37° 13′ 21″, celle du bord inférieur du soleil de 59° 19′ 46″, et la distance du bord éclairé de la lune au plus voisin du soleil de 82° 42′ 50″ : il n'y aura donc plus qu'à opérer comme aux articles 263 et 264. Nous laissons à nos lecteurs le soin de continuer l'opération, et afin de les mieux exercer à cette espèce de calcul avec lequel il est essentiel qu'ils se familiarisent, nous leur proposerons de résoudre les questions suivantes.

267. EXEMPLES. I. Le 17 juin 1790, étant par 100 degrés de longitude estimée à l'ouest de Paris, et par 10° de latitude N, trois observateurs trouvent, par des observations simultanées faites à $1^h\frac{1}{4}$ du soir, la distance du bord éclairé de la lune au plus voisin du soleil de 62° 49′ 12″ ; la hauteur du bord inférieur du soleil de 41° 15′ 11″, et celle du bord supérieur de la lune de 10° 51′ 59″ ; l'œil de l'observateur étant élevé de 5^m au-dessus du niveau de la mer ; la hauteur du mercure, dans le baromètre, étant de 0,754, et celle de l'alcohol, dans le thermomètre, étant de 30 degrés : on demande la longitude du lieu de l'observation (*).

II. Le 15 novembre 1790, étant par 10° 40′ latitude nord, et par 123° 45′ de longitude estimée à l'ouest de Paris, un observateur observe, avec le cercle de réflexion, six distances du bord éclairé de la lune au plus voisin du soleil, qui lui donnent sur le cercle, l'arc total 561° 25′. Deux autres observateurs mesurent l'un la hauteur du bord inférieur du soleil, l'autre la hauteur du bord supérieur de la lune, et trouvent que pour l'heure moyenne des observations, qui est $1^h 40^m$, ces hauteurs sont respectivement de 52° 17′ 8″, et de 14° 28′ 5″ ; la hauteur de l'œil de l'observateur au-dessus du niveau de la mer, est de 5 mètres,

(*) Le demi-diamètre du soleil étoit de 15′ 47″, celui horizontal de la lune étoit, le 17 à midi, de 15′ 56″, et le 18 à midi, de 16′ 2″. La parallaxe horizontale de la lune pour Paris, le 17 juin à midi, étoit de 58′ 18″, et à minuit elle étoit de 58′ 30″. (Extrait de la *Connoissance des temps* de 1790.)

celle du baromètre est de 0,729, celle du thermomètre centigrade est de 27° 5': on demande la longitude du lieu de l'observation (*).

III. Le 25 août 1808, étant par 48° 45' de latitude nord, et par 58° 59' de longitude estimée à l'ouest de Paris, on a observé la distance du bord éclairé de la lune au plus voisin du soleil de 57° 18' 16"; dans le même instant, deux autres observateurs ont observé, l'un la hauteur du bord inférieur du soleil, qui a été de 26° 59' 20", l'autre la hauteur du bord inférieur de la lune, qui a été de 33° 8' 45". Ces observations ont été faites à environ 4^h 5^m de l'après-midi : on demande la longitude du lieu de l'observation (**).

268. Lorsque dans le calcul des longitudes en mer, on mesure la distance de la lune à une étoile, la méthode pourra être exactement la même que la précédente, si ce n'est que l'angle horaire calculé de l'étoile ne donnant pas directement l'heure vraie du vaisseau dans l'instant de l'observation, il faudra déduire cette heure de l'angle horaire de l'étoile (art. 127). Mais l'horizon ne s'apercevant jamais bien distinctement la nuit, il est difficile d'obtenir de bonnes hauteurs des astres dans les observations nocturnes. Cette difficulté a engagé Borda de proposer :

1.° De ne se servir de ces hauteurs que pour le calcul de l'heure vraie de Paris à l'instant de l'observation, et de conclure l'heure vraie du vaisseau pour le même instant, de la connoissance qu'on aura acquise de l'avance ou du retard d'une bonne montre à secondes, sur le temps vrai, par le calcul d'un angle horaire solaire, d'après plusieurs observations des hauteurs du soleil qu'on aura faites dans l'après-midi précédent, lorsque cet astre étoit le plus près possible du premier vertical (art. 242).

2.° De ne pas même observer les hauteurs de la lune et de l'étoile qu'on lui compare pour le calcul de la réduction de la distance apparente à la distance vraie, et de déduire par le calcul les hauteurs vraies et apparentes de ces astres, d'après la connoissance qu'il est aisé d'obtenir de leurs angles horaires à l'ins-

---

(*) Le demi-diamètre du soleil étoit de 16' 14", celui horizontal de la lune, le 13 à midi, étoit de 15' 21", et le 14 il étoit de 15' 9". La parallaxe horizontale de la lune pour Paris étoit le 13 à midi 56' 13", et à minuit elle étoit de 55' 50". (Extrait de la *Connoissance des temps* de 1790).

(**) Le demi-diamètre du soleil est ce jour-là (25 août 1808), de 15' 52". Le demi-diamètre horizontal de la lune est, le 25 août à midi, de 16' 20", et le 26 août à midi, il est de 16' 18". Enfin la parallaxe horizontale de la lune pour Paris, est, le 25 août à midi, de 59' 51", et elle est, le 25 août à minuit, de 59' 47". (Extrait de la *Connoissance des temps* de 1808).

tant moyen des observations des distances, puisque la montre donne, par le procédé mentionné ci-dessus, l'heure vraie du vaisseau au même instant.

Cette méthode, dans laquelle le calcul supplée à des observations d'une exactitude quelquefois très-hasardée, me paroît devoir obtenir la préférence sur toutes les autres; mais afin d'apprécier plus justement le degré de confiance que nous devons lui accorder, nous allons l'examiner.

269. Les deux formules 38 et 39 (art. 123), ou seulement celle 40 (art. 124), donnent les angles horaires de la lune et de l'étoile observées. Cela posé, soit A l'angle horaire de l'un de ces deux astres, par exemple, celui de la lune, L la latitude vraie du vaisseau, Δ la distance de l'astre au pôle élevé, et α sa hauteur vraie, ce qui nous donnera un triangle sphérique, dont les trois côtés seront $90^\circ - \alpha$, Δ, et $90^\circ - L$. Or, nous connoissons les deux derniers côtés, et l'angle compris A, nous aurons donc

$$\sin.\alpha = \cos.A \sin.\Delta \cos.L + \cos.\Delta \sin.L \ldots\ldots (116),$$

formule dont nous réduirons aisément le calcul numérique à celui purement logarithmique, en faisant

$$\text{tang.}M = \frac{\cos.A}{\text{tang.}L} \ldots\ldots (117),$$

d'où $\cos.A = \text{tang.}M \,\text{tang.}L$; et substituant cette valeur de cos. A dans l'équation (116), on aura

$$\sin.\alpha = \frac{\sin.M \sin.L \sin.\Delta + \cos.\Delta \sin.L \cos.M}{\cos.M} = \frac{\sin.L}{\cos.M} \times (\sin.M \sin.\Delta + \cos.M \cos.\Delta);$$

donc enfin

$$\sin.\alpha = \frac{\sin.L \cos.(\Delta - M)}{\cos.M} \ldots\ldots (118).$$

Les craintes que l'on peut avoir sur l'exactitude de la méthode que nous examinons, paroissent principalement fondées sur la petite inexactitude qu'il doit y avoir dans l'heure vraie de l'instant de l'observation moyenne des distances, et qui n'est donnée à l'observateur que par la montre à secondes. Cependant, comme nous le démontrerons au premier article de la note XXV, l'influence d'une petite erreur dans l'angle horaire de chacun des deux astres observés sur l'heure vraie de Paris à l'instant de l'observation, est extrêmement petite, surtout pour les grandes latitudes, et lorsque les deux astres étant fort éloignés de l'équateur, sont observés le plus près possible du méridien.

270. Connoissant la hauteur vraie de l'étoile que je représente par ζ, on en déduira aisément la hauteur apparente, que je représente par b, en ajoutant à la

première la réfraction qui lui correspond et qui, évidemment, est sensiblement la même que celle qui correspond à b.

Mais pour déduire de la valeur de la hauteur vraie α de la lune la hauteur apparente a de cet astre, nous nous servirons de la formule très-élégante

$$\text{tang. } a' = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(\alpha - P) \cos. \frac{1}{2}(\alpha + P)}{\cos. \alpha} \ldots\ldots (119),$$

dans laquelle P représente la parallaxe horizontale de la lune, et a' la hauteur apparente a moins la réfraction astronomique. Cette formule m'a été communi- Fig. 18.
quée sans démonstration par M. Delambre ; voici comment je la démontre : soit O l'observateur, O L son horizon, et L' la lune ; d'où $L'AL = \alpha$, $L'OL = a'$, et $OLC = P$. Or, le triangle O A L' donne l'équation

$$\text{tang. } L'OL = \frac{L'A \sin. L'AO}{AO - L'A \cos. L'AO} = \frac{L'A \sin. L'AL}{AO + L'A \cos. L'AL}$$

ou

$$\text{tang. } a' = \frac{L'A \sin. \alpha}{AO + L'A \cos. \alpha} \ldots\ldots (M).$$

Mais

$$L'A = L'C - AC, \text{ et } AC = \frac{CO}{\sin. O\,C} = \frac{CO}{\sin. \alpha},$$

d'où

$$L'A = \frac{L'C \sin. \alpha - OC}{\sin. \alpha}, \text{ et } AO = OC \text{ tang. } OCA = OC \cot. \alpha.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (M), il vient

$$\text{tang. } a' = \frac{L'C \sin. \alpha - OC}{L'C \cos. \alpha} = \frac{\sin. \alpha - \frac{OC}{L'C}}{\cos. \alpha}.$$

Mais nous avons démontré que

$$\sin. P = \frac{OC}{L'C} \text{ (équation 27, article 113)};$$

donc,

$$\text{tang. } a' = \frac{\sin. \alpha - \sin. P}{\cos. \alpha},$$

et réduisant le numérateur à un simple monôme, on obtient la formule 119 que nous voulions démontrer. Ayant a', on obtiendra la hauteur apparente de la lune, en lui ajoutant la réfraction qui correspond à a', ou, plus exactement, celle qui correspond à a', augmenté de la réfraction correspondante.

271. De ce que nous avons dit dans les deux articles précédens et à la note XXV, sur la méthode des longitudes par les seules observations de la distance du bord éclairé de la lune à une étoile, il résulte qu'elle donne l'heure vraie de Paris.

pour l'instaut de l'observation, avec une exactitude sensiblement égale à celle qui résulte des observations des distances du soleil à la lune et des hauteurs de ces deux astres. Mais si la petite erreur commise dans l'angle horaire du soleil à l'instant de l'observation nocturne donnée par la montre (et qui provient, 1.° de l'erreur commise dans l'estime du chemin couru en longitude depuis l'instant où l'on a observé l'angle horaire du soleil; 2.° des petits changemens que peut éprouver la marche de la montre dans le même intervalle de temps) influe fort peu sur le calcul de l'heure vraie de Paris; en revanche, elle influe assez considérablement sur la longitude, par la comparaison de cette heure vraie, qui est sensiblement exacte, avec celle du vaisseau, qui peut être affectée de quelques inexactitudes assez sensibles. Ainsi cette seule raison doit faire préférer les observations diurnes aux observations nocturnes, sans cependant devoir faire renoncer à ces dernières, que les circonstances rendent quelquefois très-utiles dans le cours de la navigation.

Nous allons faire une application de cette méthode sur l'exemple que propose Borda à la page 66 de sa ***Description du cercle de réflexion, etc.***, et dont nous copions à peu près les paroles jusqu'au calcul.

Exemple. Le 21 avril 1787, étant par 44° 50′ de longitude estimée à l'ouest de Paris, et par 14° 58′ de latitude nord, on a observé, vers les $4^h\frac{3}{4}$, plusieurs hauteurs du soleil, qui ont donné pour hauteur vraie du centre de cet astre, toutes corrections faites, 19° 42′, et l'heure moyenne marquée par la montre étoit alors $4^h 45^m 7^s$. Le même jour, vers 7^h du soir, étant par 45° 30′ de longitude estimée, et par 15° 10′ de latitude, on a pris plusieurs distances de ***régulus*** à la partie la plus éloignée du disque de la lune, qui étoit alors le côté éclairé de cet astre, et la distance moyenne a été trouvée de 62° 12′ 15″; l'heure moyenne de la montre étoit $7^h 0^m 48^s$: on demande la longitude du vaisseau.

La *Connoissance des temps* de l'année 1787 donne la distance du soleil au pôle élevé à l'heure de l'observation de la hauteur de cet astre = 77° 58′; d'où, par le moyen de la formule 41 (art. 127), on conclut que l'heure vraie du vaisseau à l'instant de l'observation, est . . . . $4^h\ 50^m\ 15^s$

Mais la montre marquoit	4 45 7
Donc retard de la montre	0 5 6

Ajoutant ces $5^m 6^s$ à l'heure de la montre dans l'instant des observations des distances, c'est-à-dire, $7^h 0^m 48^s$, on a $7^h 0^m 48^s + 5^m 6^s = 7^h 5^m 54^s$, qui est l'heure vraie du vaisseau rapportée au méridien du lieu où on avoit observé les hauteurs

du soleil; mais ce méridien étoit à l'orient de celui du lieu où on a observé les distances de 40′ ou de $2^m\,40^s$, par conséquent l'heure comptée sur ce premier méridien seroit trop grande de $2^m\,40^s$; donc l'heure vraie du vaisseau à l'instant de l'observation des distances, est . . . . $7^h\,3^m\,14^s$

et comme le vaisseau est supposé 45° 30′ à l'ouest de Paris, ce qui fait en temps 3 2 0

on aura l'heure approchée de Paris, qui sera . . 10 5 14

On trouve dans la *Connoissance des temps* de 1787, que la distance de l'équinoxe au soleil pour le 21 avril à $10^h\,5^m$ approchée de Paris, est $22^h\,2^m\,0^s$; donc l'ascension droite du soleil pour le même moment est de $24^h - 22^h\,2^m = 1^h\,58^m = 29°30'$. Donc (for. 37, art. 123)

Ascension droite du méridien du vaisseau $= 1^h\,58^m + 7^h\,3^m\,14^s = 9^h\,1^m\,14^s$

ou en degrés. . . . . $= 135°18'30''$

La *Connoissance des temps* donne l'ascension droite de régulus, pour le jour de l'observation. 149 15 0

Donc (form. 40, art. 124), la différence 13 56 30

est l'angle horaire de l'étoile qui, conséquemment, n'avoit pas passé au méridien, puisque l'ascension droite du méridien est plus petite que celle de l'astre.

La *Connoissance des temps* donne l'ascension droite de la lune à l'instant de l'observation. . . . . 85° 8′ 0″

Ascension droite du méridien du vaisseau. . . . 135 18 30

Différence. 50 10 30

qui est l'angle horaire de la ☾.

Enfin, par le moyen de la *Connoissance des temps*, on trouve pour le moment de l'observation faite des distances de l'étoile et de la lune, que la distance polaire de régulus est de 76°59′44″, et que celle de la lune est de 65°36′.

Calcul des hauteurs vraies des deux astres (for. 117 et 118).

Hauteur de l'étoile.

Angle horaire. . . . . . 13° 56′ 30″ log. cos. 9,9870141
Latitude du vaisseau. . 15 10 0 log. cot. 0,5669196

Somme. 0,5539337

qui est le log. tang. M = 74° 23′ 42″ c. log. cos. 0,5702416
Distance polaire 76 59 44

Différence. 2 36 2 log. cos. 9,9995525
Latitude du vaisseau. . 15 10 0 log. sin. 9,4176837

Somme. 9,9874778

qui est le log. sin. de la haut. vraie de l'étoile = 76° 18′ 25″

Hauteur de la lune.

Ang hor. . 50° 10′ 30″ log. cos. 9,8064817
Lat. du v. . 15 10 0 log. cot. 0,5669196

Somme. 0,3734013 qui est
le log. tang. de M = 67° 5′ 54″ c. log. cos. 0,4091850
Distance polaire. 65 36 0

Différence. 1 27 34 log. cos. 9.9998591
Lat. du vaisseau. . . 15 10 0 log. sin. 9,4176837

Somme. 9,8267278

qui est le log. sin. de la haut. vr. de la lune = 42° 8′ 42″

La réfraction qui convient à la hauteur de l'étoile, est 13″; on aura donc la hauteur apparente de l'étoile = 76° 18′ 38″.

La *Connoissance des temps* donne, pour l'heure de l'observation, la parallaxe horizontale de la lune pour Paris . . . . 1° 0′ 9″
et l'on trouve (tab. V), que la correction pour 15° 10′ de latit. est. 5″ +

Somme. 1 0 14

qui est la parallaxe horizontale de la lune pour la latitude du vaisseau.

Calcul de la hauteur apparente de la lune (for. 119).

Haut. vraie ☾. 42° 8′ 42″ . . . . com. ar. log. cos. 0,1299187
différence. 41° 8′ 28″
Parall. hor. ☾. 1 0 14 ½ diff. 20 34 14 . . . . log. sin. 9,5457530

Somme. 43 8 56
½ somme. 21 34 28 . . . . log. cos. 9,9684518
2 . . . . . . log. 0,3010300

Somme. 9,9451535

qui est le log. tang. de 41° 23′ 30″
Réfraction. 1 6

Somme. 41 24 36

ce qui est la vraie hauteur apparente de la lune.

On trouve dans la *Connoissance des temps* que le demi-diamètre horizontal de la lune est, pour le moment de l'observation. . . . . 16′ 25″
Correction pour 41° ½ de hauteur (tab. VI). 11

Somme qui est le vrai ½ diamètre de hauteur de la lune. 16 36
Distance observée de l'étoile au bord le plus éloigné de la lune. . . . . 62° 12 15

Différence qui est la distance apparente de l'étoile au centre de la lune. 61 55 39

Calcul de la distance réduite de la lune et de l'étoile (for. 113 et 114).

Dist. app. de l'ét. au cent. de la ☾	61° 55′ 39″			
Haut. app. de l'étoile.	76 18 38	com. ar. log. cos.	0,6258767	
Haut. app. de la lune.	41 24 36	com. ar. log. cos.	0,1249413	
Somme.	179 38 53			
½ somme.	89 49 26	log. cos.	7,4876634	
½ somme — distance.	27 53 47	log. cos.	9,9463516	
Haut. vraie de l'étoile	76 18 24	log. cos.	9,3742443	
Haut. vraie de la lune	42 8 42	log. cos.	9,8700813	
Somme.	118 27 6	Somme.	37,4291586	
		½ somme.	18,7145793	diff. 9,0056006 qui est le log. sin. de A.
½ somme.	59 13 33	log. cos.	9,7089787	
A =	5 48 50	log. cos.	9,9977603	
		Somme.	9,7067390	

C'est le log. sin. de la demi-distance.	30° 35′ 56″	différ.		
Distances réduites.	61 11 52	2718	log.	3,4342495
Dist. prises dans la *Conn. des temps* 1.ère à 9h	61 57 10	6534	com. log.	6,1848209
Dist. prises dans la *Conn. des temps* 2.ème à 12	60 8 16		log. const.	4,0334238
			Somme.	3,6524942

qoi est le logarithme de 4493ˢ ou	1h 14m 53s
Heure pour Paris de la distance précédente.	9 0 0
Somme qui est l'heure vraie de Paris.	10 14 53
Mais nous avons trouvé l'heure du vaisseau.	7 3 14
Différence.	3 11 39 ou 47° 54′ 45″

ce qui est la longitude occidentale du vaisseau.

272. Remarque. La méthode précédente est affectée d'une petite imperfection, à laquelle on pourra remédier aisément. En effet, l'intervalle de temps donné par la montre entre les deux instans moyens des observations de la hauteur du soleil et celui des distances de la lune à l'étoile, est évidemment différent de celui que donneroit une horloge qui suivroit le mouvement vrai du soleil, d'une quantité qui, si la montre suivoit exactement le temps moyen, est à la variation du temps moyen au temps vrai dans les vingt-quatre heures correspondantes au temps des observations, comme l'intervalle de temps donné par cette montre est à vingt-

quatre heures : mais la montre dont on se sert suivant très-rarement le temps moyen, il faut, pour plus d'exactitude, faire entrer dans cette proportion la variation du temps marqué par la montre dans l'intervalle de temps des observations diurne et nocturne sur le temps moyen, et que l'on peut toujours connoître avec une approximation suffisante, par le moyen indiqué à l'article 256, si la montre dont on se sert est bonne, et surtout si l'observateur est muni d'un garde-temps. Ainsi, pour réunir les deux corrections en une seule, on emploiera directement dans la proportion précédente, la variation du temps marqué par la montre sur le temps vrai dans l'intervalle des observations de jour et de nuit, c'est-à-dire qu'on fera la proportion suivante :

Vingt-quatre heures sont à l'intervalle des temps entre les instans moyens des observations faites des hauteurs du soleil et des distances d'une étoile à la lune, comme l'accélération ou le retard de la montre sur le temps vrai pendant cet intervalle est au temps que l'on doit ajouter ou retrancher de l'heure vraie du vaisseau à l'instant moyen des observations des distances, suivant que le mouvement vrai solaire est en avance ou en retard sur celui de la montre.

Par exemple, supposons que l'on ait déterminé, par le moyen indiqué à l'article 256, que le mouvement de la montre est en retard sur le moyen dans les vingt-quatre heures de $7^s,7$. Nous voyons, dans la *Connoissance des temps* de 1787, que du 21 ou 22 avril de cette année-là, le temps vrai accélère le moyen de $12^s,3$; donc, le temps vrai accélère celui de la montre dans les vingt-quatre heures comprises depuis le 21 jusqu'au 22 avril, de $12^s,3+7^s,7$ ou 20^s; nous ferons donc la proportion suivante $24^h : 2^h\,15^m\,41^s :: 20^s : 1^s,9$; donc l'heure vraie du vaisseau, à l'instant moyen des observations des distances est $7^h\,3^m\,14^s + 2^s = 7^h\,3^m\,16^s$, et conséquemment la longitude du vaisseau n'est plus que de $47°\,54'\,15''$.

Dans cet exemple la différence a été fort petite; mais il pourroit se faire, 1.° que l'intervalle de temps entre les observations de jour et de nuit fût beaucoup plus grand; 2.° que l'on opérât dans un temps où la différence diurne du mouvement vrai solaire au moyen fût de 29 à 30 secondes, comme cela a lieu vers le solstice d'hiver; 3.° que le mouvement de la montre varie assez considérablement dans les vingt-quatre heures sur le temps moyen, et que cette variation soit dans le même sens que celle du temps moyen relativement au temps vrai, ce qui pourroit donner jusqu'à 15 secondes de temps de différence dans l'heure vraie du vaisseau; d'où il résulteroit dans la longitude une erreur qui seroit de 3′ 45″.

* 273. Nous avons, dans le courant de cet ouvrage, et surtout dans ce troisième livre, simplifié le calcul numérique des expressions analytiques des quantités qui étoient l'objet de nos recherches, en les réduisant par certains artifices, que les rapports qui existent entre les fonctions trigonométriques rendent aisés, à des simples monômes dans lesquels, lorsque le cas l'exigeoit, il entroit une quantité auxiliaire dont la valeur étoit elle-même donnée par un simple monôme, afin que n'ayant que des multiplications et divisions de nombres naturels à faire, toute l'opération, en employant les tables logarithmiques, se réduisît à de simples additions et soustractions (*). Cependant, il existe souvent d'autres méthodes de simplifications en ne calculant que sur des nombres naturels; mais ces méthodes exigent, de la part de ceux qui les proposent, le calcul de tables très-longues, et qu'on ne peut pas toujours se procurer: telles sont, pour la réduction de la distance apparente à la distance vraie, les tables qu'a publiées à Londres M. de *Mendoza-Rios*, ancien officier de la marine royale d'Espagne.

Pour parvenir à ces dernières méthodes de simplifications, le géomètre qui s'en occupe cherche à réduire la formule analytique dont il veut simplifier le calcul, à un polynôme dont tous les termes, s'il est possible, ne soient que du premier degré: parvenu à ce point-là, il calcule les tables numériques qui ont pour argument les termes de son polynôme, heureux s'il peut abréger ses calculs et ses tables en faisant servir l'une d'elles à plusieurs termes du polynôme.

L'on ne peut disconvenir que M. de Mendoza a parfaitement rempli cet objet relativement à la réduction des distances apparentes aux vraies. Voici à peu près comment ce géomètre y est parvenu.

Nous avons vu à l'article 260, qu'en égalant les deux expressions du cosinus de la différence Z d'azimut entre les deux astres dont on mesure la distance, l'une prise dans le triangle apparent, l'autre dans le triangle vrai, l'on avoit

$$\frac{\cos.x+\cos.(\alpha+\zeta)}{\cos.\alpha\cos.\zeta}=\frac{\cos.D+\cos.(a+b)}{\cos.a\cos.b},$$

d'où

$$\cos.x=\frac{[\cos.D+\cos.(a+b)]\cos.\alpha\cos.\zeta}{\cos.a\cos.b}-\cos.(\alpha+\zeta).$$

Soit fait

$$\cos.M=\frac{\cos.\alpha\cos\zeta}{2\cos.a\cos.b}\ldots\ldots(120),$$

(*) Je ne parle pas des élévations au carré, ou extraction de racines carrées, qui sont les seules opérations de puissances qui entrent dans ces formules, parce que par le calcul logarithmique, ces opérations se réduisent à doubler un logarithme, ou à en prendre la moitié.

ce qui donne $\cos. x = 2 \cos. M \cos. D + 2 \cos. M \cos. (a+b) - \cos. (\alpha+\zeta) \ldots\ldots (\varphi)$; mais $\cos. (M+D) = \cos. M \cos. D - \sin. M \sin. D$, et $\cos. (M-D) = \cos. M \cos. D + \sin. M \sin. D$; donc, $2 \cos. M \cos. D = \cos. (M+D) + \cos. (M-D)$. De même, $2 \cos. M. \cos. (a+b) = \cos. (M+a+b) + \cos. (a+b-M)$. Substituant ces valeurs dans l'équation (φ), on aura $\cos. x = \cos. (D+M) + \cos. (D-M) + \cos. (a+b+M) + \cos. (a+b-M) - \cos. (\alpha+\zeta) \ldots\ldots (\omega)$. Mais $\cos. x = 1 - \sin. \text{ver}. x$, $\cos. (D+M) = 1 - \sin. \text{ver}. (D+M)$, $\cos. (D-M) = 1 - \sin. \text{ver}. (D-M)$, $\cos. (a+b+M) = 1 - \sin. \text{ver}. (a+b+M)$, $\cos. (a+b-M) = 1 - \sin. \text{ver}. (a+b-M)$, et $-\cos. (\alpha+\zeta) = -1 + \sin. \text{ver}. (\alpha+\zeta) = 1 - 2 - \sin. \text{ver}. (\alpha+\zeta)] = 1 - \text{susinus ver}. (\alpha+\zeta)$; donc,

$$\sin. \text{ver}. x = \sin. \text{ver}. (D+M) + \sin. \text{ver}. (D-M) + \sin. \text{ver}. (a+b+M) + \sin. \text{ver}. (a+b-M) + \text{susin. ver}. (\alpha+\zeta) - 4 \ldots\ldots (121).$$

Telle est la formule trouvée par M. Mendoza, et pour laquelle ce géomètre a calculé des tables que je ne connois que pour les avoir vues un instant chez M. Delalande (*). Mais il me paroît, d'après le peu que j'en ai vu, qu'il y a une table qui donne la valeur de l'angle auxiliaire M (éq. 120), lequel évidemment doit être plus grand que 60°; car si l'on avoit $\cos. \alpha \cos. \zeta = \cos. a \cos. b$, il en résulteroit $\cos. M = \frac{1}{2}$, d'où $M = 60°$; mais la hauteur vraie α de la lune surpassant l'apparente a d'une quantité plus grande que celle dont la hauteur vraie ζ du soleil ou de l'étoile est surpassée par la hauteur apparente b du même astre, on aura $\frac{\cos. \alpha \cos. \zeta}{\cos. a \cos. b}$ un peu plus petit que l'unité; donc, $\cos. M$ un peu plus petit que $\frac{1}{2}$; d'où M un peu plus grand que 60°. Il m'a paru que, d'après cela, l'auteur de la table en question n'avoit mis que l'excès de l'arc M sur 60°, quantité qui dépend conséquemment de la hauteur des astres observés, ainsi que de leurs parallaxes et de la réfraction. Mais, puisque l'arc M est diminué de 60°, il faut avoir égard à cette diminution dans la formule 121, ce qui donne

$$\sin. \text{ver}. x = \sin. \text{ver}. (D+60°+M) + \sin. \text{ver}. (D-60°-M) + \sin. \text{ver}. (a+b+60°+M) + \sin. \text{ver}. (a+b-60°-M) + \text{susin. ver}. (\alpha+\zeta) - 4 \ldots (122).$$

Par le moyen des deux autres tables, dont l'une doit avoir pour argument

(*) Cet astronome n'ayant qu'un exemplaire des tables de Mendoza, qui lui a été donné par l'auteur, et auquel il a réuni plusieurs notes écrites de sa main, ne le confie pas même aux personnes qui ont l'honneur de le connoître, et auxquelles, d'ailleurs, il paroît accorder quelques sentimens flatteurs d'estime et d'amitié.

$D + 60° + M$, et l'autre $D - 60° - M$, on a les sinus verses de ces deux quotités, et par conséquent aussi ceux de $a + b + 60° + M$ et $a + b - 60° - M$, en mettant $a + b$ à la place de D. Enfin, il doit y avoir une quatrième table donnant les valeurs de susin. ver. $(a + c)$; de manière que, par l'addition de ces cinq quantités, on a le sinus verse de la distance vraie x entre les deux astres.

* 274. Quoiqu'il ne soit pas toujours convenable d'émettre son opinion sur un objet qu'on ne connoît pas parfaitement, cependant je hasarderai les réflexions suivantes, en faveur des méthodes ordinaires qui n'exigent que le calcul logarithmique.

Tous les marins qui s'appliquent à la partie nautique de leur état ne peuvent se passer d'une table de logarithmes qu'ils se procurent à un très-bas prix, et il n'y en a pas beaucoup qui voulussent acheter ces tables, dont le prix est au-dessus des moyens de plusieurs, et qui d'ailleurs seront long-temps fort rares en France. Si cependant on devoit retirer un grand avantage des tables en question, les considérations précédentes disparoîtroient. Mais je crois que ces méthodes, où il faut feuilleter dans plusieurs tables différentes, avoir égard à des parties proportionnelles, à des petites corrections, etc., n'ont de supériorité en simplicité que l'apparence; c'est ce que l'expérience a souvent prouvé: au reste, le temps vérifiera si mon opinion, relativement aux tables en question, est fondée.

Je finirai cet article par observer que la formule (*a*) de l'article précédent étant pour le moins aussi simple que celle 121, et n'exigeant d'autres tables que celle des cosinus naturels des arcs, l'auteur de la méthode auroit abrégé ses peines et celles du calculateur, en n'y introduisant pas les sinus verse et susinus verse des arcs. Ainsi, la seule table ayant pour argument la valeur de $\cos. M$ (éq. 120) et une table de cosinus naturels, remplaceroient les tables si rares et si chères de Mendoza.

275. La petite différence qui existe entre les trois côtés du triangle vrai Z L′S′ et les respectifs du triangle apparent Z L S, peuvent donner lieu à des méthodes de réduction de la distance apparente à la vraie plus simples que les précédentes; mais qui exigent, encore plus que ces dernières, que l'on ait avec exactitude la différence des hauteurs apparentes aux vraies: c'est ce que l'on va voir dans la méthode suivante, à laquelle nous donnerons tout le développement nécessaire en nous renfermant toujours dans l'analyse finie, et examinant avec soin si les quantités que nous négligerons ne peuvent pas influer d'une manière sensible sur le résultat du calcul. Il est vrai que dans cet examen nous Fig. 45.

Fig. 45. supposerons toujours que les données du calcul sont comprises dans les limites hors desquelles il est extrêmement rare qu'elles sortent; et voici quelles sont ces limites.

1.° Les hauteurs des deux astres observés, pas moindres de 6 à 7 degrés. Car, si on les observoit à des hauteurs plus petites, leurs disques seroient assez sensiblement altérés par la réfraction, d'où il résulteroit une erreur dans l'observation de la distance.

2.° La distance de ces deux astres, surtout lorsqu'on observe la distance du soleil à la lune, pas moindre que 40°. Car, dans le cas contraire, celui des deux astres qui est le moins brillant, étant trop près de l'autre, seroit encore noyé dans la lumière de ce dernier, et ne pourroit conséquemment s'observer aisément.

Cela posé, conservant les mêmes dénominations que précédemment pour la différence d'azimut (Z) des deux astres observés, leur distance apparente (D), leur distance vraie (x), la hauteur apparente (a) de la lune et la hauteur apparente (b) du soleil, et de plus nommant

La parallaxe de hauteur de la lune — réfraction, ou $\alpha - a$. . . . . . . p
La parallaxe de hauteur du soleil — la réfraction, ou $\beta - b$. . . . . — q
La différence x — D de la distance vraie ☉ ☾ à l'apparente. . . . . . . y

Nous aurons dans le triangle apparent ZLS dont les trois côtés sont $90° - a$, $90° - b$ et D, l'équation

$$\cos. Z \cos. a \cos. b = \cos. D - \sin. a \sin. b \quad \ldots\ldots (A),$$

et dans le triangle réel ZL'S', dont les trois côtés sont $90° - (a+p)$, $90° - (b-q)$ et x, ou $D+y$, nous aurons

$$\cos. Z \cos. (a+p) \cos. (b-q) = \cos. (D+y) - \sin. (a+p) \sin. (b-q),$$

ou, développant et effectuant les multiplications, on aura

$$\cos. Z [\cos. a \cos. b \cos. p \cos. q + \cos. a \sin. b \cos. p \sin. q - \sin. a \cos. b \sin. p \cos. q - \sin. a \sin. b \sin. p \sin. q] = \cos. D \cos. y - \sin. D \sin. y - \sin. a \sin. b \cos. p \cos. q - \cos. a \sin. b \sin. p \cos. q + \sin. a \cos. b \cos. p \sin. q + \cos. a \cos. b \sin. p \sin. q \ldots (B).$$

Retranchant cette équation de celle (A), et faisant attention que $1 - \cos. p \cos. q = 1 - (1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} p)(1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} q) = 2 [\sin.^2 \frac{1}{2} p + \sin.^2 \frac{1}{2} q - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} p \sin.^2 \frac{1}{2} q]$, on aura $\cos. Z [2 \cos. a \cos. b (\sin.^2 \frac{1}{2} p + \sin.^2 \frac{1}{2} q - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} p \sin.^2 \frac{1}{2} q) - \cos. a \sin. b \cos. p \sin. q + \sin. a \cos. b \sin. p \cos. q + \sin. a \sin. b \sin. p \sin. q] = 2 \cos. D \sin.^2 \frac{1}{2} y + \sin. D \sin. y - 2 \sin. a \sin. b (\sin.^2 \frac{1}{2} p$

$+\sin.^2\frac{1}{2}q - 2\sin.^2\frac{1}{2}p\sin.^2\frac{1}{2}q] + \cos.a\sin.b\sin.p\cos.q - \sin.a\cos.b\cos.p\sin.q$
$-\cos.a\cos.b\sin.p\sin.q$. . . . . (C).

Voyons maintenant quelles sont les réductions que nous pouvons faire éprouver à cette équation, en nous renfermant dans les limites que doivent avoir les valeurs de a, b et D, et ne négligeant que les unités du sixième ordre décimal, c'est-à-dire que les millionièmes des quantités qui entrent dans la formule précédente.

Supposons, pour fixer les idées, et prenant pour p et q les plus grandes valeurs qu'elles puissent avoir, que $p = 54'40''$, et $q = 8'$ (*), ce qui nous donne d'abord $\sin.^2\frac{1}{2}q$, ou $\sin.^2 4' < 0{,}0000014$; il est vrai que cette quantité est multipliée par le facteur $2\cos.Z\cos.a\cos.b$ qui pourroit être > 1 ; mais observons que si nous mettons le monôme $2\cos.a\cos.b\cos.Z\sin.^2\frac{1}{2}q$ sous la forme $\cos.a\cos.b\cos.Z(1-\cos.q)$, nous en conclurons que cette quantité est $< 1 - \cos.q$, ou $< 1 - \cos.8'$, ou enfin $< 0{,}0000027$; donc, en négligeant ce terme, nous ne négligeons qu'une quantité de l'ordre des millionièmes, et qui, conséquemment est plus petite que 36'''. A plus forte raison pourra-t-on négliger le terme $4\cos.a\cos.b\sin.^2\frac{1}{2}p\sin.^2\frac{1}{2}q$, qui ne donne que des quantités près de dix mille fois plus petites que le terme précédent.

Puisque $\sin.\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p - \frac{(\frac{1}{2}p)^3}{2.3} + \text{etc.}$, d'où $\sin.^2\frac{1}{2}p = \frac{1}{4}p^2 - \frac{(\frac{1}{2}p)^4}{3} + \text{etc.}$, et par conséquent $\frac{1}{4}p^2 - \sin.^2\frac{1}{2}p < \frac{(\frac{1}{2}p)^4}{3}$, l'on pourra, avec une exactitude encore plus grande que la précédente, faire $\sin.^2\frac{1}{2}p = \frac{1}{4}p^2$; car $\frac{(\frac{1}{2}p)^4}{3}$ ne donne qu'un nombre plus petit qu'un cent millionième, lorsque $p = 54'40''$. La quantité $\cos.p$ ou $\cos.54'40''$ différant de l'unité de plus d'un dix millième, nous la conserverons. Mais $\cos.q$ ou $\cos.8'$ ne différant de l'unité qu'à la sixième décimale, nous ferons $\cos.q = 1$.

Le sinus de $54'40''$ ne différant de la longueur du même arc que dans la septième décimale, l'on pourra faire $\sin.p = p$; à plus forte raison pourra-t-on faire $\sin.q = q$.

Ce que nous avons dit pour p a également lieu pour y; car, dans le triangle L'LM, on a L'M < L'L + LM, et dans celui SMS', on a MS' < MS + SS'; donc, ajoutant membre à membre ces deux inégalités, on aura L'M + MS', ou Fig. 45.

(*) Cette valeur de p n'a lieu que lorsque la lune est périgée, et que sa hauteur apparente est d'environ 14 degrés, celle de q lorsque la hauteur apparente du soleil est d'environ 6 degrés.

Fig. 45. $x < L'L + ML + MS + SS'$; mais $x = D + y$; $LM + MS = D$; $L'L = p$; $SS' = q$; donc $D + y < D + p + q$, d'où $y < p + q$. Ainsi, puisque la plus grande valeur de y ne surpasse pas la quantité 54′40″ de 8′, il aisé de voir que ce que nous avons dit pour p pourra sensiblement s'appliquer à y. Nous ferons donc $\sin.^2 \frac{1}{2} y = \frac{1}{4} y^2$, et $\sin. y = y$.

De toutes ces considérations il résulte que l'équation (C) se réduit à celle

$\frac{1}{2} p^2 \cos. Z \cos. a \cos. b - q \cos. a \sin. b \cos. p \cos. Z + p \cos. Z \sin. a \cos. b + pq \cos. Z \sin. a \sin. b = \frac{1}{2} y^2 \cos. D + y \sin. D - \frac{1}{2} p^2 \sin. a \sin. b + p \cos. a \sin. b - q \sin. a \cos. b \cos. p - pq \cos. a \cos. b$ . . . . (E).

Substituant la valeur de $\cos. Z \left(= \frac{\cos. D - \sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b} \right)$ dans les trois premiers termes de l'équation (E), et mettant dans le quatrième terme, $1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} Z$ à la place de $\cos. Z$, il vient $\frac{1}{2} p^2 \cos. D - \frac{1}{2} p^2 \sin. a \sin. b - \frac{q \sin. b \cos. p \cos. D}{\cos. b} + \frac{q \sin. a \sin.^2 b \cos p}{\cos. b} + \frac{p \cos. D \sin. a}{\cos. a} - \frac{p \sin.^2 a \sin. b}{\cos. a} + pq \sin. a \sin. b - 2 pq \sin. a \times \sin. b \sin.^2 \frac{1}{2} Z = \frac{1}{2} y^2 \cos. D + y \sin. D - \frac{1}{2} p^2 \sin. a \sin. b + p \cos. a \sin. b - q \sin. a \times \cos. b \cos. p - pq \cos. a \cos. b$.

Effaçant dans les deux membres la quantité $\frac{1}{2} p^2 \sin. a \sin. b$, on aura $\frac{1}{2} p^2 \cos. D + q \left(\frac{\sin. a \sin.^2 b \cos. p}{\cos. b} + \sin. a \cos. b \cos. p - \frac{\sin. b \cos. p \cos. D}{\cos. b} \right) - p \left(\frac{\sin.^2 a \sin. b}{\cos. a} + \cos. a \sin. b - \frac{\sin. a \cos. D}{\cos. a} \right) + pq (\sin. a \sin. b + \cos. a \cos. b) - 2 pq \sin. a \sin. b \times \sin.^2 \frac{1}{2} Z = \frac{1}{2} y^2 \cos. D + y \sin. D$;

ou, divisant toute l'équation par sin. D et réduisant, il viendra

$$\frac{1}{2} \cot. D\, y^2 + y = \frac{1}{2} \cot. D\, p^2 + q \left(\frac{\sin. a - \sin. b \cos. D}{\sin. D \cos. b} \right) \cos. p - p \left(\frac{\sin. b - \sin. a \cos. D}{\sin. D \cos. a} \right) + \frac{pq \cos. (a - b)}{\sin. D} - \frac{2 pq \sin. a \sin. b \sin.^2 \frac{1}{2} Z}{\sin. D} \quad \ldots\ldots \text{(F)}.$$

Mais dans le triangle apparent LZS, on a, en représentant respectivement par L et S les angles ZLS, ZSL formés au centre de la lune et du soleil par la distance apparente LS des deux astres et leurs distances respectives ZL, ZS au zénith, les équations

$$\cos. L = \frac{\cos. ZS - \cos. ZL \cos. LS}{\sin. ZL \sin. LS}, \text{ et } \cos. S = \frac{\cos. ZL - \cos. ZS \cos. LS}{\sin. ZS \sin. LS};$$

on, mettant à la place de ZS, ZL, LS les valeurs respectives $90°-b$, $90°-a$ et D de ces quantités, on a

$$\cos.L=\frac{\sin.b-\sin.a\cos.D}{\cos.a\sin.D}\ .\ .\ .\ .\ .\ (123),$$

$$\cos.S=\frac{\sin.a-\sin.b\cos.D}{\cos.b\sin.D}\ .\ .\ .\ .\ .\ (124).$$

Donc l'équation (F) se réduit à celle $\frac{1}{2}\cot.Dy^2+y=\frac{1}{2}\cot.Dp^2+q\cos.S\cos.p-p\cos.L+\frac{pq\cos.(a-b)}{\sin.D}-\frac{2pq\sin.a\sin.b\sin.^2\frac{1}{2}Z}{\sin.D}$;

Mais $q\cos.S\cos.p$ ne diffère pas d'un dix millième de seconde de $q\cos.S$; donc l'équation précédente se réduira à celle

$$\frac{1}{2}y^2\cot.D+y=\frac{1}{2}p^2\cot.D+q\cos.S-p\cos.L+\frac{pq\cos.(a-b)}{\sin.D}-\frac{2pq\sin.a\sin.b\sin.^2\frac{1}{2}Z}{\sin.D}\ .\ .\ .\ .\ .\ (H);$$

soit fait le second membre de cette équation $=m$, ce qui nous donnera celle $\frac{1}{2}y^2\cot.D+y=m$, ou $y^2+2\tang.Dy=2m\tang.D$, donc $y=-\tang.D\pm\sqrt{[\tang.^2D+2m\tang.D]}=-\tang.D[1\mp\sqrt{1+2m\cot.D}]$. Mais $\sqrt{1+2m\cot.D}=1+m\cot.D-\frac{1}{2}m^2\cot.^2D+\frac{1}{2}m^3\cot.^3D-$etc. Donc, ne prenant que le signe supérieur du radical, car l'inférieur ne donneroit qu'une absurdité, on aura

$$y=m-\frac{1}{2}m^2\cot.D+\frac{1}{2}m^3\cot.^2D\ .\ .\ .\ .\ .\ (I).$$

Remettant la valeur de m, et négligeant les termes affectés des puissances de p, et, à plus forte raison, de q, supérieures à la seconde, on aura

$$y=\frac{1}{2}p^2\cot.D+q\cos.S-p\cos.L+pq\frac{\cos.(a-b)}{\sin.D}-\frac{2pq\sin.a\sin.b\sin.^2\frac{1}{2}Z}{\sin.D}-\frac{1}{2}q^2\cos.^2S\cot.D-\frac{1}{2}p^2\cos.^2L\cot.D+pq\cos.S\cos.L\cot.D.$$

Cette équation qui cesse d'être symétrique par rapport à p et q, quoiqu'elle dût l'être, si nous avions traité l'une de ces deux quantités comme l'autre, c'est-à-dire, si nous n'avions pas négligé dès le commencement le terme multiplié par $\sin.^2\frac{1}{2}q$ ou $\frac{1}{4}q^2$, puisque p et q entrent symétriquement dans les élémens du calcul, le deviendra en ajoutant au second membre la quantité $\frac{1}{2}q^2\cot.D$. Donc, fai-

sant attention que $\frac{1}{2}p^2 \cot. D - \frac{1}{2}p^2 \cot. D \cos.^2 L = \frac{1}{2}p^2 \cot. D \sin.^2 L$, et que $\frac{1}{2}q^2 \cot. D - \frac{1}{2}q^2 \cot. D \cos.^2 S = \frac{1}{2}q^2 \cot. D \sin.^2 S$, on aura

$$y = q\cos. S - p\cos. L + \tfrac{1}{2}\cot. D(p^2 \sin.^2 L + q^2 \sin.^2 S + 2pq\cos. S\cos. L) +$$
$$\left(\frac{\cos.(a-b) - 2\sin. a \sin. b \sin.^2 \frac{1}{2}Z}{\sin. D}\right)pq \; . \; . \; . \; . \; (K);$$

mais le facteur de $pq = \frac{\cos. a\cos. b + \sin. a\sin. b - \sin. a\sin. b + \sin. a\sin. b\cos. Z}{\sin. D}$ $= \frac{\cos. a\cos. b + \sin. a\sin. b\cos Z}{\sin. D}$, et substituant la valeur de $\cos. Z = \frac{\cos. D - \sin. a\sin b}{\cos. a\cos. b}$ (éq. A), on a ce facteur $= (\cos.^2 a\cos.^2 b + \sin. a\sin. b\cos. D - \sin.^2 a\sin.^2 b)$: $\sin. D\cos. a\cos. b = \frac{\cos.(a+b)\cos.(a-b) + \sin. a\sin. b\cos. D}{\sin. D\cos. a\cos. b}$; donc l'équation K devient

$$y = q\cos. S - p\cos. L + \tfrac{1}{2}p^2 \sin.^2 L\cot. D + \tfrac{1}{2}q^2 \sin.^2 S\cot. D - pq\cos. S\cos. L\cot. D +$$
$$\frac{pq\cos.(a+b)\cos.(a-b)}{\sin. D\cos. a\cos. b} + pq\,\text{tang.}\, a\,\text{tang.}\, b\cot. D \; . \; . \; . \; (125).$$

Il est aisé de voir que dans cette dernière équation les deux premiers termes du second membre sont les principaux de la valeur de y, et qu'enfin si nous avions négligé les termes du second degré par rapport à p et q, la valeur de y auroit été donnée par l'équation

$$y = q\cos. S - p\cos. L \; . \; . \; . \; . \; . \; (126),$$

laquelle est donnée directement par le calcul différentiel, ainsi qu'on peut le voir à la note XXVI.

Mais avant de déterminer les cas où l'on pourra se servir seulement, et avec une approximation suffisante de l'équation 126, examinons attentivement celle 125, ce qui nous fera faire les observations suivantes.

276. 1.° Si la distance apparente D est $< 90°$, les angles S et L sont d'affections différentes; car, dans ce cas-là, si on a $\sin. a\cos. D < \sin. b$, ou $\cos. D < \frac{\sin. b}{\sin. a}$, ce qui donne $L < 90°$ (éq. 123), on aura $\cos. D > \frac{\sin. a}{\sin. b}$ ou $\sin. b\cos. D > \sin. a$, ce qui donne $S > 90°$ (éq. 124); et réciproquement, si $\cos. D > \frac{\sin. b}{\sin. a}$, d'où $L > 90°$, on aura $\cos. D < \frac{\sin. a}{\sin. b}$, d'où $S < 90°$. Donc, lorsque $D < 90°$, les deux premiers termes de la valeur de y dans l'équation (125) sont négatifs si $\cos. D < \frac{\sin. b}{\sin. a}$, et positifs si $\cos. D > \frac{\sin. b}{\sin. a}$; mais pour l'un et l'autre cas représentés par $\cos. D \lessgtr \left(\frac{\sin. b}{\sin. a}\right)$, les troisième, quatrième, cinquième et dernier termes,

de l'éq. (125) sont positifs; quant au sixième terme, il sera aussi positif, lorsque la somme $a+b$ des hauteurs apparentes sera $< 90°$.

Donc, lorsque $D < 90°$, et $\cos. D > \frac{\sin. b}{\sin. a}$, la correction y sera positive, c'est-à-dire que la distance vraie sera plus grande que l'apparente : et puisque la valeur de y dépend presque entièrement des deux premiers termes $q \cos. S - p \cos. L$, on pourra conclure que lorsque $D < 90°$ et $\cos. D < \frac{\sin. b}{\sin. a}$, la valeur de y est négative, c'est-à-dire, que la distance apparente est plus grande que la vraie.

277. 2.° Mais si $D > 90°$, alors il est clair que cos. D devenant négatif, l'on aura toujours les deux angles L et $S < 90°$ (éq. 123 et 124). Ainsi, chacun des deux termes principaux $q \cos. S$ et $p \cos. L$ de la valeur de y conserve le signe qu'il a dans l'équation (125). Mais l'on a les troisième, quatrième et dernier termes du second membre de cette équation, qui deviennent négatifs; le cinquième devient positif et le sixième reste, comme dans l'article précédent, positif si $a+b < 90°$, et devient négatif si $a+b > 90°$.

La valeur de y dépendant presqu'entièrement des deux premiers termes $q \cos. S$ et $p \cos. L$, l'on en conclura que lorsque $D > 90°$, la quantité y sera positive ou négative, suivant que $q \cos. S$ est plus grand ou plus petit que $p \cos. L$. Mais à cause que p est beaucoup plus grand que q, il ne peut qu'être extrêmement rare que $q \cos. S > p \cos. L$; donc, presque toujours la distance vraie des deux astres est plus petite que l'apparente, lorsque cette dernière est plus grande que 90°.

278. Le cas le plus défavorable à la méthode donnée par l'équation 125, lorsqu'on néglige tous les termes du second degré, par rapport à p et q, c'est-à-dire, lorsqu'on ne calcule la valeur de y que par le moyen de l'équation 126, est celui où l'on auroit à peu près $D = 40°$, $a = 14°$, $b = 6°$ $p = 54'40''$ et $q = 8'$; ce cas-là donne $q \cos. S = 2'2''$, $-p \cos. L = 7'5''$, $\frac{1}{2} p^2 \sin.^2 L \cot. D = 29''$; $\frac{pq \cos.(a+b) \cos.(a-b)}{\sin. D \cos. a \cos. b} = 12''$; $\frac{1}{2} q^2 \sin.^2 S \cot. D = 1''$; $- pq \cos. S \cos. L \cot. D = 0'',3$, et pq tang. a tang. $b \cot. D = 0'',2$; donc y est à moins d'une seconde près $= 9'50''$. Si l'on avoit calculé la valeur de y par le moyen de la seule formule (126), l'on n'auroit eu que $y = 9'7''$, ainsi l'erreur auroit été de 43''; ce qui en fait une de près de 21'30'' dans la longitude (*).

(*) En effet, nous avons vu à la note XXIV (article 2), que l'erreur en longitude étoit sensiblement égale à 30 fois celle commise dans la distance vraie; donc dans ce cas-ci l'erreur en longitude seroit de $30 \times 43'' = 21'30''$.

Mais, même dans ce cas, le plus défavorable possible, les quatrième, cinquième et derniers termes de la formule (125) ne donnent pas 2″ d'erreur pour la valeur de y, et par conséquent pas 1′ d'erreur pour la longitude; l'on peut donc, dans tous les cas possibles, et qui ne sortent pas des limites prescrites dans l'observation de la longitude pour la mesure de la distance de la lune au soleil, réduire la formule 125 à la suivante $y = q \cos. S - p \cos. L + \frac{1}{2} p^2 \sin.^2 L \cot. D + \frac{pq \cos.(a+b) \cos.(a-b)}{\sin. D \cos. a \cos. b}$; ou pour plus de facilité dans le calcul, et pour avoir les deux derniers termes en secondes de degrés,

$$y = q \cos. S - p \cos. L + \frac{\sin.^2 p \sin.^2 L \cot. D}{\sin. 2''} + \frac{\sin. p \sin. q \cos.(a+b) \cos.(a-b)}{\sin. D \cos. a \cos. b \sin. 1''} \ldots (127).$$

Or, il existe une infinité de cas, et c'est même le plus souvent, que le troisième terme, et à plus forte raison le quatrième terme de cette valeur de y, ne donnent pas 2 secondes d'erreur pour y, et par conséquent pas une minute d'erreur en longitude; ce qui aura lieu lorsque la distance apparente du soleil à la lune étant entre 70° et 120°, les hauteurs des deux astres observés, et surtout celle de la lune, est suffisamment grande; ce qui diminue les facteurs cot. D et $\sin.^2 p$ du troisième terme, et augmente le facteur sin. D du dénominateur du quatrième terme. Ainsi, dans ces cas-là, tout se réduit au calcul des formules 125 et 124 ou respectivement à celui des formules

$$\sin. \tfrac{1}{2} L = \sqrt{\left(\frac{\cos. \frac{1}{2}(D+a+b) \sin. \frac{1}{2}(D+a-b)}{\cos. a \sin. D}\right)} \ldots\ldots (128),$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\left(\frac{\cos. \frac{1}{2}(D+a+b) \sin. \frac{1}{2}(D+b-a)}{\cos. a \sin. D}\right)} \ldots\ldots (129),$$

et au calcul de la formule

$$y = q \cos. S - p \cos. L \ldots\ldots (126, \text{art. } 275).$$

279. Si l'on fait attention, 1.° qu'une grande partie du calcul du sinus de la moitié de l'un des deux angles au centre L et S sert pour l'autre; 2.° qu'il n'est pas nécessaire de porter l'exactitude de ces angles à 5″ près, puisque les derniers chiffres décimaux de cos. S et de cos. L ne peuvent influer respectivement sur le nombre entier de secondes de q cos. S et de p cos. L; 3.° qu'on peut faire tout ce calcul avec seulement les cinq premiers chiffres décimaux des logarithmes; 4.° que quand même on voudroit avoir égard au troisième terme $\frac{\sin.^2 p \sin.^2 L \cot. D}{\sin. 2''}$ de la formule 127, ce qui, ordinairement, est inutile, le calcul de cette formule est



EXEMPLE I. Étant donnée la distance apparente 116° 3 parallaxe 2′ 28″
pour le soleil, et l

Calcul de l'angle au centre du Soleil S (équat. u *Calcul.*

Distance apparente ⊙ ☾	116° 39′ 40″	com. ar. log. sin.	0,0	116° 39′ 44″
Hauteur apparente ⊙	18 52 30	com. ar. log. cos.	0,0	37 18 —
Hauteur apparente ☾	44 26 50	. . . .		116 2 26
Somme.	179 59 0			
Demi-somme.	89 59 30	log. cos.	6,	
Demi-somme. — Hauteur appar. ☾	45 32 40	log. sin.	9.	

ux derniers termes de
un dixième près, la
tte distance réduite;

Somme. 16,
lcul de ces deux ter-

Demi-somme. 8,
erreur bien sensible,

Qui est la log. sin. $\frac{1}{2}$ S = 0° 38′
ron 30″ en longitude.

Donc S = 1 16

Réfract. — Parallaxe du soleil = 148″ . .

39′ 46″ —
2 28 +
37 18 —

EXEMPLE II. Étant donnée la distance apparente 108° axe 7′ 43″ pour
le soleil, et la p

Calcul de l'angle au centre du Soleil S (équat. *Calcul.*

Distance apparente ⊙ ☾	108° 42′ 0″	com. ar. log. sin.	0,0	108° 42′ 3″
Hauteur apparente ⊙	6 27 30	com. ar. log. cos.	0,0	14 22 —
Hauteur apparente ☾	54 12 0	. . . .		108 27 41
Somme.	169 21 30			
Demi-somme.	84 40 50	log. cos.	8,	
Demi-somme. — Hauteur appar. ☾	30 28 50	log. sin.	9.7	

x derniers termes de
ur correction de ce

Somme. 18,6
= 0″, 1

Demi-somme. 9,

Qui est la log. sin. $\frac{1}{2}$ S = 12° 55′
ger sans une erreur

Donc S = 25 50

Réfract. — Parallaxe du soleil = 463″ .

= 21′ 19″ —
6 57 +
. 14 22 —



des plus simples, puisqu'il n'y a point de parties proportionnelles à prendre : on ne pourra s'empêcher d'avouer que cette méthode de réduction des distances, est une des plus simples que l'on puisse trouver ; mais elle exige encore plus que toute autre, une grande exactitude dans le calcul de la parallaxe de hauteur de la lune, et dans la correction de la réfraction relative aux hauteurs du baromètre et du thermomètre, puisque la valeur de y dépend absolument de celles de p et de q.

Nous faisons dans le tableau précédent, et en regard de cette page, l'application de cette méthode à deux exemples : le premier est celui que nous avons pris à l'art. 264, pour appliquer la méthode de Borda ; le second est celui auquel Legendre a appliqué sa méthode de réduction. (*Voyez* le tome VI des *Mémoires de l'Institut de France.*)

CHAPITRE ONZIÈME.

Du calcul de la distance du centre de la lune à celui du soleil, ou à une étoile pour Paris, aux heures où l'on doit les connoître pour pouvoir calculer la longitude en mer par l'observation des distances de ces deux astres.

Il peut arriver qu'étant en mer, l'occasion se présente d'observer la distance de la lune à une étoile, dont la distance pour Paris n'est pas marquée dans *la Connoissance des Temps*, et même l'on peut être dans ce cas-là pour la distance de la lune au soleil, qui n'est marquée dans *la Connoissance des Temps* que jusqu'à environ 120 degrés ; cependant l'on peut, avec le cercle de réflexion, observer de très-bonnes distances, quoiqu'un peu plus grandes que 120 degrés. Voici donc les moyens qu'on emploiera pour obvier à cet inconvénient.

280. Commençons par déterminer la distance réelle des centres de la lune et du soleil, pour une heure vraie déterminée de Paris.

Considérant le triangle sphérique rectangle formé par la différence en longitude des deux astres, leur distance cherchée et la latitude de la lune, le tout pour l'heure vraie demandée, on aura

$$\text{cos. dist.} \odot \text{☾} = \text{cos. diff. en long.} \odot \text{ et ☾} \times \text{cos. latitude ☾} \ldots\ldots (130).$$

Or, la longitude du soleil est calculée pour le midi vrai de chaque jour, dans *la Connoissance des Temps*, et comme elle croît par un mouvement sensiblement uniforme, l'on pourra aisément trouver, par les parties proportionnelles, celle qui convient à l'heure vraie indiquée.

Mais il n'en est pas malheureusement de même pour les longitudes et latitudes de la lune qui, quoique calculées dans *la Connoissance des Temps* pour le midi et le minuit vrai de chaque jour, varient si peu uniformément dans douze heures, que l'on ne peut guère considérer comme sensiblement constantes que les différences quatrièmes des longitudes et latitudes de la lune données de 12 en 12 heures; il faut donc, lorsqu'on veut avoir ces quantités pour des heures intermédiaires, telles que celles 3^h, 6^h et 9^h, qui sont justement les heures pour lesquelles on doit calculer les distances pour Paris, avoir recours à la méthode des *interpolations*, laquelle consiste à trouver un terme intermédiaire entre deux termes d'une série dans laquelle les différences première, seconde, ... $n.^{ième}$ sont variables (*). Or, si l'on représente par

$$y, y', y'', y''' \ldots\ldots\ldots$$

la suite de termes entre lesquels on veut interpoler d'autres termes; par Δy, $\Delta\Delta y$, $\Delta^3 y$ ..... $\Delta^n y$, les différences première, seconde, troisième ..... $n.^{ième}$ de ces termes, et par x le nombre d'espaces et parties d'espaces uniformes compris depuis le premier terme y jusqu'à celui qu'on veut interpoler, que nous représentons par $y^{(x)}$, on aura, ainsi que nous le démontrons à la note XXVII, l'équation

$$y^{(x)} = y + x\Delta y + \frac{x(x-1)}{2}\Delta\Delta y + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\Delta^3 y + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{2.3\ldots.n}\Delta^n y \ldots (A).$$

Cela posé, représentant par $\lambda, \lambda', \lambda''$ et λ''' quatre longitudes successives prises dans la *Connoissance des temps*, dont les deux premières précèdent celle qu'on veut interpoler entre λ', λ'', et dont les deux dernières suivent, on aura $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$, $\lambda'' - \lambda' = \Delta\lambda'$, et $\lambda''' - \lambda'' = \Delta\lambda''$; d'où $\Delta\lambda' - \Delta\lambda = \Delta\Delta\lambda$, $\Delta\lambda'' - \Delta\lambda' = \Delta\Delta\lambda'$,

(*) En mathématiques la méthode des *interpolations* consiste à trouver une courbe analytique qui passe par un nombre donné de points. Telle seroit la solution du problème suivant : Etant données par l'observation, les trois coordonnées rectangulaires de n points dans l'espace de la trajectoire d'un projectile, trouver l'équation d'une courbe analytique qui touche la trajectoire en ces n points. Ainsi l'on voit qu'en astronomie et en mathématiques le mot *interpolation* indique des choses différentes.

et $\Delta\Delta\lambda' - \Delta\Delta\lambda = \Delta^3\lambda$. Donc représentant par (λ) le terme qu'on veut interpoler, et faisant attention que ce terme est précédé d'un espace de 12 heures, que nous représenterons par l'unité, et d'une fraction $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ de cet espace; ce qui donne $x = 1 + \frac{1}{z}$ en faisant $z = 4$, ou 2, ou $\frac{4}{3}$, suivant qu'on calcule pour 3^h ou 6^h ou 9^h, on aura

$$(\lambda) = \lambda + \left(1 + \frac{1}{z}\right)\Delta\lambda + \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z}}{2}\Delta\Delta\lambda - \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)}{2\,.\,3}\Delta\lambda^3;$$

ou $(\lambda) = \lambda + \Delta\lambda + \frac{1}{z}\Delta\lambda + \text{etc.}$ Mais $\lambda + \Delta\lambda = \lambda'$; donc

$$(\lambda) = \lambda' + \frac{1}{z}(\Delta\lambda + \Delta\Delta\lambda) - \frac{z-1}{2z^2}\Delta^2\lambda - \frac{(z+1)(z-1)}{2.3z^3}\Delta^3\lambda \;.\;.\;.\;.\; (B).$$

Or, $\Delta\lambda + \Delta\Delta\lambda = \Delta\lambda'$, et les deux derniers termes de l'équation (B) ont pour facteur commun $\frac{z-1}{2z^2}$; donc cette équation deviendra

$$(\lambda) = \lambda' + \frac{1}{z}\Delta\lambda' - \frac{z-1}{2z^2}\left(\Delta^2\lambda + \frac{z+1}{3z}\Delta^3\lambda\right) \;.\;.\;.\;.\;.\; (131).$$

Observons maintenant que les deux premiers termes $\lambda' + \frac{1}{z}\Delta\lambda'$ de la valeur cherchée de la longitude (λ), se composent de celle λ' du midi ou minuit immédiatement précédent, plus la partie proportionnelle $\frac{1}{z}\Delta\lambda'$ de la différence de la longitude précédente λ' à la suivante λ'' qui convient au temps pour lequel on calcule. Ainsi la dernière partie $\frac{z-1}{2z^2}\left[\Delta^2\lambda + \frac{z+1}{3z}\Delta^3\lambda\right]$ n'est que la correction qu'il faut faire à la longitude approchée de la lune, d'abord calculée comme celle du soleil, c'est-à-dire en lui supposant un mouvement uniforme.

$$\text{Cette correction est pour....}\begin{cases} 3^h & -\frac{3}{32}\left[\Delta^2\lambda + \frac{5}{12}\Delta^3\lambda\right] \\ 6 & -\frac{1}{8}\left[\Delta^2\lambda + \frac{1}{2}\Delta^3\lambda\right] \\ 9 & -\frac{3}{32}\left[\Delta^2\lambda + \frac{7}{12}\Delta^3\lambda\right] \end{cases} \;.\;.\;.\;.\; (132).$$

Soit, par exemple, demandée la longitude de la lune pour le 16 juillet 1808, à 3 heures après midi.

Je commence à calculer cette longitude, comme si elle croissoit d'un mouvement uniforme, ainsi qu'il suit :

Long. ☾ le 16 à midi. . .	33^s	9′	0″
Long. ☾ le 17 à minuit. .	39	3	22
Différence en 12^h.	5	54	22
Différence en 3^h.	1	28	35,5
Donc, long. app. ☾ à 3^h.	34	37	35,5.

Corrigeons maintenant cette longitude par le moyen de la première des formules (152).

Longitudes de la ☾		Prem. diff.	Sec. diff.	Troisiè. diff.
Le 15 à minuit.	27° 14′ 42″	5 54 18		
Le 16 à midi.	33 9 0	5 54 22	0′ 4″	40″
Le 16 à minuit.	39 3 22	5 55 6	0′ 44″	
Le 17 à midi.	44 58 28			

Donc $\Delta^2\lambda = 4''$, $\Delta^3\lambda = 40''$; ce qui donne la correction à appliquer à la longitude déjà trouvée $= \frac{-3}{32}\left(4'' + \frac{5}{12} \times 40''\right) = -2''$; ainsi la vraie longitude de la lune le 16 juillet 1808 à 3^h, temps vrai, est $54° 37' 35'',5 - 2'' = 54° 37' 33'',5$.

281. Mais au lieu de ce calcul, on peut se servir de la petite table XIX (*), qui sert également pour avoir la correction à faire aux longitude et latitude de la lune déjà calculées par approximation, en supposant les mouvemens de ces quantités uniformes. Voici l'usage de cette table en l'appliquant tout de suite à l'exemple précédent.

Ajoutez les deux secondes différences 4″ et 44″, ce qui donne 48″; prenez la moitié de cette somme qui est 24″ ou les 0,4 d'une minute; cherchez dans la colonne qui a en tête 1′, le nombre qui correspond à 3^h: vous trouverez 6″ dont les 0,4 sont 2″, 4, ce qui est la correction à soustraire de la longitude déjà trouvée.

Cette correction est un peu plus grande que celle que nous avons trouvée précédemment, parce qu'il est évident que le calcul tabulaire est toujours moins exact que le direct.

Si les premières différences vont d'abord en croissant et ensuite en décroissant, ou réciproquement, on aura la seconde différence moyenne en retranchant la plus petite seconde différence de la plus grande, et en prenant la moitié du reste; la correction que l'on trouvera par la table sera additive ou soustractive, selon que la première différence sera plus grande ou moindre que la troisième.

On opérera pour les latitudes de même que pour les longitudes; mais si les latitudes changent de dénomination, l'on prendra la somme des deux consécutives de dénomination contraire pour avoir leur première différence.

Si les quatre latitudes vont d'abord en croissant, puis en décroissant, on ajoutera la première différence qui précède la plus grande latitude avec la première

(*) Cette table est extraite de la *Connoissance des temps* de 1788.

différence qui la suit, la somme sera la seconde différence correspondante à ces deux premières; et, dans ce cas, la correction sera toujours additive à la latitude trouvée par les parties proportionnelles. Faisons une application de cette méthode, à la recherche de la latitude de la lune pour la même époque que celle pour laquelle nous avons trouvé ci-dessus la longitude.

Latitudes de la ☾ toutes boréales.			Prem. diff.	Sec. diff.
Le 15 juillet	à minuit.	1° 54′ 34″		
			29 53	
Le 16	à midi. .	1 24 41		54
			30 47	
Le 16	à minuit.	0 53 54		39
			31 26	
Le 17	à midi. .	0 22 28		
			Somme.	93
			½ somme.	46

qui correspond dans la table XIX à 4″, 6; donc la latitude demandée de la lune, le 16 juillet 1808, à 3^h, est $1° 24' 41'' - \frac{30' 47}{4} + 4'', 6 = 1° 17' 4''$.

Ayant la longitude et la latitude de la lune, il nous sera aisé de trouver, pour la même époque, la distance de cet astre au soleil: car l'on trouve, dans la *Connoissance des temps*, que la longitude du soleil le 16 juillet 1808, à 3^h, est $113° 39' 54'' + \frac{57' 15''}{8} = 113° 47' 3''$. Or, la longitude de la lune pour la même époque est de 34° 37′ 33″; donc la différence en longitude des deux astres est de 79° 9′ 30″: cela posé, voici le calcul de la distance par le moyen de la formule 130:

Différence en longit. ☉ ☾.	79° 9′ 30″	log. cos.	9,2743786
Lat. ☾.	1 17 4	log. cos.	9.9998909
		Somme.	9,2742695

qui est le log. cos. de la distance cherchée 79° 9′ 40″ des centres du soleil et de la lune pour Paris, le 16 juillet 1808, à 3^h après midi temps vrai.

282. Pour calculer la distance du centre de la lune à une étoile pour Paris, à une heure déterminée, il faut calculer les longitude et latitude de la lune pour l'heure indiquée, ainsi que nous l'avons fait précédemment; calculer de même les longitude et latitude de l'étoile dont on veut avoir la distance à la lune pour ce jour-là, par le moyen des formules 14, 15 (art. 100) et 11, 12 (art. 99) (*);

(*) L'on trouve dans la *Connoissance des temps* de chaque année l'ascension droite et la décli-

par ce moyen-là on connoîtra dans le triangle sphérique formé par la distance cherchée des deux astres, et leurs distances respectives au pôle élevé de l'écliptique, ces deux derniers côtés, et l'angle compris qui est la différence en longitude des deux astres; on aura donc la distance demandée par le moyen de l'équation

$$\text{cos. dist. de la lune à l'étoile} = \pm \text{sin. lat. lune} \times \text{sin. lat. étoile} + \text{cos. lat. lune} \times \text{cos. lat. étoile} \times \text{cos. diff. en long. lune et étoile} \ldots (133).$$

Le signe + lorsque les latitudes des deux astres sont de même dénomination, le signe — dans le cas contraire.

Pour soumettre cette formule au calcul logarithmique, faisons

$$\text{tang. M} = \text{cot. lat. lune} \times \text{cot. lat. étoile} \times \text{cos. diff. en long. lune et étoile} \ldots (134),$$

d'où

$$\text{cos. dist. de la lune à l'étoile} = \pm \frac{\text{sin. lat. lune sin. lat. étoile sin. } (45^\circ \pm M)\sqrt{2}}{\text{cos. M}} \ldots (135).$$

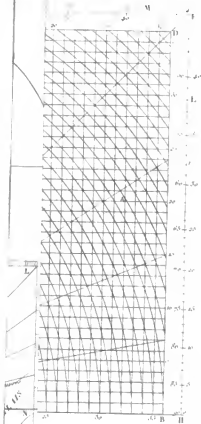
Les signes supérieurs lorsque les deux latitudes sont de même dénomination, les inférieurs dans le cas contraire.

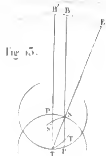
---

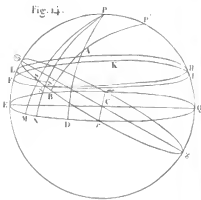
naison des principales étoiles, ce qui permet de calculer leurs longitude et latitude, comme nous venons de l'indiquer. Mais il me semble qu'il seroit à propos d'éviter cette peine aux marins, en ajoutant aux catalogues des étoiles que l'on met dans la *Connoissance des temps*, les latitudes et longitudes de ces astres.

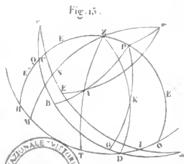
FIN DU TRAITÉ DE NAVIGATION.

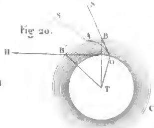
Pl. I.



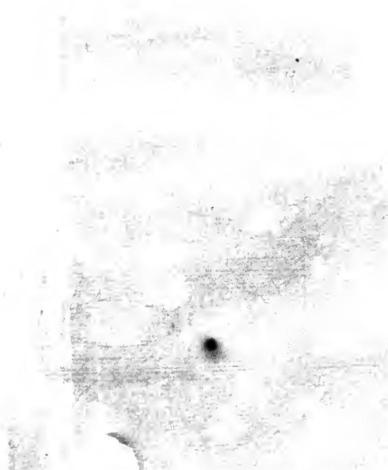

Fig. 13.

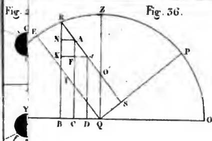

Fig. 14.


Fig. 15.


Fig. 20.







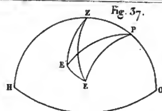



Fig. 39.

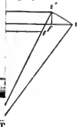



Fig. 40.

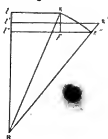



Fig. 41.

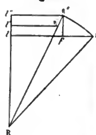



Fig. 43.

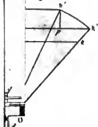



Fig. 44.

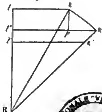
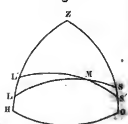



Fig. 45.



NOTES

SUR LE TRAITÉ DE NAVIGATION.

NOTE PREMIÈRE.

Sur la Figure de la Terre (*).

1. D'APRÈS les opérations géodésiques de Picard, à la fin du dix-septième siècle; celles des académiciens à l'équateur et au nord, vers le milieu du dix-huitième siècle; celles surtout de Delambre et Méchain à la fin du dernier siècle et au commencement de celui-ci; et enfin d'après les observations qu'ont faites les mêmes savans sur la longueur du pendule par différentes latitudes : il est prouvé que la terre est aplatie vers les pôles, et que conséquemment les degrés du méridien augmentent à mesure qu'ils s'approchent des pôles, puisqu'ils appartiennent à des cercles osculateurs d'un plus grand rayon, comme étant d'une

(*) Cette note est tirée en grande partie d'un mémoire que je composai en 1798, temps où l'on sait que les savans astronomes Delambre et Méchain mesuroient l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone. Ce mémoire soumis à l'examen du bureau des longitudes, fut approuvé par cette société d'illustres savans. Cependant je l'aurois regardé en grande partie comme inutile, si les méthodes extrêmement ingénieuses et savantes développées dans l'ouvrage de M. Delambre (*Méthode analytique employée dans le calcul de la méridienne de France*), ne s'étoient pas trouvées insuffisantes, à cause de l'irrégularité remarquable dont est affectée la partie de la méridienne qui a été mesurée avec une exactitude merveilleuse par les deux savans astronomes chargés de cette opération. Mais cette contrariété à laquelle on ne s'attendoit certainement pas, obligeant de comparer ce nouvel arc mesuré avec celui que Bouguer, La Condamine et Godin mesurèrent il y a 63 ans sous l'équateur, afin de pouvoir déterminer l'aplatissement du sphéroïde terrestre; j'ai imaginé que les géomètres ne verroient pas, sans quelqu'intérêt, mes méthodes qui s'appliquent à ces comparaisons d'arcs de la méridienne mesurés par des latitudes éloignées.

moindre courbure. Or, quelle que soit la loi suivant laquelle se fait cet accroissement, il est clair que n étant une quantité que déterminent les opérations géodésiques, on pourra considérer les différences successives des longueurs des degrés du méridien à celui de ces degrés qui est coupé par l'équateur, comme croissant dans le rapport des $n.^{ièmes}$ puissances de sinus des latitudes de ces degrés. Cela posé, résolvons le problème suivant, qui est le plus général possible dans son espèce.

2. Problème. *Etant connu par des opérations géodésiques et des observations astronomiques, que des très-petits arcs du méridien terrestre qui répondent à des arcs du méridien céleste égaux entr'eux, croissent en longueur absolue, de manière que les différences respectives de ces arcs à celui qui est sous l'équateur augmentent dans le rapport des $n.^{ièmes}$ puissances des sinus de leurs latitudes respectives, déterminer l'équation générale des méridiens terrestres.*

Solution. Soient A, A' et A'' trois de ces trois petits arcs du méridien terrestre répondant à des différences égales en latitude vraie, par exemple, d'un degré; le premier de ces trois arcs étant coupé par l'équateur, le second se trouvant par une latitude quelconque L, et le troisième étant sous un des deux pôles. Faisons le demi-axe de rotation de notre planète égal à l'unité, et le demi-diamètre de son équateur $=a=1+\omega$, en représentant par ω la différence $a-1$ des demi-axes de la planète, ou l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

La propriété supposée au méridien donne la proportion

$$A'-A:A''-A::\sin.^n L:1\;\ldots\ldots(m).$$

Mais représentant par R, R' et R'' les rayons osculateurs respectifs des arcs A, A' et A'' du méridien, on aura les deux proportions géométriques

$$R:R'::A:A' \text{ et } R:R''::A:A'';$$

Donc

$$R'-R:R::A'-A:A \text{ et } R''-R:R::A''-A:A,$$

d'où

$$A'-A:A''-A::R'-R:R''-R;$$

et substituant ce second rapport à la place du premier dans la proportion (m), il vient celle

$$R'-R:R''-R::\sin.^n L:1$$

d'où

$$R'=(R''-R)\sin.^n L+R\;\ldots\ldots(n).$$

Mais représentant par y et x les coordonnées rectangulaires du méridien, et

prenant les abscisses x sur le diamètre de l'équateur depuis le centre de la terre, on a les deux équations suivantes :

$$y = (R'' - R)\int \sin.^n L\, d\sin. L + R \sin. L + \text{const.} \ldots\ldots (p)\ (*)$$

$$x = (R'' - R)\int \sin.^n L\, d\cos. L + R \cos. L + \text{const.} \ldots\ldots (q).$$

L'intégration de l'équation (p) étant effectuée, on a complètement

$$y = \frac{R'' - R}{n+1} \sin.^{n+1} L + R \sin. L \ldots . (r);$$

et faisant d'abord $n =$ à un nombre pair, l'intégration effectuée de l'équation (q) donnera

$$x = \frac{(R'' - R)\cos. L}{n+1}\Big(\sin.^n L + \frac{n}{n-1}\sin.^{n-2} L + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\sin.^{n-4} L \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{4.6.\ldots\ldots\ldots n}{3.5.7\ldots(n-1)}\sin.^2 L + \frac{2.4.6.\ldots\ldots n}{1.3.5\ldots(n+1)}\Big) + R\cos. L \ldots . (s)$$

sans constante ; car, lorsque $L = \frac{\pi}{2}$ (**), on a $x = 0$, et $\cos. L = 0$.

(*) Dans le triangle rectiligne rectangle formé dans une courbe plane par la tangente d'un arc quelconque, sa soutangente et son ordonnée, on a la tangente trigonométrique de l'angle qus font entr'elles l'ordonnée et la tangente qui est égale à $\frac{dx}{dy}$. Mais l'angle formé par la normale et la sous-normale, qui n'est autre chose que l'angle de latitude L relativement au méridien terrestre, est égal à l'angle dont nous venons de dire que la tangente trigonométrique est $\frac{dx}{dy}$; donc tang. $L = \pm\frac{dx}{dy}$ ou $\frac{\sin. L}{\sqrt{1 - \sin.^2 L}} = \pm\frac{dx}{dy}$: carrant et chassant les dénominateurs, il vient $\sin.^2 L\, dy^2 = dx^2 - dx^2 \sin.^2 L$, d'où on tire $\sin. L = \frac{dx}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}$, et différenciant en prenant dx constante, on aura $d\sin. L = dy \times \frac{-dx\, ddy}{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}$; or, représentant par R′ le rayon osculateur correspondant à L, on a le dernier facteur différentiel de la valeur de $d\sin. L$ qui est égal à $\frac{1}{R'}$; donc $dy = R' d\sin. L$; substituant dans cette équation la valeur de R′ (éq. n), et intégrant, on a l'équation (p). De l'équation tang. $L = \pm\frac{dx}{dy}$, on tire $dy = \pm\frac{\cos. L\, dx}{\sin. L}$, et substituant la valeur de dy $(= R' d\sin. L)$, il vient $R' \cos. L\, dL = \pm\frac{\cos. L\, dx}{\sin. L}$, ou $R' \sin. L\, dL = \pm dx$, d'où $dx = \mp R' d\cos. L$; le signe $-$ lorsque les abscisses et ordonnées varient dans le même sens, le signe $+$ dans le cas contraire; ainsi dans le cas que nous traitons, nous prenons le signe positif : ensuite substituant la valeur de R′ (éq. n), et intégrant, nous avons l'équation (q).

(**) Nous représentons, suivant l'usage, la circonférence du cercle dont le rayon est l'unité par 2π; ainsi $\frac{\pi}{2}$ est le quart de la circonférence du cercle qui sert à mesurer toutes les grandeurs angulaires, et pour lequel sont calculées les tables des lignes trigonométriques.

Actuellement, afin de déterminer les valeurs de R et de R″, faisons $L=\frac{\pi}{2}$, ce qui donne évidemment $y=$ au demi-petit axe 1, et sin. L $=1$; donc, alors l'équation (r) se réduit à celle $\frac{R''-R}{n+1}+R=1$, d'où

$$R''=n+1-nR\ldots\ldots(t).$$

Faisant $L=0$, ce qui donne $x=a$ et sin. L $=0$; de plus, faisant, pour abréger,

$$b=\frac{2.4.6.\ldots\ldots\ldots n}{1.3.5\ldots(n-1)}\ldots\ldots(1),$$

on aura l'équation (s) qui se réduira à celle

$$a=\frac{(R''-R)b}{n+1}+R,$$

d'où l'on tire

$$R''=\frac{(n+1)(a-R)+b.R}{b}.$$

Eliminant R″ entre cette dernière équation et celle (t), il vient celle

$$R=\frac{b-a}{b-1}\ldots\ldots(2).$$

Substituant cette valeur de R dans l'équation (t), on a

$$R''=1+\frac{n\omega}{b-1}\ldots\ldots(3).$$

Retranchant l'équation (2) de celle (3), et faisant attention que R″—R est égal à la longueur absolue du quart de la développée du méridien, on aura, en représentant par Δ ce quart de développée, l'équation

$$R''-R=\Delta=\frac{(n+1)\omega}{b-1}\ldots\ldots(4).$$

Substituant les valeurs de R (éq. 2) et de R″—R (éq. 4) dans celles des coordonnées x et y [éq. (r) et (s)], on aura les deux équations

$$y=\frac{\omega\,\sin.^{n+1}L+(b-a)\sin.L}{b-1}\ldots\ldots(5)$$

$$x=\frac{\cos.L}{b-1}\Big[\omega\Big(\sin.^{n}L+\frac{n}{n-1}\sin.^{n-2}L+\frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\sin.^{n-4}L\ldots+$$
$$\frac{n(n-2)\ldots2}{(n-1)(n-3)\ldots1}\Big)+b-a\Big]\ldots\ldots(6).$$

Prenant dans l'éq. (5) la valeur de sin. L, et la substituant dans l'équation (6), on aura celle du méridien qui, évidemment, dans l'hypothèse actuelle de n nombre pair, sera une courbe algébrique.

Si n est un nombre impair, le méridien sera une courbe transcendante; mais il nous sera extrêmement aisé, en suivant la même marche que précédemment, de trouver les valeurs des coordonnées de la courbe en constantes et fonctions de la normale. En effet, l'équation (r) reste la même; mais celle (q) étant intégrée, et ajoutant la constante $\frac{n(n-2)\ldots.1}{2.4\ldots.(n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}$ afin que le tout s'évanouisse, lorsque $L=\frac{\pi}{2}$, on a complètement

$$x=\frac{(R''-R)}{n+1}\cos. L\left(\sin.^{n} L+\frac{n}{n-1}\sin.^{n-2} L+\frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\sin.^{n-4} L\ldots..+\frac{n(n-2)\ldots.3\sin. L}{(n-1)(n-3)\ldots.2}\right)+\frac{n(n-2)\ldots.1}{2.4\ldots(n+1)}\left(\frac{\pi}{2}-L\right)+R\cos. L\ldots\ldots(u).$$

Faisant $L=\frac{\pi}{2}$, l'éq. (t) reste la même, puisque l'éq. (r) n'a pas changé; mais en faisant $L=0$, et pour abréger

$$b'=\frac{n(n-2)\ldots..1}{2.4\ldots..(n+1)}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots(7),$$

l'équation (u) se réduit à celle $a=b'+R$, d'où

$$R=a-b'\ldots\ldots(8).$$

Substituant cette valeur de R dans l'équation (t), on a

$$R''=1+n(b'-\omega)\ldots\ldots(9);$$

donc

$$R''-R=\Delta=(n+1)(b'-\omega)\ldots\ldots(10).$$

Substituant la valeur de la développée du quart du méridien (éq. 10), et celle du rayon osculateur du méridien sous l'équateur (éq. 8) dans les équations (r) et (u), et multipliant le terme transcendant $\frac{n(n-1)\ldots..1}{2.4\ldots..(n+1)}\left(\frac{\pi}{2}-L\right)$ de la dernière de ces équations par 0,01570796, afin d'avoir x en fonctions du rayon ou demi-petit axe 1 (*), on aura

$$y=(b'-\omega)\sin.^{n+1}L+(a-b')\sin. L\ldots\ldots(11).$$

(*) En effet, on sait que l'arc $\frac{\pi}{2}$ ou le quart de la circonférence du cercle dont le rayon est l'unité,

$$x = \cos. L\left[(b' - \omega)\left(\sin.^{n} L + \frac{n}{n-1}\sin.^{n-2} L + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\sin.^{n-4} L + \ldots\ldots \frac{n(n-2)\ldots 3}{2.4\ldots(n+1)}\right) + a - b'\right] + \frac{n(n-2)\ldots 1}{2.4\ldots(n+1)}\left(\frac{\pi}{2} - L\right) 0{,}01570796 \ldots\ldots (12),$$

équations qui appartiennent au méridien du sphéroïde transcendant.

3. Revenant à l'hypothèse de n nombre pair, et substituant les valeurs de $R'' - R$ (éq. 4) et de R (éq. 2) dans l'éq. (n) de l'article précédent, on aura, toutes réductions faites,

$$R' = \frac{\omega(n+1)\sin.^{n} L + b - a}{b - 1} \ldots\ldots (13),$$

expression du rayon osculateur qui aboutit au point A' de la surface de la terre.

Soit B, un autre très-petit arc de la méridienne, correspondant à une même différence en latitude vraie que les arcs A, A', A'', et dont le milieu passe par la latitude vraie quelconque L', et représentons par ρ son rayon de courbure, alors l'équation (13) donnera

$$\rho = \frac{\omega(n+1)\sin.^{n} L' + b - a}{b - 1}.$$

Mais les très-petits arcs A' et B sont entr'eux comme leurs rayons osculateurs, on aura donc la proportion $A' : B :: \omega(n+1)\sin.^{n} L + b - a : \omega(n+1)\sin.^{n} L' + b - a$; ou

$$A' - B : B :: \omega(n+1)(\sin.^{n} L - \sin.^{n} L') : \omega(n+1)\sin.^{n} L' + b - a,$$

d'où l'on tire

$$\omega = \frac{(b-1)(A' - B)}{(A' - B) + (n+1)(B\sin.^{n} L - A'\sin.^{n} L')} \ldots\ldots (14).$$

Si B est le très-petit arc du méridien coupé par l'équateur, alors, mettant A à la place de B, l'équation précédente se réduit à celle

$$\omega = \frac{(b-1)(A' - A)}{(A' - A) + (n+1)A\sin.^{n} L} \ldots\ldots (15).$$

Enfin, si A' est égal au très-petit arc A'' du méridien sous le pôle, il vient

$$\omega = \frac{(b-1)(A'' - A)}{A'' + nA} \ldots\ldots (16).$$

---

est $= 1{,}570796$; donc pour avoir la longueur absolue de l'arc de cercle $\frac{\pi}{2} - L$, ou $100° - L$, en se servant de la nouvelle division du cercle, on fera la proportion $100 : 100 - L :: 1{,}570796 : (100° - L)\, 0{,}01570796$.

Cette dernière formule est la plus simple de toutes pour le calcul de l'aplatissement ω du sphéroïde terrestre, mais elle est d'une difficulté que je crois insurmontable par les opérations géodésiques qu'elle exigeroit, puisqu'il faudroit mesurer le degré du méridien qui est sous le pôle ; il faut donc nous en tenir à l'une des deux formules (14) et (15), et encore mieux à cette dernière, comme la plus simple, à moins cependant que l'on eût plus de confiance dans la mesure de la longueur de tout autre arc très-petit B du méridien, que dans celui mesuré sous l'équateur. Fig. 1.

4. Connoissant l'aplatissement ω du sphéroïde, il nous sera aisé de trouver toutes ses dimensions, sans même employer les valeurs différentielles de y et de x [éq. (p) et (q) art. 2, différenciées et mettant les valeurs de R''—R et R éq. (2) et (4)] comme l'exigent en partie les formules générales des sous-tangentes, sous-normales, etc. En effet, le triangle rectiligne rectangle A'BL donne

$$A'L = \frac{A'B}{\sin. BLA'} = \frac{y}{\sin. L}, \text{ et } BL = \frac{A'B}{\mathrm{tang.}\, BLA'} = \frac{y}{\mathrm{tang.} L},$$

donc

$$\text{normale } A'L = \frac{\omega \sin.^2 L + b - a}{b - 1} \; \ldots\ldots (17)$$

$$\text{sous-normale } BL = \frac{\cos. L(\omega \sin.^2 L + b - a)}{b - 1} \; \ldots\ldots (18).$$

Le triangle TBA' donne

$$TA' = \frac{A'B}{\sin. A'TB} = \frac{y}{\cos. L} \text{ et } TB = \frac{A'B}{\mathrm{tang.}\, A''TB} = \frac{y}{\mathrm{col.}\, L};$$

donc

$$\mathrm{tang.}\, A'T = \frac{\mathrm{tang.} L(\omega \sin.^2 L + b - a)}{b - 1} \; \ldots\ldots (19),$$

$$\text{sous-tangente } TB = \frac{\sin. L\, \mathrm{tang.} L(\omega \sin.^2 L + b - a)}{b - 1} \; \ldots\ldots (20).$$

Ajoutant les équations (18) et (20), on a

$$LT = \frac{\omega \sin.^2 L + b - a}{(b - 1)\cos. L} \; \ldots\ldots (21).$$

Nous avons déjà l'expression analytique du rayon osculateur du sphéroïde terrestre (éq. 13). On trouveroit de même les valeurs de CT, CL, CD, LD, A'H, A''D, A'M, ang. A'CT, le rayon CA' et l'angle CA'L de la verticale ; mais à cause que toutes ces quantités sont fonctions de l'abscisse x, dont la valeur générale (éq. 6) est assez compliquée ; nous nous dispenserons de donner ces expressions qui, au reste, se trouvent aisément par la simple considération de

Fig. 1. quelques-uns des triangles rectilignes que forment les lignes droites de la figure 1. Nous donnerons les valeurs analytiques de ces quantités dans les cas particuliers que nous examinerons.

5. Opérant dans le cas de n nombre impair comme nous l'avons fait précédemment pour le cas de n nombre pair : on trouvera aisément les équations

$$\omega = \frac{(n+1)b'(\mathrm{B}\sin.^n\mathrm{L} - \mathrm{A}'\sin.^n\mathrm{L}') + (b'-1)(\mathrm{A}'-\mathrm{B})}{\mathrm{A}'-\mathrm{B}+(n+1)(\mathrm{B}\sin.^n\mathrm{L}-\mathrm{A}'\sin.^n\mathrm{L}')} \ldots\ldots (22),$$

$$\omega = \frac{(n+1)b'\mathrm{A}\sin.^n\mathrm{L} + (b'-1)(\mathrm{A}'-\mathrm{A})}{(\mathrm{A}'-\mathrm{A})+(n+1)\mathrm{A}\sin.^n\mathrm{L}} \ldots\ldots (23),$$

$$\omega = \frac{(n+1)b'\mathrm{A} + (b'-1)(\mathrm{A}''-\mathrm{A})}{\mathrm{A}''-\mathrm{A}+(n+1)\mathrm{A}} \ldots\ldots (24),$$

$$\text{normale } \mathrm{AL} = (b'-\omega)\sin.^n\mathrm{L} + a - b' \ldots\ldots (25),$$

$$\text{sous-normale } \mathrm{BL} = \cos.\mathrm{L}[(b'-\omega)\sin.^n\mathrm{L} + a - b'] \ldots\ldots (26),$$

$$\text{tangente } \mathrm{A'T} = \mathrm{tang.}\mathrm{L}[(b'-\omega)\sin.^n\mathrm{L} + a - b'] \ldots\ldots (27),$$

$$\text{sous-tangente } \mathrm{TB} = \mathrm{tang.}\mathrm{L}[(b'-\omega)\sin.^{n+1}\mathrm{L} + (a-b')\sin.\mathrm{L}] \ldots\ldots (28),$$

et ainsi de suite.

Passons maintenant aux applications de notre théorie générale, aux deux hypothèses de $n=2$ et de $n=4$ qui sont les seules qu'on puisse regarder comme vraisemblables, même depuis que les savans astronomes Delambre et Méchain ont mesuré l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et de Barcelone (*).

6. Faisant $n=2$ on a $b=2$ (éq. 1), d'où (éq. 5 et 6)

$$y = \sin.\mathrm{L}(1-\omega\cos.^2\mathrm{L}) \ldots\ldots (29),$$

$$x = \cos.\mathrm{L}(\omega\sin.^2\mathrm{L}+a) \ldots\ldots (30).$$

Donc, d'après l'hypothèse actuelle, le sphéroïde seroit sensiblement un el-

(*) Depuis cette grande opération, qui fera époque dans l'histoire des sciences, M. Méchain a encore mesuré l'arc du méridien compris entre les parallèles de Barcelone et de l'île d'Ivice, qui est à environ 2 degrés au sud de Barcelone; mais cet illustre savant a été moissonné vers la fin de son opération, qui l'avoit beaucoup fatigué, par la fièvre jaune. Je ne sais si les résultats de cette seconde opération sont parvenus au bureau des longitudes; mais ils me sont parfaitement inconnus; ainsi de l'arc total qui a été mesuré, et qui est d'environ 13 degrés, je ne considérerai que la partie d'environ 11 degrés, mesurée par Delambre et Méchain.

J'ai appris depuis que M. Biot étoit parti pour continuer les opérations de M. Méchain.

lipsoïde. En effet, dans le triangle rectiligne rectangle formé par l'ordonnée, la sous-normale et la normale, on a $y =$ sous-normale $\times$ tang. L. Or, dans l'ellipse dont les grands et petits axes sont respectivement M et N, on a la sous-normale qui est égale à $\frac{N^2}{M^2}x$; donc dans l'ellipse on a $y = \frac{N^2}{M^2}x \times$ tang. L. Mais l'équation de cette même courbe est $y^2 = \frac{N^2}{M^2}(M^2 - x^2)$; donc, substituant dans cette équation la valeur de y trouvée précédemment, on aura $N^2 x^2 \text{tang.}^2 L = M^2(M^2 - x^2)$; d'où Fig. 2.

$$x^2 = \frac{M^4}{M^2 + N^2 \text{tang.}^2 L}, \text{ et } x = \frac{M^2 \cos. L}{\sqrt{M^2 \cos.^2 L + N^2 \sin.^2 L}}.$$

Substituant cette valeur de x dans celle de $y = \frac{N^2}{M^2}x$ tang. L, on a

$$y = \frac{N^2 \sin. L}{\sqrt{M^2 \cos.^2 L + N^2 \sin.^2 L}}.$$

Faisant dans ces équations $M = 1 + \omega$ et $N = 1$, comme cela est dans le sphéroïde que nous considérons, on aura

$$y = \frac{\sin. L}{\sqrt{1 + 2\omega \cos.^2 L + \omega^2 \cos.^2 L}}$$

$$x = \frac{\cos. L + 2\omega \cos. L + \omega^2 \cos. L}{\sqrt{1 + 2\omega \cos.^2 L + \omega^2 \cos.^2 L}},$$

ou développant ces valeurs de y et de x en série, en négligeant les secondes puissances de ω, qui sont des quantités extrêmement petites, on retrouvera les équations (29) et (30).

7. Si du point A′ de la surface de la terre, et pour la latitude L, nous abaissons sur le petit axe A″C la perpendiculaire A′N, il est évident qu'elle sera le rayon de cercle de longitude de l'observateur en A′ et $= CB = x$. Supposons que du point O où la perpendiculaire A′N rencontre la circonférence du cercle inscrit, on mène au centre C le rayon OC de la sphère inscrite qui, évidemment, sera égal au demi-petit axe ($= 1$).

Ce rayon forme avec le diamètre de l'équateur un angle OCA qui, évidemment, est plus petit que l'angle de latitude vraie A′LA d'une quantité égale à l'angle OHA′ que forment les deux tangentes, quelque part qu'elles se rencontrent. C'est cet angle OCA que *Dionis du Séjour* a nommé *angle de latitude corrigée*, et dont il s'est servi de la manière la plus avantageuse dans son *Traité analytique des Mouvemens apparens des corps célestes.*

Fig. 1. Représentant par Λ cette latitude corrigée, il est évident que nous aurons

$$Oq = A'B = y = \sin.\Lambda;\ \text{donc (éq. 29)}$$

$$\sin.\Lambda = \sin.L(1 - \omega\cos.^2 L)\ .\ .\ .\ .\ .\ (31).$$

Cette équation servira à trouver la latitude corrigée Λ par le moyen de la vraie L. On pourra même, pour faciliter le calcul, faire

$$\omega\cos.^2 L = \cos.^2 B\ .\ .\ .\ .\ .\ (32);$$

d'où $1 - \omega\cos.^2 L = \sin.^2 B$; donc

$$\sin.\Lambda = \sin.L\sin.^2 B\ .\ .\ .\ .\ .\ (33).$$

Mais, pour avoir la valeur de L en fonction de Λ, il faudra faire attention que l'équation (31) se réduit à celle du troisième degré

$$\sin.^3 L + \frac{1-\omega}{\omega}\sin.L - \frac{\sin.\Lambda}{\omega} = 0;$$

laquelle étant résolue (Alg. § 184) donne

$$\sin.L = \sqrt[3]{\left\{\frac{\sin.\Lambda}{2\omega} + \sqrt{\frac{\sin.^2\Lambda}{4\omega^2} + \left(\frac{1-\omega}{3\omega}\right)^3}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{\sin.\Lambda}{2\omega} - \sqrt{\frac{\sin.^3\Lambda}{4\omega^2} + \left(\frac{1-\omega}{3\omega}\right)^3}\right\}}\ .\ .\ .\ (34),$$

formule assez compliquée, mais dont on est moins dans le cas de se servir que des formules (32) et (33); car L est donné par l'observation. D'ailleurs les équations (31) et (34) sont rigoureuses. Mais, si nous négligeons les secondes puissances de la très-petite quantité ω, alors de l'équation (31) nous conclurons celle $\cos.\Lambda = \cos.L\sqrt{1 + 2\omega\sin.^2 L} = \cos.L(1 + \omega\sin.^2 L)$. Divisant par cette dernière équation celle 31, on aura

$$\text{tang.}\Lambda = \text{tang.}L\left(\frac{1 - \omega + \omega\sin.^2 L}{1 + \omega\sin.^2 L}\right) = \text{tang.}L(1 - \omega) = \frac{\text{tang.}L}{1 + \omega},\ \text{ou}$$

$$\text{tang.}\Lambda = \frac{\text{tang. lat. vraie}}{\text{rayon de l'équateur}}\ .\ .\ .\ .\ .\ (35).$$

C'est là l'équation que Dionis du Séjour a déduite rigoureusement de l'ellipse, en observant que les tangentes A'H et OH à l'ellipse et au cercle inscrit, se rencontrent à un même point H du petit axe prolongé (*). Or, dans le triangle rectiligne rectangle HNO, on a $\text{tang.}NHO = \frac{NO}{NH}$; et dans le triangle rectangle A'HN, on a tang. A'HN

(*) En effet N étant le demi-petit axe, et M le demi-grand axe de l'ellipse, on a pour cette courbe rapportée à son petit axe, l'équation $y^2 = \frac{M^2}{N^2}(2Nx - xx)$; d'où $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{N^2}{M^2} \times \frac{y^2}{N - x} =$

$=\frac{NA'}{NH}$: donc $\frac{\text{tang. } NHO}{\text{tang. } A'HN}=\frac{NO}{NA'}$ ..... (A). Mais angle $NHO=\frac{\pi}{2}-HCO$ $=OCA=A$; et angle $A'HN=\frac{\pi}{2}-HDA'=CLD=A'LA=L$; de plus, $\frac{NO}{NA'}=\frac{CF}{CA}=\frac{1}{a}$; donc substituant ces valeurs dans l'équation précédente (A), on aura $\text{tang. } A=\frac{\text{tang. } L}{a}$, même équation que celle (35). Fig. 1.

8. Substituant la valeur de $n=2$ et celle de $b=2$ dans les équations (13), (17) ..... (21), on a pour le méridien terrestre, dans l'hypothèse actuelle

$$R'=1+3\omega \sin.^2 L-\omega \; ..... \; (36),$$

$$\text{normale } A'L=1-\omega \cos.^2 L \; ..... \; (37),$$

$$\text{sous-normale } BL=\cos. L(1-\omega \cos.^2 L) \; .... \; (38),$$

$$\text{tangente } A'T=\text{tang. } L(1-\omega \cos.^2 L) \; ..... \; (39),$$

$$\text{sous-tangente } TB=\sin. L \, \text{tang. } L(1-\omega \cos.^2 L) \; .... \; (40),$$

$$LT=\text{séc. } L-\omega \cos. L \; ..... \; (41);$$

Ajoutant les équations (30) et (40), on a $CB+TB$ ou $CT=\omega \cos. L \sin.^2 L$ $+\cos. L+\omega \cos. L+\frac{\sin.^2 L}{\cos. L}-\omega \sin.^2 L \cos. L$, et réduisant, il vient

$$CT=\text{séc. } L+\omega \cos. L \; ..... \; (42).$$

De cette dernière équation retranchant celle (41), il vient

$$CL=2\omega \cos. L \; ..... \; (43).$$

Cette ligne CL est la distance du centre de la terre au point de l'axe vers lequel tendent les corps placés en A' de la surface de la terre, par l'effet de la pesanteur.

Le triangle rectangle LCD donne $LD=\frac{LC}{\cos. L}$; donc éq. (43)

$$LD=2\omega \; ..... \; (44).$$

D'où il suit que dans notre courbe la quantité LD est constante.

Le même triangle LCD donne $CD=CL \, \text{tang. } L$; donc (éq. 43)

$$CD=2\omega \sin. L \; ..... \; (45).$$

$\frac{2Nx-xx}{N-x}$. Mais l'équation du cercle inscrit est $y^2=2Nx-xx$, d'où $\frac{y\,dx}{dy}=\frac{y^2}{N-x}=\frac{2Nx-xx}{N-x}$: donc, pour une même abscisse A″N, la sous-tangente NH est commune à l'ellipse et au cercle inscrit.

Fig. 1. Dans le triangle rectiligne obliquangle CLA′, l'angle CA′L qu'on appelle *angle de la verticale*, et dont nous verrons l'usage dans la suite, se trouve par le moyen de la formule trigonométrique $\text{tang. CA'L} = \frac{\text{CL sin. L}}{\text{A'L} + \text{CL cos. L}}$, qui est démontrée dans plusieurs Traités de trignonométrie rectiligne. Substituant dans cette équation les valeurs de A′L et de CL (éq. 37 et 43), on aura

$$\text{tang. de l'angle de la verticale CA'L} = \frac{\omega \text{ sin. } 2\text{L}}{1 + \omega \text{ cos.}^2 \text{L}} \;.\;.\;.\;.\;.\; (46),$$

ou négligeant les secondes puissances de ω, on aura sensiblement

$$\text{tang. de l'angle de la verticale CA'L} = \omega \text{ sin. } 2\text{L} \;.\;.\;.\;.\;.\; (47).$$

Le triangle rectiligne obtusangle A′LC donne le demi-diamètre ou rayon CA′ du sphéroïde terrestre $= \frac{\text{CL} \times \text{sin. L}}{\text{sin. CA'L}}$. Mais $\text{CL} = 2\omega \text{ cos. L}$, et $\text{sin. CA'L} = \frac{\text{tang. CA'L}}{\text{séc. CA'L}} = \frac{\omega \text{ sin. } 2\text{L}}{\sqrt{(1 + \omega \text{ cos.}^2 \text{L})^2 + \omega^2 \text{ sin.}^2 2\text{L}}}$ (éq. 46);
donc

$$\text{rayon CA' du sphéroïde} = \sqrt{(1 + \omega \text{ cos.}^2 \text{L})^2 + \omega^2 \text{ sin.}^2 2\text{L}} \;.\;.\;.\;.\;.\; (48),$$

ou négligeant les secondes puissances de ω, on aura

$$\text{rayon CA' du sphéroïde} = 1 + \omega \text{ cos.}^2 \text{L} \;.\;.\;.\;.\;.\; (49).$$

Faisant

$$\text{tang. M} = \text{cos. L} \sqrt{\omega} \;.\;.\;.\;.\;.\; (50),$$

on a pour l'équation (46) ... $\text{tang. CA'L} = \omega \text{ sin. } 2\text{L cos.}^2 \text{M}$ .... (51),

pour l'équation (49) ... $\text{CA'} = \text{séc.}^2 \text{M}$ ..... (52);

Enfin faisant

$$\text{tang. N} = \omega \text{ sin. } 2\text{L cos.}^2 \text{M} \;.\;.\;.\;.\;.\; (53),$$

on a pour l'équation (48) ... $\text{CA'} = \frac{\text{séc.}^2 \text{M}}{\text{cos. N}}$ ..... (54).

Dans le triangle rectangle A′NH nous avons $\text{A'H} = \frac{\text{A'N}}{\text{sin. NHA'}} = \frac{x}{\text{sin. L}}$;
donc

$$\text{A'H} = \text{cot. L} (\omega \text{ sin.}^2 \text{L} + a) \;.\;.\;.\;.\;.\; (55).$$

Le point M où l'ordonnée A′B rencontre la circonférence du cercle inscrit au méridien, s'appelle le *point vertical de projection* du point A′ de la surface de la terre; et le point O, où l'horizontale A′N rencontre la sphère inscrite au

sphéroïde terrestre s'appelle la *projection horizontale* du point A′ de la surface de la terre. Fig. 1.

Pour trouver la distance A′M du point A′ à celui M de sa projection verticale, observons que

$$MB = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\sin.^2 L - (1-\sin.^4 L)[2\omega + \omega^2(1+\sin.^2 L)]} \text{ (éq. 30)};$$

Donc, à cause que A′M est la différence de l'ordonnée A′B du méridien à celle MB du cercle, on aura (éq. 29)

$$A'M = \sin. L - \omega\cos.^2 L \sin. L - \sqrt{\sin.^2 L - (1-\sin.^4 L)[2\omega + \omega^2(1+\sin.^2 L)]} \ldots\ldots (56),$$

ou, sans une erreur sensible,

$$A'M = \frac{\omega(1-\sin.^4 L - \cos.^2 L \sin. L)}{\sin. L} \ldots\ldots (57).$$

On trouvera de même que la distance du point A′ au point O de projection horizontale, est égale à $CB - Cq = x - \cos. A = x - \sqrt{1-y^2}$; d'où

$$A'O = \cos. L(\omega\sin.^2 L + a - \sqrt{1 + 2\omega\sin.^2 L - \omega^2\cos.^4 L}) \ldots\ldots (58),$$

ou, sans une erreur sensible,

$$A'O = \omega\cos. L \ldots\ldots (59).$$

Représentant par y' et x' les coordonnées rectangulaires de la développée du méridien, on aura $y'(= R'\sin. L - y)$ (*) $= \sin. L + 3\omega\sin.^3 L - \omega\sin. L - \sin. L + \omega\sin. L\cos.^2 L$ (éq. 36 et 29); ou réduisant, on a

$$y' = 2\omega\sin.^3 L \ldots\ldots (60).$$

(*) Soit A‴PH′ une courbe plane quelconque ayant pour développée F′bB′; menons par le centre osculateur b du point P de la développante, la droite bQ parallèle à l'axe H′C, et la perpendiculaire bY sur l'axe; représentons respectivement par x' et y' les coordonnées rectangulaires F′Y et Yb de la développée; menons la droite fe parallèle et infiniment près de bQ; enfin prolongeons la perpendiculaire bY jusqu'en a; nous aurons conséquemment $ba = dy'$, $fa = dx'$; et, représentant par R′ le rayon osculateur fP, nous aurons aussi $fb = dR'$; or, l'angle f du triangle infinitésimal fba est évidemment égal à l'angle PD′E de la normale que nous représentons par L; donc ce même triangle infinitésimal fba, nous donnera les deux équations

$$\left\{ dy' = \sin. L\, dR' \text{ et } dx' = \cos. L\, dR' \right\} \ldots\ldots (B);$$

ajoutant la première de ces deux équations avec celle $dy = R'd\sin. L$ que nous avons démontrée à la page 271, et intégrant, on aura complètement

$$y' = R'\sin. L - y;$$

car lorsque $y = 0$, on a $y' = 0$ et $L = 0$.

De l'équation $dx = -R'd\cos. L$ que nous avons démontrée au renvoi de la page 271, retranchant

Fig. 14. On aura de même $x' (= R' \cos. L - x + \text{const.}) = \cos. L + 3\omega \sin.^2 L \cos. L - \omega \cos. L - \omega \sin.^2 L \cos. L - \cos. L - \omega \cos. L$ (éq. 36 et 30) $= 2\omega \sin.^2 L \cos. L - 2\omega \cos. L + \text{const.}$ Mais $x' = 0$ lorsque $L = 0$, donc const. $= 2\omega$, ce qui donne complètement

$$x' = 2\omega(1 - \cos.^3 L) \quad \ldots\ldots \quad (61).$$

Faisant $L = \frac{\pi}{2}$, on a $y' = x' = 2\omega$; d'où l'on voit que, dans le système présent, les deux axes de la développée du méridien sont égaux, ce qui n'a pas rigoureusement lieu dans l'ellipse; car, dans cette dernière courbe, on a

$$y' = \frac{\sin.^3 L (2\omega + \omega^2)}{(1 + 2\omega \cos.^2 L + \omega^2 \cos.^2 L)^{\frac{3}{2}}}, \text{ et } x' = \frac{2\omega + \omega^2}{1 + \omega}\left(1 - \frac{(1 + \omega)^3 \cos.^3 L}{(1 + 2\omega \cos.^2 L + \omega^2 \cos.^2 L)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

équations qui se réduisent à celles $y' = 2\omega + \omega^2$ et $x' = \frac{2\omega + \omega^2}{1 + \omega}$ lorsque $L = \frac{\pi}{2}$, et donneroient $y' = x = 2\omega$, si on négligeoit les secondes puissances de ω.

De ces valeurs des demi-axes de la développée, de même que de l'équation (36), on conclut 1.° que sous les pôles le rayon osculateur R'' du méridien est $1 + 2\omega$, et que celui R sous l'équateur est $1 - \omega$; d'où il suit que le quart de la développée Δ du méridien est $= 3\omega$; d'ailleurs l'équation (4) nous donne directement pour le cas de $n = 2$, celle

$$\Delta = 3\omega \quad \ldots\ldots \quad (62).$$

2.° Que les deux rayons osculateurs placés l'un sur le rayon de l'équateur et l'autre sur l'axe de rotation, sont en raison inverse des demi-axes du méridien sur lesquels ils s'appliquent respectivement; puisque l'on a la proportion $1 + \omega : 1 - \omega :: 1 + 2\omega : 1$; d'ailleurs ceci est une propriété générale et rigoureuse de l'ellipse (*).

---

la seconde en (B), on a $dx - dx' = -(R' d\cos. L + \cos. L\, dR')$, et intégrant, il vient $x - x' = -R' \cos. L - \text{const.}$, d'où

$$x' = x + R' \cos. L + \text{const.}$$

Cette équation a lieu dans le cas où les ordonnées varient dans le même sens. Dans le cas contraire, l'équation de la page 271 est $dx = R' d\cos. L$, et l'ajoutant avec la seconde en B, on a $dx + dx' = \cos. L\, dR' + R' d\cos. L$, d'où

$$x = R' \cos. L - x + \text{const.}$$

(*) En effet, représentant respectivement par M et N les demi-grand axe et petit axe de l'ellipse, on a $R' = \frac{M^2 N^2}{(M^2 \cos.^2 L + N^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}$: donc, faisant successivement $L = 0$ et $L = \frac{\pi}{2}$,

Soit représenté par l l'angle A'CF formé au centre de la terre par le demi-diamètre A'C, et par le rayon CA de l'équateur ; il est clair que si la terre étoit sphérique, cet angle l mesureroit la latitude vraie de l'observateur placé en A'; ainsi, nous appellerons cet angle *latitude apparente*. Or, à cause que les triangles Cnm, CBA' sont semblables, nous aurons la proportion Cn : nm :: CB : BA', ou $\cos. l : \sin. l :: x : y$; donc $\text{tang.} l = \frac{y}{x}$, et (éq. 29 et 30) Fig. 1.

$$\text{tang.}\, l = \frac{(1-\omega \cos.^2 L)\,\text{tang.}\, L}{1+\omega+\omega \sin.^2 L} \; . \; . \; . \; . \; . \; (63);$$

ou divisant les deux termes de la fraction par le dénominateur, et négligeant les secondes puissances de ω, on aura par approximation

$$\text{tang.}\, l = \frac{\text{tang.}\, L}{1+2\omega} = (1-2\omega)\,\text{tang.}\, L \; . \; . \; . \; . \; . \; (64).$$

D'où il suit que l'on a sensiblement la tangente de la latitude corrigée qui est moyenne proportionnelle entre la tangente de la latitude vraie et la tangente de la latitude apparente; puisque, négligeant les secondes puissances de ω, on a la proportion

$$\text{tang.}\, L : \frac{\text{tang.}\, L}{1+\omega} :: \frac{\text{tang.}\, L}{1+\omega} : \frac{\text{tang.}\, L}{(1+\omega)^2} = \frac{\text{tang.}\, L}{1+2\omega} = \text{tang.}\, l.$$

Retranchant l'unité de l'expression du rayon du sphéroïde (éq. 48 ou 49), l'on aura

Différence M A' du rayon du sphéroïde à celui de la sphère inscrite $= \sqrt{(1+\omega \cos.^2 L)^2 + \omega^2 \sin^2 2L} - 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; (65)$,

ou, par approximation,

$$\text{M A'} = \omega \cos.^2 L \; . \; . \; . \; . \; . \; (66).$$

Remarque. La distance A'O $= \omega \cos. L$ (éq. 59) est, d'après le système newtonien, la quantité dont le molécule du globe fluide primitif, projection horizontale du point A' sur la surface du sphéroïde actuel, s'est écarté de l'axe parallèlement à l'équateur, par le mouvement uniforme de rotation du globe fluide autour de cet

---

on a sous l'équateur $R = \frac{N^2}{M}$ et sous les pôles $R'' = \frac{M^2}{N}$: or, $M : \frac{N^2}{M} :: \frac{M^2}{N} : N$. Donc, etc.

On voit que pour l'ellipse, l'on a $\Delta = \frac{M^3 - N^3}{MN}$, et faisant $M = 1+\omega$ et $N = 1$, on a $\Delta = \frac{3\omega + 3\omega^2 + \omega^3}{1+\omega}$, expression rigoureuse du quart de la développée de l'ellipse, et qui se réduit à $\Delta = 3\omega$ lorsque l'on néglige les puissances supérieures de ω.

axe. Mais cet écart OA′ doit être proportionnel au rayon du cercle de longitude du molécule en question ; donc l'écart du molécule placé à l'équateur terrestre étant ω, il est évident qu'on a la proportion $1 : \omega :: \cos. \text{A} : \text{OA}' :: \cos. \text{L}(1 + \omega \sin.^2 \text{L}) : \text{OA}'$; donc, par approximation, $\text{OA}' = \omega \cos. \text{L}$, comme nous l'avons trouvé précédemment (éq. 59).

9. Nous allons, dans cet article, nous occuper de la rectification du méridien, d'abord généralement, ensuite dans le cas particulier de $n = 2$, ce qui nous sera très-utile.

Différenciant les équations (p) et (q) art. 2, carrant ces équations différentielles, et substituant les valeurs de dy^2 et de dx^2 dans l'équation $d\text{M} = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ que l'on sait être l'expression de la différentielle d'un arc M d'une courbe plane quelconque; on aura, toutes réductions faites, l'équation

$$d\text{M} = [\text{R} + (\text{R}'' - \text{R}) \sin.^2 \text{L}]\, d\text{L} \quad (*),$$

dans laquelle M représente un arc du méridien compté depuis l'équateur; intégrant, on a

$$\text{M} = \text{RL} + (\text{R}'' - \text{R}) \int \sin.^2 \text{L}\, d\text{L} + \text{const.} \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{H}),$$

formule qu'il sera toujours aisé de développer, quelle que soit la valeur de n.

Pour notre hypothèse de $n = 2$, on aura

$$\text{M} = \text{R L} - (\text{R}'' - \text{R})(\tfrac{1}{4} \sin. 2\text{L} - \tfrac{1}{2} \text{L}).$$

Mais $b = 2$ (éq. 1), $\text{R} = 1 - \omega$ (éq. 2), et $\text{R}'' - \text{R} = 3\omega$ (éq. 4); donc, toutes réductions faites, on a

$$\text{M} = (1 + \tfrac{1}{2}\omega)\text{L} - \tfrac{3}{4}\omega \sin. 2\text{L} \; . \; . \; . \; . \; . \; (67).$$

Je n'ai pas ajouté de constante, parce que $\text{M} = 0$ lorsque $\text{L} = 0$.

Faisant $\text{L} = \frac{\pi}{2}$, on a $\text{M} = (1 + \frac{1}{2}\omega)\frac{\pi}{2}$; donc, représentant par Q le quart du méridien, on aura

$$\text{Q} = (1 + \tfrac{1}{2}\omega)\frac{\pi}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (68).$$

(*) Comparant cette équation avec la différentielle de (p) (article 2), on voit que $d\text{M} = \frac{dy}{\cos. \text{L}}$, ce qui se déduiroit subitement du triangle rectangle infinitésimal formé par dy, dx et $d\text{M}$, dans lequel l'angle ayant pour côté dy et $d\text{M}$ est évidemment $= \text{L}$; donc $1 : d\text{M} :: \cos. \text{L} : dy$: d'où $d\text{M} = \frac{dy}{\cos. \text{L}}$.

10. Pour compléter le système des formules analytiques relatives à l'hypothèse actuelle, faisons $n=2$ dans la formule 15, ce qui nous donnera

$$\omega=\frac{A'-A}{(A'-A)+3A\sin.^2 L} \;\ldots\ldots\; (69).$$

Voyons maintenant quelle confiance on peut mettre dans l'hypothèse actuelle de $n=2$, d'après les longueurs des degrés en latitude mesurés par des astronomes célèbres, ainsi qu'on le voit daos la table suivante :

TABLE I.

LATITUDES.	LONGUEURS en toises de chaque degré.	DIFFÉRENCES des longueurs de chaque degré à celle du premier.	Noms des astronomes qui ont mesuré les longueurs de ces degrés, et lieux de la terre où ont été prises ces mesures, avec les arcs entiers d'où ces degrés ont été conclus.
0°,0000	51077,70		BOUGUER, LA CONDAMINE, déduit d'un arc total de 3°,4633.
37°,0093	51333,30	255,60	LA CAILLE, au Cap de Bonne-Espérance, déduit d'un arc total de 1°,3572.
43°,5556	51199,20	121,50	MASSON et DIXON en Pensylvanie, déduit d'un arc total de 1°,6435.
47°,7963	51281,10	203,40	BOSCOVICH et LEMAIRE en Italie, déduit d'un arc total de 2°,4034.
51°,3327	51316,58	238,88	DELAMBRE et MÉCHAIN, en France, déduit d'un arc total de 10°,7487.
53°,0926	51366,60	288,90	LIESGANING, en Autriche, déduit d'un arc total de 3°,2734.
73°,7037	51477,30	399,60	Les astronomes suédois SVAMBER, OSVERBOM, HOLMQUIST et PALANDER, en Bothnie, déduit d'un arc total de 1°,8023.

Faisant dans la formule (69) $A = 51077,7$ et $A' = 51316,58$, nous aurons l'aplatissement α du sphéroïde, par le moyen du calcul suivant :

log. de $A = 4,7082314$
log. de $3 = 0,4771213$
2 log.-sin. $51°,3327 = 9,7167796$
Somme. 4,9021323 log. de 79823,8
$A' - A =$ 238,88 log. 2,3781798 +
Somme. 80062,68 log. 4,9034301 — . . . . . (λ)
Différence 7,4747497 qui est le logarithme de $\alpha = 0,00299$; donc, $a = 1,00299$.

Pour déterminer par le moyen de cette valeur de a des nombres entiers qui représentent les deux demi-axes de la terre, et qui ne diffèrent que d'une unité, on fera la proportion $1 : 1,00299 :: z : z+1$, ou $1 : 0,00299 :: z : 1$, d'où $z = \frac{1}{0,00299} = 335$ (*). Donc, le rapport des deux demi-axes est $= \frac{335}{336}$, et par conséquent l'aplatissement du sphéroïde est $\frac{1}{336}$ du rayon de l'équateur, ou $\frac{1}{335}$ du demi-axe de la terre.

Faisant toujours $A = 51077,7$, et successivement $A' =$ à la longueur absolue de tous les autres degrés de la table précédente, on trouvera, par le moyen de la formule (69), la table suivante :

TABLE II.

Valeurs du rayon a de l'équateur.	RAPPORTS DES DEMI-AXES.	COMBINAISON DES DEGRÉS.	
1,00584	182 à 183	Premier avec le	Second.
1,00199	503 à 504		Troisième.
1,00285	351 à 352		Quatrième.
1,002984	335 à 336		Cinquième.
1,00346	289 à 290		Sixième.
1,00310	323 à 324		Septième.

(*) Il est aisé de voir qu'on aura le logarithme de z qui sera toujours le complément arithmétique de celui de α.

11. Faisant $n=2$, la formule générale (14) se réduit à celle

$$\omega = \frac{A' - B}{A' - B + 3(B\,\sin.^2 L - A'\sin.^2 L')} \cdots\cdots (70).$$

Soit $A' =$ à la longueur absolue 51477,3 du degré du méridien mesuré sous le cercle polaire par les astronomes suédois, et $B =$ à la longueur absolue 51316,58 du degré mesuré en France par Delambre et Méchain, voici le calcul de la formule (70):

log. de B = 4,7102578 }
2 log. sin. 73°,7037 = 9,9236926 }
Somme. = 4,6339504 log. de 43047,7 +
log. de A′ = 4,7116158 }
2 log. sin. 51°,3327 = 9,7167796 }
Somme. 4,4283954 log. de 26816,1 —
Differ. 16231,6
Multip. par 3
48694,8
A′ = 51477,30 +
B = 51316,58 —
Diffé. 160,72 — 160,72 log. 2,2060699 +
Somme. 48855,52 log. 4,6889137 —
Differ. 7,5171562

qui est le logarithme de 0,00329, donc $\omega = 0,00329$, $a = 1,00329$, et prenant le complément arithmétique du logarithme 7,5171562 de ω qui est 2,4828438; on trouvera que ce dernier nombre est le logarithme de 304; donc le rapport des deux demi-axes est $= \frac{304}{305}$.

Faisant toujours $A' = 51477,3$ et successivement $B =$ à la longueur absolue des autres arcs du méridien table 1, art. 10, on formera la table suivante:

TABLE III.

Valeurs du rayon a de l'équateur.	RAPPORTS DES DEMI-AXES.	COMBINAISON DES DEGRÉS.	
1,00310	323 à 324	Le septième avec le	Premier.
1,00174	575 à 576		Second.
1,00412	242 à 243		Troisième.
4.00342	292 à 293		Quatrième.
1,00329	304 à 305		Cinquième.
1,00248	404 à 405		Sixième.

12. En examinant les tables II et III, l'on voit que les premier, cinquième et septième degrés donnent des résultats qui diffèrent le moins entr'eux, et qui, conséquemment, s'adaptent le mieux à l'hypothèse que les différences des degrés du méridien à celui qui est sous l'équateur, croissent comme les carrés des sinus de leurs latitudes respectives, ce qui rend le sphéroïde terrestre peu différent d'un ellipsoïde de révolution. Mais, quoique les trois degrés cités soient ceux auxquels on doive ajouter le plus de confiance, comme ayant été mesurés avec le plus de soin (surtout celui résultant de la mesure de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone, par Delambre et Méchain); cependant, les autres degrés donnent des résultats si différens entr'eux et si différens de ceux cités précédemment, que l'on doit conclure que les seules erreurs commises dans les mesures de ces degrés qui, d'ailleurs ont été mesurés avec beaucoup de soins par des grands géomètres, ne peuvent être la cause de ces grandes variétés, et que conséquemment *il y a lieu de croire que la terre n'est pas un solide de révolution, et que ses deux hémisphères ne sont pas semblables de chaque côté de l'équateur.* (La Place, *Système du Monde.*)

13. Voyons maintenant ce que nous donneront les longueurs du pendule simple mesuré sous différentes latitudes.

Représentant par t le temps d'une oscillation du pendule simple, par ϖ la longueur de ce dernier sous l'équateur, par ϖ' sa longueur sous une latitude vraie quelconque L', par p la force accélératrice en vertu de la pesanteur sous l'équateur, et par p' la même force sous la latitude vraie L'; on aura $t=\pi\sqrt{\frac{\varpi}{p}}$ et $t=\pi\sqrt{\frac{\varpi'}{p'}}$, d'où $\frac{\varpi}{p}=\frac{\varpi'}{p'}$ et $\varpi:\varpi'::p:p'$; mais les forces accélératrices p et p' sont en raison inverse des carrés des distances des corps sur lesquels elles agissent au point où gravissent ces corps, c'est-à-dire, sans une erreur sensible, au centre de la terre : donc, en représentant par r le rayon de la terre qui correspond à la latitude vraie L', on aura la proportion $p:p'::r^2:a^2$, d'où $\varpi:\varpi'::r^2:a^2$, donc $r=a\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}$; mais r est sensiblement égal à $1+\varpi\cos.^2 L'$ (éq. 49); donc, $1+\varpi\cos.^2 L'=a\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}=(1+\varpi)\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}$, et carrant, en négligeant les secondes puissances de ϖ, il viendra $1+2\varpi\cos.^2 L'=(1+2\varpi)\frac{\varpi}{\varpi'}$, d'où l'on tire

$$\varpi=\frac{\varpi'-\varpi}{2(\varpi-\varpi'\cos.^2 L')}\ldots\ldots(71).$$

Si l'on veut soumettre cette formule au calcul purement logarithmique, on fera

$$\left\{\cos. Q=\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}} \text{ et } \sin. P=\frac{\cos. L'}{\cos. Q}\right\}\ldots\ldots(72),$$

ce qui donne

$$\varpi=\frac{\tang.^2 Q}{2\cos.^2 P}\ldots\ldots(73).$$

Par le moyen de la formule (71), ou de celles (72 et 73), et par le moyen de la table suivante (IV), où se trouvent les résultats d'un grand nombre d'observations, on calculera aisément la table (V).

TABLE IV.

LATITUDES.	Longueurs du pendule à secondes.	Differ. à la longueur du pendule sous l'équateur.	Noms des Observateurs et des lieux où se sont faites les Observations.
0°,00	0.99669		BOUGUER, sous l'équateur, au-Pérou.
10,61	0,99689	0,00020	BOUOUER, à Porto-Belo.
20,50	0 99728	0,00059	BOUGUER, au petit Goave.
37.69	0 99877	0,00208	LA CAILLE, au cap de Bonne-Espérance.
48.44	0.99950	0,00281	DARQUIER, à Toulouse.
53,57	0,99987	0,00318	LIESGANING, à Vienne.
54.26	1,00000	0,00331	BOUGUER, à Paris.
56,63	1,00006	0.00337	ZACH, à Gota.
57,22	1,00018	0,00349	à Londres.
64.72	1,000 4	0,00405	MALLET, à Pétersbourg.
66,60	1,00101	0.00432	GRISCHOW, à Arensberg.
74.22	1,00137	0.00468	LES ACADEMICIENS FRANÇOIS, en Bothnie.
74.53	1.00148	0,00479	MALLET, à Ponoi.

TABLE V.

Valeurs de n.	Comparaison des longueurs du pendule.		Rapport des axes.
0,00366	Première avec la	Seconde	273 à 274
0,00297		Troisième	336 à 337
0,00337		Quatrième	300 à 301
0,00297		Cinquième	337 à 338
0,00288		Sixième	348 à 349
0,00293		Septième	341 à 342
0,00281		Huitième	356 à 357
0,00287		Neuvième	349 à 350
0,00281		Dixième	355 à 356
0,00290		Onzième	345 à 346
0,00277		Douzième	360 à 361
0,00278		Treizième	359 à 360

Cette derniere table v donne des résultats bien moins dissemblables que ceux donnés par les tables II et III de cette note. Ainsi, les observations faites sur la longueur du pendule sont plus conformes à l'hypothèse de $n=2$ que les mesures géodésiques des longueurs des degrés du méridien.

Nous allons, dans l'article suivant, déterminer les limites des plus grandes erreurs commises dans les mesures des degrés du méridien, en supposant que le sphéroïde terrestre est de la figure qui résulte de l'hypothèse de $n=2$; ou, ce qui est la même chose, nous déterminerons les limites de l'irrégularité du sphéroïde terrestre en considérant les mesures des degrés du méridien comme très-exactes. Nous nous occuperons ensuite des recherches semblables relativement à la longueur du pendule.

14. Puisque les différences de longueurs absolues des degrés du méridien à celui de ces degrés mesuré sous l'équateur doivent, d'après l'hypothèse de $n=2$, croître comme les carrés des sinus des latitudes vraies de ces degrés, on aura, en représentant par A la longueur du degré du méridien mesuré sous l'équa-

teur, par A', A'', A''', etc., les longueurs des autres degrés du méridien, et par L', L'', L''', etc., leurs latitudes respectives, on aura, dis-je, la suite de rapports géométriques égaux

$$A'-A : \sin.^2 L' :: A''-A : \sin.^2 L'' :: A'''-A : \sin.^2 L''' \ldots\ldots :: A^{m'}-A : \sin.^2 L^{m'},$$

dans laquelle l'indice m du plus grand nombre d'accens, représente aussi le nombre de degrés du méridien mesurés hors de l'équateur.

De cette suite, on tire la proportion géométrique (Alg. §. 92)

$$A'+A''+A''' \ldots +A^{m'}-mA : \sin.^2 L'+\sin.^2 L''+\sin.^2 L''' \ldots +\sin.^2 L^{m'} :: A^{p'}-A : \sin.^2 L^{p'} \ldots (II),$$

l'indice p d'accens indiquant en même temps le $p^{ième}$ degré mesuré hors de l'équateur; mais le premier terme de cette proportion est évidemment égal à la somme 1507,88 de toutes les différences marquées dans la troisième colonne de la table 1 (art. 10). Le second terme est $\frac{1}{2}-\frac{\cos.2L'}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\cos.2L''}{2} \ldots\ldots +\frac{1}{2}-\frac{\cos.2L^{m'}}{2}=\frac{m}{2}-\frac{1}{2}(\cos.2L'+\cos.2L'' \ldots\ldots +\cos.2L^{m'})$; donc, faisant pour abréger

$$M=1507,88$$

$$N=\cos.2L'+\cos.2L'' \ldots\ldots +\cos.2L^{m'},$$

la proportion précédente (II) deviendra

$$M : \frac{m-N}{2} :: A^{p'}-A : \sin.^2 L^{p'}.$$

Or, s'il y a erreur dans cette proportion, alors les premier, second et quatrième termes restant les mêmes, le troisième sera plus grand ou plus petit que $A^{p'}-A$ d'une quantité que nous représentons par $E^{p'}$; donc

$$M : \frac{m-N}{2} :: A^{p'}-A+E^{p'} : \sin.^2 L^{p'},$$

d'où on tire

$$E^{p'}=\frac{2M\sin.^2 L^{p'}}{m-N}-(A^{p'}-A). \quad \ldots\ldots (74).$$

Faisant successivement $p=1,2,3 \ldots\ldots m$, et ajoutant toutes les équations résultantes, on aura $E'+E'' \ldots\ldots +E^{m'}=\frac{2M}{m-N}(\sin.^2 L'+\sin.^2 L'' \ldots\ldots +\sin.^2 L^{m'})-[(A'-A)+(A''-A) \ldots\ldots +(A^{m'}-A)]=\frac{2M}{m-N}\times\frac{m-N}{2}-M=0$; donc la somme des erreurs positives est égale à celle des erreurs négatives.

Appliquant notre formule (74) au calcul des degrés de la table I (art. 10) des longueurs des degrés du méridien, ce qui donne $N = -0{,}1494573$, $m = 6$ et $M = 1507{,}88$, on a, en nombres entiers,

$E' = -108$	$E'' = 74$
$E^{vi} = -20$	$E''' = 25$
	$E^{iv} = 17$
Somme -128	$E^{v} = 12$
	Somme 128

On voit que la plus grande erreur négative -108 est donnée par le degré mesuré au cap de Bonne-Espérance par La Caille, et que la plus grande erreur positive 74 est donnée par le degré mesuré en Pensylvanie, par Masson et Dixon.

15. Occupons-nous maintenant de déterminer les limites des erreurs données par les longueurs observées du pendule.

De l'équation (71) ou plutôt de celle $1 + 2\varepsilon \cos.^2 L' = (1 + 2\varepsilon)\frac{\varpi}{\varpi'}$, d'où l'on a déduit celle (71), on tire la proportion

$$1 + 2\varepsilon \cos.^2 L' : 1 + 2\varepsilon :: \varpi : \varpi'$$

ou

$$(1 + 2\varepsilon) - (1 + 2\varepsilon \cos.^2 L') : 1 + 2\varepsilon \cos.^2 L' :: \varpi' - \varpi : \varpi;$$

et réduisant, on aura

$$2\varepsilon \sin.^2 L' : 1 + 2\varepsilon \cos.^2 L' :: \varpi' - \varpi : \varpi,$$

d'où

$$\varpi' - \varpi = \frac{2\varepsilon\varpi \sin.^2 L'}{1 + 2\varepsilon \cos.^2 L'},$$

et, négligeant les secondes puissances de ε, il vient

$$\varpi' - \varpi = 2\varepsilon\varpi \sin.^2 L' \; . \; . \; . \; . \; . \; (K).$$

On aura de même pour une autre longueur ϖ'' du pendule observée pour la latitude L'', l'équation $\varpi'' - \varpi = 2\varepsilon\varpi \sin.^2 L''$: divisant par cette dernière équation celle (K), on a $\frac{\varpi' - \varpi}{\varpi'' - \varpi} = \frac{\sin.^2 L'}{\sin.^2 L''}$. Donc, dans l'hypothèse actuelle, les différences des longueurs du pendule à celle mesurée sous l'équateur, sont sensiblement entr'elles comme les carrés des sinus des latitudes des lieux où elles ont été observées; d'où il suit que, représentant toujours par ϖ la longueur du pendule sous l'équateur, et par $\varpi', \varpi'', \varpi''' \ldots \varpi^{m'}$ les longueurs du pendule

en dehors de l'équateur, enfin par L', L'', L'''. . . . . $L^{m'}$ les latitudes correspondantes, on aura la suite de rapports géométriques égaux

$$\varpi'-\varpi:\sin.^2 L'::\varpi''-\varpi:\sin.^2 L''::\varpi'''-\varpi:\sin.^2 L'''....::\varpi^{m'}-\varpi:\sin.^2 L^{m'};$$

donc

$$\varpi'+\varpi''+\varpi'''...+\varpi^{m'}-m\varpi:\sin.^2 L'+\sin.^2 L''+\sin.^2 L'''....+\sin.^2 L^{m'}::\varpi^{p'}-\varpi:\sin^2 L^{p'}.$$

Faisant $M'=\varpi'+\varpi''+\text{etc.}-m\varpi=0{,}03687$, somme des différences marquées dans la troisième colonne de la table IV (art. 13); et, comme dans l'article précédent, faisant $N=\cos.2L'+\cos.2L''....+\cos.2L^{m'}$, on aura la proportion

$$M':\frac{m-N}{2}::\varpi^{p'}-\varpi:\sin.^2 L^{p'}.$$

Or, s'il y a erreur dans cette proportion, les premier, second et quatrième termes restant les mêmes, le troisième sera trop grand ou trop petit d'une quantité que je représente par $e^{p'}$; on aura donc

$$e^{p'}=\frac{2M'}{m-N}\sin.^2 L^{p'}-(\varpi^{p'}-\varpi).\;.\;.\;.\;.\;(75).$$

Faisant successivement $p=1, 2 ..... m$, et ajoutant toutes les équations résultantes, on aura $e'+e''.....+e^{m'}=\frac{2M'}{m-N}(\sin.^2 L'+\sin.^2 L''......+\sin^2 L^{m'})$ $-[(\varpi'-\varpi)+(\varpi''-\varpi).....+(\varpi^{m'}-\varpi)]=\frac{2M'}{m-N}\times\frac{m-N}{2}-M'=0$; donc la somme des erreurs positives est égale à celle des erreurs négatives.

Appliquant la formule (75) aux quantités données par la table IV (art. 13), on aura, comme nous l'avons dit plus haut,

$$M'=0{,}03687.$$

De plus, on aura $m=12$, et $N=-0{,}8345501$, ce qui donne la quantité constante $\frac{2M'}{m-N}=\frac{0.03687}{6{,}4172750}$, et on aura enfin

$e^{v}=0{,}000014$	$e^{i}=-0{,}000042$
$e^{vi}=0{,}000097$	$e^{ii}=-0{,}000015$
$e^{viii}=0{,}000028$	$e^{iii}=-0{,}000290$
$e^{ix}=0{,}000104$	$e^{iv}=-0{,}000080$
$e^{xi}=0{,}000174$	$e^{vii}=-0{,}000054$
$e^{xii}=0{,}000084$	$e^{x}=-0{,}000016$
Somme. 0,000501	Somme − 0,000497

Ainsi, on a six erreurs positives dont la somme est, à moins d'un cent-millième près $=0,0005$, et six erreurs négatives dont la somme est aussi, à moins d'un cent millième près, $=0,0005$.

La plus grande erreur négative $-0,00029$ est donnée par la longueur du pendule au cap de Bonne-Espérance, comme elle avoit aussi été donnée par la mesure de la longueur du degré du méridien au même endroit; ce qu'il est à propos de remarquer pour se convaincre encore mieux, que ces erreurs proviennent moins des erreurs commises dans les mesures géodésiques et observations faites par La Caille au cap de Bonne-Espérance, que de la vraie irrégularité du globe terrestre dont le sphéroïde osculateur est si dissemblable par certaines latitudes.

La plus grande erreur positive 0,000174 est donnée par la longueur du pendule en Bothnie.

Remarquons encore que la plus grande erreur négative $-0,00029$ de la longueur du pendule, n'est environ que la 3449.me partie de la longueur moyenne du pendule; au lieu que la plus grande erreur négative -108 relativement aux mesures des degrés du méridien, est environ la 475.me partie du degré moyen, et que la plus grande erreur positive 0,000174 dans la longueur du pendule, n'est qu'environ la 5747.me partie de la longueur moyenne du pendule, au lieu que la plus grande erreur positive 74 dans les mesures géodésiques est environ la 693.me partie du degré moyen. D'où l'on voit que les mesures des longueurs du pendule s'adaptent beaucoup mieux à l'hypothèse de $n=2$ que les mesures des degrés du méridien; car, dans le premier cas, les erreurs sont sept à huit fois moindres que dans le second.

16. Dans la *Connoissance des temps* de l'an 10, pag. 463, il est dit que la méridienne entière entre Dunkerque et Montjouy, qui soutend un arc céleste de $9^{\circ},67380$ (ancienne division du cercle), ou $10^{\circ},7487$ (nouvelle division du cercle), et dont le milieu passe par la latitude de $46^{\circ}\ 11'\ 58''$ (ancienne division), ou $51^{\circ},3327$ (nouvelle division), est de 275792,36 *modules*; et à la page 459 de la même *Connoissance des temps*, il est dit que le module dont se sont servis Delambre et Méchain dans la mesure de la méridienne, est exactement le double de la toise du Pérou, lorsque le thermomètre centigrade est à $12^{\circ},5$, c'est-à-dire par une température moyenne. Ainsi, nous servant toujours pour unité de ces mesures, de la toise du Pérou, nous aurons, en représentant par M' l'arc du méridien mesuré,

$$M'=551584,72.$$

Faisons de plus L'= à latitude 45°,9583 de la tour de Montjouy, qui est l'extrémité sud de l'arc mesuré $+0°,5$, afin d'avoir la latitude moyenne du premier degré de cet arc, ce qui donne

$$L' = 46°,4583.$$

Les latitudes moyennes des 9 degrés suivans de l'arc mesuré, allant de suite en augmentant d'un degré jusqu'au neuvième degré, le dernier terme de cette suite sera $46°,4583 + 9° = 55°,4583$, qui ne diffère de la latitude 56°,7070 de la tour de l'église de Dunkerque, qui est le point le plus nord de l'arc mesuré, que de 1°,2487, et de la latitude moyenne $56°,7070 - 0,5$ ou 56°,2070 du dernier degré de l'arc mesuré du méridien, que de 0,7487. Donc la suite des latitudes moyennes de tous les degrés de l'arc mesuré entre la tour de Montjouy et celle de Dunkerque est

$$L',\ L'+1°,\ L'+2°,\ \ldots\ldots\ L'+9°,\ L'+9°,7487.$$

Représentons par (A) la longueur absolue 51316,58 du degré mesuré sous l'équateur; enfin représentons par (L) cette latitude moyenne 51°,3327.

Cela posé, la proportion (H) de l'article 14 dans laquelle nous ferons $m = 10,7887$, nous donnera celle

$$M' - mA : \sin.^2 L' + \sin.^2 (L'+1°) \ldots\ldots + \sin.^2 (L'+9°) + \sin.^2 (L'+9°,7487)$$

$$:: (A) - A : \sin.^2 (L) \ldots\ldots (K).$$

Mais, généralement, $\sin.^2 L' + \sin.^2 (L'+1°) \ldots + \sin.^2 (L'+p°) = \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2L'}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2(L'+1°)}{2} \ldots + \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2(L'+p°)}{2} = \frac{p}{2} - \frac{1}{2}[\cos. 2L' + \cos. 2(L'+1°) + \ldots + \cos. 2(L'+p°)]$. Or, la série qui est entre les parenthèses carrées est $= \cos. 2L' + \cos. 2L' \cos. 2° + \cos. 2L' \cos. 4° \ldots + \cos. 2L' \cos. 2p° - (\sin. 2L' \sin. 2° + \sin. 2L' \sin. 4° \ldots + \sin. 2L' \sin. 2p°) = \cos. 2L'(1 + \cos. 2° + \cos. 4° \ldots + \cos. 2p°) - \sin. 2L'(\sin. 2° + \sin. 4° \ldots + \sin. 2p°)$. Mais $\cos. 2° + \cos. 4° \ldots + \cos. 2p°$ ou $\Sigma \cos. 2p° = \frac{\cos.(p+1)° \sin. p°}{\sin. 1°}$, et $\sin. 2° + \sin. 4° \ldots + \sin. 2p°$ ou $\Sigma \sin. 2p° = \frac{\sin.(p+1)° \sin. p°}{\sin. 1°}$; donc $\cos. 2L'(1 + \text{etc.}) - \sin. 2L'(\sin. 2° + \text{etc.}) = \cos. 2L'\left(1 + \frac{\cos.(p+1)° \sin. p°}{\sin. 1°}\right) - \frac{\sin. 2L' \sin.(p+1)° \sin p°}{\sin. 1°} = \cos. 2L' + \frac{\sin. p°}{\sin. 1°}[\cos. 2L' \times \cos.(p+1)° - \sin. 2L' \sin.(p+1)°] = \cos. 2L' + \frac{\sin. p°}{\sin. 1°} \cos.(2L'+p+1)$; et en-

fin $\sin.^2 L' + \sin.^2 (L'+1^\circ) \ldots + \sin.^2(L'+p^\circ) = \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\cos. 2L' - \frac{\sin. p^\circ}{2\sin. 1^\circ} \times \cos.(2L'+p+1)$.

Substituant dans cette dernière équation la valeur de $p=9$, et ajoutant aux deux membres la quantité $\sin.^2(L'+9^\circ,7487)$, on aura le second terme de la proportion (K), qui deviendra $\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\cos. 2L' - \frac{\sin. 9^\circ}{2\sin. 1^\circ}\cos.(2L'+10^\circ) + \sin.^2(L'+9^\circ,7487) = 5 - \frac{1}{2}[\cos. 2L' + \cos.(2L'+19^\circ,4974)] - \frac{\sin 9^\circ}{2\sin. 1^\circ}\cos. 2(L'+5^\circ)$.

Faisant, pour abréger,

$H = 5 - \frac{1}{2}[\cos. 2L' + \cos.(2L'+19^\circ,4974)] - \frac{\sin. 9^\circ}{2\sin. 1^\circ}\cos. 2(L'+5^\circ) = 5,24209$,

on aura la proportion

$$M' - mA : H :: (A) - A : \sin^2(L);$$

d'où l'on tire l'équation

$$(A) - A = \frac{(M' - mA)\sin^2(L)}{H} \quad \ldots\ldots (76).$$

Mais de l'équation (69), on tire celle

$$\omega[(A) - A] + 3\omega A \sin.^2(L) = (A) - A,$$

d'où $(A) - A = 3A\sin.^2 L \times \frac{\omega}{1-\omega}$; et égalant ces deux valeurs de $(A) - A$, on a $\frac{\omega}{1-\omega} = \frac{M' - mA}{3AH}$; d'où

$$\omega = \frac{M' - mA}{M' + (3H - m)A} \quad \ldots\ldots (77).$$

On peut soumettre le calcul de cette formule à celui purement logarithmique, de la manière suivante. On a $\omega = \frac{1 - \frac{mA}{M'}}{1 + \frac{3H-m}{M'} \times A}$; donc, faisant

$$\left\{\cos. T = \sqrt{\left(\frac{mA}{M'}\right)}, \text{ et } \tang. S = \sqrt{\left(\frac{(3H-m)A}{M'}\right)} = \cos. T\sqrt{\frac{3H-m}{m}}\right\} \ldots\ldots (78),$$

on aura

$$\omega = \sin.^2 T \cos.^2 S \quad \ldots\ldots (79).$$

Voici le calcul de ω par le moyen des trois formules précédentes :

$m = 10{,}7487$	log. 1,0313561	
$A = 51077{,}7$	log. 4,7082314	
$M' = 551584{,}72$	com. log. 4,2583877	
	Somme. 9,9979752	
	½ somme. 9,9989876	... log. cos. de T.. T $=4°,3444$...2 log. sin. 7,6674332
$H = 5{,}24209$		
$3H = 15{,}72627$		
$m = 10{,}7487$	co. ½ log. 9,4843219	
$3H - m = 4{,}97757$	½ log. 0,3485088	
	Somme. 9,8218183	log. tang. de S... S $=37°,2721$...2 log. cos. 9,8415816
		Somme. 7,5090148

qui est le log. de ω; donc $\omega = 0{,}00323$.

Prenant le complément arithmétique du logarithme 7,5090148 de ω, on aura 2,4909852 qui est le log. de 310; donc le rapport des deux axes terrestres est $= \frac{310}{311}$.

17. Problème. *Étant considérés l'équateur terrestre, ses parallèles, les grands cercles de la sphère inscrite au sphéroïde terrestre et les méridiens de ce dernier; trouver les latitudes auxquelles la longueur absolue d'un degré de quelqu'une de ces courbes est égale à celle d'un degré de quelqu'autre de ces mêmes courbes.*

Solution. Il est aisé de voir que, pour résoudre ce problème, il ne faut qu'égaler les expressions analytiques des rayons osculateurs des courbes que l'on veut comparer, d'où l'on déduira la valeur du sinus ou du cosinus de la latitude demandée. Mais il faut remarquer que, des six combinaisons que l'on obtient en comparant deux à deux les quatre choses considérées dans l'énoncé du problème, il y en a une qui présente un problème impossible à résoudre; c'est celle où l'on compareroit le degré du globe inscrit avec celui de l'équateur terrestre; et il y en a une seconde qu'il faut négliger, parce qu'elle présente à résoudre un problème dont la solution est évidente d'elle-même; c'est celle où, comparant les degrés des parallèles terrestres avec ceux de l'équateur, on demanderoit sous quelle latitude ils doivent être égaux. Examinons maintenant les quatre autres cas.

1.° *Trouver la latitude sous laquelle le degré du méridien est égal à celui du globe inscrit.*

Je fais $1 = 1 + 3\omega \sin.^2 L - \omega$ (éq. 36); d'où

$$\sin. L = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ donc } L = 39^\circ,18265.$$

La valeur de L étant absolument indépendante de ω, il s'en suit que, quel que soit l'aplatissement de notre sphéroïde, ce sera toujours par $39^\circ,18265$ de latitude que le degré du méridien sera égal à celui de la sphère inscrite.

II.° *Déterminer sous quelle latitude le degré du méridien est égal au degré de l'équateur.*

Je fais $1 + \omega = 1 + 3\omega \sin.^2 L - \omega$; d'où

$$\sin. L = \sqrt{\tfrac{2}{3}}; \text{ donc } L = 60^\circ,81735.$$

La valeur de L étant absolument indépendante de celle de ω, il s'en suit que, quel que soit l'aplatissement de notre sphéroïde, ce sera toujours par la latitude de $60^\circ,81735$ que le degré du méridien sera égal à celui de l'équateur.

On remarquera 1.° que les latitudes vraies trouvées par les solutions des deux questions précédentes, sont complément l'une de l'autre.

2.° Que ces deux solutions ne sont que des cas particuliers des solutions générales des mêmes questions, quelle que soit la valeur de n; car, égalant à l'unité la valeur générale du rayon osculateur R′ (éq. 13), on aura

$$1 = \frac{\omega(n+1)\sin^n L + b - a}{b - 1},$$

d'où

$$\sin. L = \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)}} \quad \ldots\ldots (80),$$

et égalant la valeur du même rayon osculateur au rayon $1 + \omega$ de l'équateur, on tirera de cette égalité l'équation

$$\sin. L = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{n+1}\right)} \quad \ldots\ldots (81).$$

Passons actuellement aux solutions des autres cas du problème que nous nous sommes proposé de résoudre.

III.° *Déterminer sous quelle latitude les degrés de longitude sont égaux aux degrés de latitude.*

Égalant les valeurs de x et de R′ (éq. 30 et 36) on a $\omega \cos. L - \omega \cos.^3 L + a \cos. L = 1 + 2\omega - 3\omega \cos.^2 L$, et ordonnant par rapport à cos. L, il vient l'équation du troisième degré

$$\cos.^3 L - 3\cos.^2 L - \frac{a+\omega}{\omega} \cos. L + \frac{1+2\omega}{\omega} = 0$$

qui, étant résolue, donnera la latitude demandée. Faisant $\omega=0{,}002984$, on trouvera $L=6°{,}872$.

IV.° *Déterminer sous quelle latitude les degrés de longitude sont égaux à ceux du globe inscrit.*

Je fais $x=1$, ou $\omega\cos. L\sin.^2 L+a\cos. L=1$ (éq. 30), d'où

$$\cos.^3 L-\frac{(1+2\omega)}{\omega}\cos. L-\frac{1}{\omega}=0.$$

Résolvant cette équation du troisième degré, on aura la valeur demandée de L. Si l'on fait comme précédemment, $\omega=0{,}002984$, on trouvera $L=6{,}0805$.

18. Problème. *Trouver sous quelle latitude la longueur absolue d'un degré du méridien est moyenne entre celles de tous les autres degrés.*

Solution. Faisant successivement $\sin. L=0$ et $\sin. L=1$, l'équation (13) devient $R'=\frac{b-a}{b-1}$ et $R'=\frac{n\omega+b-1}{b-1}$. Or, le rayon de courbure moyen proportionnel entre ces deux-là, est $\frac{(n-1)\omega}{2(b-1)}+1$; égalant cette quantité avec la valeur générale du rayon osculateur (éq. 13), il vient

$$\frac{(n-1)\omega}{2}=(n+1)\omega\sin.^n L-\omega,$$

d'où l'on tire

$$\sin. L=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\ldots\ldots (82).$$

Ainsi, lorsque $n=2$, le degré dont la longueur absolue est moyenne proportionnelle entre celles des autres dégrés se trouve par 50°.

19. Problème. *Déterminer combien de parties de grand cercle de la sphère inscrite au sphéroïde terrestre, sont contenues dans la longueur absolue et connue d'un arc du méridien qui répond à une différence d'un degré en latitude vraie, sans faire entrer dans le calcul la quantité ω.*

Solution. Soient

A' le degré du méridien dont la longueur absolue est connue,

A le degré du méridien sous l'équateur,

r la longueur absolue d'un degré du globe inscrit,

L la latitude vraie du milieu du degré A',

K le nombre de parties de grand cercle de la sphère inscrite qui sont contenues dans l'arc A' du méridien donné de longueur absolue en toises.

Il est clair qu'à cause que nous avons démontré que dans l'hypothèse de $n=2$, on avoit toujours le degré de la sphère inscrite de même longueur absolue que celui du méridien sous la latitude vraie dont le sinus est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (première question de l'art. 17), nous aurons, d'après la propriété des méridiens sur laquelle est fondée cette théorie dans le cas de $n=2$, la proportion $\sin.^2 L : \frac{1}{3} :: A'-A : r-A$, d'où

$$r=\frac{A'-A+3A\sin.^2 L}{3\sin.^2 L} \; \ldots\ldots \; (83).$$

Donc, pour savoir combien de parties de grand cercle de la sphère inscrite contient A', c'est-à-dire, pour connoître la valeur de K, je fais la proportion

$$\frac{A'-A+3A\sin.^2 L}{3\sin.^2 L} : A' :: 1^\circ : K \; \ldots\ldots \; (\delta),$$

d'où

$$K=\left(\frac{3A'\sin.^2 L}{A'-A+2A\sin.^2 L}\right)^{\text{degrés}} \; \ldots\ldots \; (84).$$

Pour faire une application numérique de cette formule, proposons-nous de trouver le nombre de parties de la circonférence du cercle de la sphère inscrite qui sont contenues dans le degré du méridien mesuré en Bothnie par les astronomes suédois.

A=51077,7	log.	4,7082314	....	A'=51477,3 log.	4,7116158
L=73,7037	2 log. sin.	9,9236926	....		9,9236926
3	log.	0,4771213	....		0,4771213
	Somme.	5,1090453			
Cette somme est le log. de.		....	128542,1		
		A'−A=	399,6		
		Somme.	128941,7	com. ar. log.	4,8896065
				Somme.	0,0020362

qui est le log. de 1,0047; donc $K=1^\circ,0047$.

Remarque I. De la proportion (δ), on tire

$$r=\frac{A'}{K} \; \ldots\ldots \; (85).$$

Donc, nous servant des mêmes données que dans le calcul précédent, on trouvera la longueur absolue d'un degré du globe inscrit = 51236,5 toises.

Remarque II. Mais si l'on ne veut pas s'assujétir à exclure du calcul la différence α des deux axes, on aura des expressions de r et de K, qui seront plus

simples que les précédentes, et certainement plus exactes dans l'hypothèse actuelle de $n=2$: en effet, on a évidemment la proportion

$$1+3\varpi \sin.^2 L-\varpi (\text{éq. } 56) : A' :: 1 : r,$$

d'où

$$r=\frac{A'}{1+3\varpi \sin.^2 L-\varpi} \ldots\ldots (86),$$

et

$$K=1+3\varpi \sin.^2 L-\varpi \ldots\ldots (87)\ (*).$$

Or, dans la première de ces formules, il n'entre que la mesure d'un seul degré du méridien, et dans la seconde il n'en entre point. De plus, la quantité $\varpi=0{,}00297$ a été donnée par la formule (71) déduite des lois de la pesanteur et des observations des longueurs du pendule par différentes latitudes. D'ailleurs, cette valeur de ϖ est sensiblement la même que celle donnée par la formule (69) lorsqu'on y substitue les valeurs géodésiques auxquelles on doit le plus de confiance ; donc, les formules (86 et 87) doivent donner des résultats plus exacts lorsqu'on y fait $\varpi=0{,}00297$ que les formules (83 et 84).

Faisant toujours $A'=51477{,}3$, $L=75°{,}7037$ et $\varpi=0{,}00297$, on trouve la longueur absolue d'un degré de la sphère inscrite $=51246{,}5$ et

$$K=1°{,}0045.$$

Faisant successivement $L=0$ et $L=\frac{\pi}{2}$, la formule (87) donne pour le premier cas, le degré du méridien sous l'équateur $=0{,}99703$, et le degré du méridien sous les pôles $=1{,}00594$. Mais de l'équation (85) on tire la longueur absolue d'un degré du méridien $=$ à la longueur absolue 51246,5 d'un degré du globe inscrit multiplié par K ; donc, sous l'équateur, la longueur absolue d'un degré du méridien est $=51246{,}5\times 0{,}99703=51094{,}3$, qui ne diffère de celui mesuré au Pérou par Bouguer et La Condamine, que de $16^{\text{toi.}}{,}6$. Dans la seconde supposition de $L=\frac{\pi}{2}$ on a la longueur absolue d'un degré du méridien sous les pôles, qui est égale à $51246{,}5\times 1{,}00594=51551$ toises.

20. Problème. *Etant données les latitudes vraies des extrémités d'un arc m*

(*) Quoique l'expression de K soit la même que celle du rayon de courbure R', cependant il seroit absurde de considérer ces deux quantités comme étant égales ; car l'équation (36) exprime la valeur du rayon osculateur en parties de rayon de la sphère inscrite, ou du demi-petit axe de la terre ; et l'équation (87) exprime la valeur de K en parties d'un degré de la sphère inscrite.

d'un méridien terrestre, trouver son arc de projection sur la sphère inscrite.

SOLUTION. Soient

L'' la latitude vraie de l'extrémité de l'arc m qui est la plus éloignée de l'équateur,

L' la latitude vraie de l'extrémité de l'arc m qui est la plus près de l'équateur,

λ'' la latitude corrigée de la première des extrémités de l'arc m,

λ' la latitude corrigée de la seconde des extrémités de l'arc m,

μ l'arc de projection $\lambda''-\lambda'$ de l'arc m sur la sphère inscrite.

L'équation (35) nous donne $\text{tang.}\,\lambda'=\frac{\text{tang.}\,L'}{a}$, et $\text{tang.}\,\lambda''=\frac{\text{tang.}\,L''}{a}$; donc, on connoîtra λ' et λ'', d'où l'on conclura aisément $\lambda''-\lambda'$ ou μ. Mais, pour avoir la formule générale qui donne directement μ en fonctions de quantités données a, L' et L''; nous prendrons la différence des deux équations précédentes, ce qui nous donnera celle $\text{tang.}\,\lambda''-\text{tang.}\,\lambda'=\frac{\text{tang.}\,L''-\text{tang.}\,L'}{a}$, ou $\sin.\,\mu=\frac{\sin.\,(L''-L')\cos.\,\lambda'\cos.\,\lambda''}{a\cos.\,L'\cos.\,L''}$; mais $\cos.\,\lambda'=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang.}^2\lambda'}}=\frac{a\cos.\,L'}{\sqrt{a^2\cos.^2L'+\sin.^2L'}}=\frac{(1+\omega)\cos.\,L'}{\sqrt{1+2\omega\cos.^2L'+\omega^2\cos.^2L'}}=\frac{(1+\omega)\cos.\,L'}{\sqrt{(1+\omega\cos.^2L')^2+\frac{1}{4}\omega^2\sin.^2 2L'}}=\frac{(1+\omega)\cos.\,L'}{1+\omega\cos.^2L'}=(1+\omega\sin.^2L')\cos.\,L'$. On trouvera de même $\cos.\,\lambda''=(1+\omega\sin.^2L'')\cos.\,L''$. Donc $\cos.\,\lambda'\cos.\,\lambda''=[1+\omega(\sin.^2L'+\sin.^2L'')]\cos.\,L'\cos.\,L''$, et $\sin.\,\mu=\frac{\sin.\,(L''-L')[1+\omega(\sin.^2L'+\sin.^2L'')]}{(1+\omega)}$, ou $\sin.\,\mu=\sin.\,(L''-L')[1-\omega(\cos.^2L'-\sin.^2L'')]$. Mais $\cos.^2L'-\sin.^2L''=\cos.\,(L'+L'')\cos.\,(L''-L')$; donc

$$\sin\,\mu=\sin.\,(L''-L')[1-\omega\cos.\,(L'+L'')\cos.\,(L''-L')]\ \ldots\ldots\ (88).$$

Pour soumettre cette formule au calcul logarithmique, faisons

$$\cos.\,Q=\sqrt{\omega\cos.\,(L'+L'')\cos.\,(L''-L')}\ \ldots\ldots\ (89);$$

d'où

$$\sin.\,\mu=\sin.\,(L''-L')\sin.^2Q\ \ldots\ldots\ (90).$$

Soit pris $L''-L'=1^\circ$, d'où $L''=L'+1^\circ$, alors la formule (88) devient

$$\sin.\,\mu=\sin.\,1^\circ[1-\omega\cos.\,(2L'+1^\circ)\cos.\,1^\circ]\ \ldots\ldots\ (91).$$

Or, si $2L'+1^\circ=100^\circ$, d'où $L'=49^\circ\,50'$, on aura la formule précédente, qui donnera $\sin.\,\mu=\sin.\,1^\circ$, d'où

$$\mu=1^\circ.$$

Mais lorsque $L'=49^\circ{,}50$, on a $L''(=L'\ \ 1^\circ)=50^\circ\,50'$; donc la projection

du degré du méridien compris entre les latitudes vraies 49° 50′ et 50° 50′ sur la sphère inscrite, est d'un degré de cette sphère.

Si dans la formule (88) on fait $L''=100°$ et $L'=0$, on aura

$$\sin.\mu = \sin.100°,$$

c'est-à-dire, que la projection du quart du méridien terrestre sur la sphère inscrite est le quart du méridien de cette même sphère, ce qui est évident de soi-même.

Faisant $2L'+1°=0$, d'où $L'=-50'$ la formule (91) donne $\sin.\mu=\sin.1°(1-\omega\cos.1°)$, et faisant $2L'+1°=200°$, d'où $L'=99°50'$, la même formule (91) donne $\sin.\mu=\sin.1°(1+\omega\cos.1°)$; donc la projection du degré du méridien coupé par l'équateur est de 99′70″, et celle du degré sous le pôle est de 1° 0′ 30″.

Enfin, il est évident que de tels arcs de projection seront $<$ ou $>$ 1°, suivant que L′ sera $<$ ou $>$ 49° 50′; puisque $\cos.(2L'+1)$ est positif ou négatif, suivant que L′ est $<$ ou $>$ 49° 50′.

21. Représentant par M′ et M″ les arcs du méridien compris entre l'équateur et les latitudes vraies respectives L′ et L″, l'équation (67) nous donnera celles

$$M'=(1+\tfrac{1}{2}\omega)L'-\tfrac{3}{4}\omega\sin.2L',$$
$$M''=(1+\tfrac{1}{2}\omega)L''-\tfrac{3}{4}\omega\sin.2L''.$$

Donc, représentant toujours par m l'arc $M''-M'$ du méridien compris entre les latitudes vraies L′ et L″, on aura

$$m=(1+\tfrac{1}{2}\omega)(L''-L')-\tfrac{3}{2}\omega\sin.(L''-L')\cos.(L'+L'')\ldots\ldots(v),$$

ou, afin d'avoir m en parties de la circonférence d'un grand cercle de la sphère inscrite, multipliant le dernier terme de la valeur de m par 63°,661977 qui est, à un millionième près, la longueur du rayon en parties de la circonférence, on aura

$$m=(1+\tfrac{1}{2}\omega)(L''-L')-\omega\sin.(L''-L')\cos.(L'+L'')\,95°,4929655\ldots\ldots(92).$$

Faisant $L'=0$ et $L''=100°$, on retrouve évidemment l'équation (68)

$$Q=(1+\tfrac{1}{2}\omega)\frac{\pi}{2}$$

que nous avions obtenue à l'art. 9.

Substituant la valeur de $\omega=0{,}00297$, on a $Q=1{,}001485\times100=100{,}1485$: or, nous avons vu que la même valeur de ω donnoit la longueur absolue d'un

degré Γ de la sphère inscrite $=51246,5$ toises; donc le quart Q du méridien est $100,1485 \times 51246,5 = 5132260,1$ toises. Prenant la dix-millionième partie de cette quantité, on aura pour la longueur du mètre, la quantité 0,513226o1, ou

$$\text{le mètre} = 3^{\text{pieds}}\,0^{\text{pouc.}}\,11^{\text{lig.}},427.$$

Remarque. Si l'on donnoit à ϖ une valeur un peu différente de celle que nous lui avons donnée, par exemple, si l'on faisoit $\varpi = 0,002981$, ce qui donne le rapport des axes $= \frac{335}{336}$, on pourroit, sans recommencer le calcul de la formule (86), en déduire la valeur de Q; et par conséquent la valeur du mètre, en différenciant l'équation (86), par rapport à Γ et ϖ, ce qui donne

$$d\Gamma = \frac{-A'(3\sin.^2 L - 1)d\varpi}{(1+3\varpi\sin.^2 L - \varpi)^2}.$$

Mais la même équation (86) donne

$$1+3\varpi\sin.^2 L - \varpi = \frac{A'}{\Gamma}, \text{ d'où } 3\sin.^2 L - 1 = \frac{A'-\Gamma}{\varpi\Gamma};$$

donc

$$d\Gamma = \frac{-(A'-\Gamma)\Gamma\, d\varpi}{A'\varpi} \;.\;.\;.\;.\;.\; (93).$$

Dans ce cas-ci, où $d\varpi = 0,000014$, nous aurons $d\Gamma = \frac{-230,8 \times 51246,5 \times 0,000014}{51477,3 \times 0,00297}$ $= -10,8$; donc $\Gamma = 51246,5 - 10,8 = 51235,7$. Or, $Q = (1,001492) \times 100$ $= 100,1492$; donc la longueur absolue du quart du méridien est $= 100,1492$ $\times 51235,7 = 5131214,56644$, d'où l'on conclut

$$\text{le mètre} = 3^{\text{pi}}\,0^{\text{po}}\,11^{\text{lig}},347.$$

La *Connoissance des temps* de l'an 10 le marque de $3^{\text{pi}}\,0^{\text{po}}\,11^{\text{lig}},296$ (pag. 467), donc le nôtre est trop grand de 0,051 de lignes, ou environ 0,612 de point.

Pour faire une application de la formule (92), proposons-nous de trouver la longueur absolue de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Paris, dont la latitude vraie est de 54°,2693, et de Florence, dont la latitude vraie est 48,6389. Voici le calcul:

$\omega = 0{,}002984$ log. $7{,}4747988$

$\frac{1}{2}\omega = 0{,}001492$

$1+\frac{1}{2}\omega = 1{,}001492$ log. $0{,}0006475$

$L'' = 54^\circ,2639$

$L' = 48,\ 6389$

$L''-L' = 5,\ 6250$ log. $0{,}7501225$ log. sin. $8{,}9456772$

Somme. $0{,}7507700$ . . . . log. de $5{,}633408$

$L''+L' = 102{,}9028$ . . . . log. cos. $8{,}6587865$

nombre const. $= 95{,}4929655$ . . . . . . log. $1{,}9799714$

Somme. $7{,}0592339$ log. de $0{,}001146$

Somme. $5{,}634554$

Multipliant cette dernière somme par la valeur de $r=51235{,}7$ qui correspond à celle de $\omega=0{,}002984$, et divisant par $3^t{,}07873$ qui est la longueur du mètre en toises, on a pour la longueur absolue de l'arc du méridien compris entre Paris et Florence, 56 myriamètres 2 kilomètres 9 hectomètres 4 décimètres 7 mètres.

Fig. 1. Passons maintenant à l'hypothèse de $n=4$.

22. Faisant $n=4$, ce qui donne $b=\frac{8}{5}$, des calculs semblables à ceux des articles 6, 7 et 8 donneront les équations

$$y=\frac{\sin.L}{5}[5-3\omega(1-\sin.^4L)]\ .\ .\ .\ .\ .\ (94);$$

$$x=[a+\frac{\omega\sin.^4L}{5}(4+3\sin.^4L)]\cos.L\ .\ .\ .\ .\ .\ (95);$$

$$\sin.A=\frac{\sin.L}{5}[5-3\omega(1-\sin.^4L)]\ .\ .\ .\ .\ .\ (96);$$

$$\text{tang.}A=[1-\tfrac{8}{5}\omega(1+\sin.^4L)]\,\text{tang.}L\ .\ .\ .\ .\ .\ (97);$$

$$R'=1-\tfrac{3}{5}\omega(1-5\sin.^4L)\ .\ .\ .\ .\ .\ (98);$$

$$\text{normale } A'L=1-\frac{3\omega(1-\sin.^4L)}{5}\ .\ .\ .\ .\ .\ (99);$$

$$\text{sous-normale } BL=\left(1-\frac{3\omega(1-\sin.^4L)}{5}\right)\cos.L\ .\ .\ .\ .\ .\ (100);$$

$$\text{tang.}A'T=\left(1-\frac{3\omega(1-\sin.^4L)}{5}\right)\text{tang.}L\ .\ .\ .\ .\ .\ (101);$$

$$\text{sous-tang. } TB=\sin.L\,\text{tang.}L\left(1-\frac{3\omega(1-\sin.^4L)}{5}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ (102);$$

dist. CL du centre de la terre au point L de gravitation $= \omega \cos. L [1 + \frac{1}{5}(3 + 4 \sin.^2 L)]$ ..... (103); Fig. 1.

dist. CD du centre C de la terre au point D où le petit axe est coupé par le rayon osculateur prolongé $= \omega \sin. L [1 + \frac{1}{5}(3 + 4 \sin.^2 L)]$ ..... (104);

dist. DL des deux points L et D de section de la normale prolongée, par les deux axes $= \omega [1 + \frac{1}{5}(3 + 4 \sin.^2 L)]$ ..... (105);

tang. de l'angle CA'L de la verticale $= \frac{2\omega \sin. 2L}{5} (2 + \sin.^2 L)$ ..... (106);

rayon CA' du sphéroïde $= 1 + \omega \cos.^2 L [1 + \frac{1}{5} \sin.^2 L]$ ..... (107);

dist. A'O de l'observateur A' à son point de projection horizontale O sur la sphère inscrite à la terre $= \omega \cos. L (1 + \frac{1}{5} \sin.^2 L)$ ..... (108);

ordonnée y' de la développée du méridien $= \frac{12}{5} \omega \sin.^5 L$..... (109);

abscisse x' de la même développée $= \frac{4}{5} \omega [2 - (2 + 3 \sin.^2 L) \cos.^3 L]$..... (110);

longueur absolue du quart de la développée du méridien $= 3\omega$ ..... (111);

tangente trigonométrique de la latitude apparente $l = \frac{5 \text{tang.} L}{1 - \omega (8 + 4 \sin.^2 L)}$....(112);

Différence A'm du rayon A'C de la terre à celui mC de la sphère inscrite $= \omega \cos.^2 L (1 + \frac{1}{5} \sin.^2 L)$ .... (113);

Faisant dans la formule (H) (art. 9) $n=4$, intégrant et mettant à la place de R et R″—R, les valeurs respectives $\frac{5-3\omega}{5}$ et 3ω de ces quantités, on aura complètement

$$M = (1 + \tfrac{21}{40}\omega) L - \tfrac{4}{5}\omega \sin. 2L (1 - \tfrac{1}{4} \cos. 2L) \; ..... (114);$$

d'où

$$Q = (1 + \tfrac{21}{40}\omega) \frac{\pi}{2} \; ..... (115);$$

23. Faisant $n=4$ dans les formules (14 et 15), on aura

$$\omega = \frac{\frac{5}{3}(A'-B)}{(A'-B) + 5(B \sin.^4 L - A \sin.^4 L')} \; ..... (116);$$

$$\omega = \frac{\frac{5}{3}(A'-A)}{(A'-A) + 5 A \sin.^4 L} \; ..... (117);$$

Faisant constamment A'=51477,3, longueur du degré du méridien mesuré sous le cercle polaire par les astronomes suédois, et successivement B= à la longueur absolue de tous les autres degrés mesurés (tab. 1 art. 10), la formule (116) nous donnera la table suivante:

TABLE VI.

Valeurs du rayon *a* de l'équateur.	RAPPORTS DES AXES.	COMBINAISON DES DEGRÉS.	
1,0037	270 à 271	Le septième avec le	Premier.
1,03262	31 à 32		Second.
1,00332	301 à 302		Troisième.
1,00253	395 à 396		Quatrième.
1,00248	403 à 404		Cinquième.
1,0056	178 à 179		Sixième.

Faisant constamment A = au degré 51077,7, mesuré sous l'équateur, et successivement A' = à tous les autres degrés mesurés (tab. I, art. 10), la formule (117) nous donnera la table suivante :

TABLE VII.

Valeurs du rayon *a* de l'équateur.	RAPPORTS DES AXES.	COMBINAISON DES DEGRÉS.	
1,01814	56 à 57	Premier avec le	Second.
1,00495	202 à 203		Troisième.
1,00611	164 à 165		Quatrième.
1,005725	175 à 176		Cinquième.
1,00278	360 à 361		Sixième.
1,0037	270 à 271		Septième.

24. Substituant dans l'équation $r = a\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}, = (1+\omega)\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}$ (art. 13), la valeur actuelle de r (éq. 107), on a $5 + \omega\cos.^2 L\,(5 + \sin.^2 L) = 5(1+\omega)\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}$; carrant, en négligeant les secondes puissances de ω, il vient l'équation $25 + 10\omega\cos.^2 L(5 + \sin.^2 L) = 25(1+2\omega)\frac{\varpi}{\varpi'}$, ou $5 + 2\omega\cos.^2 L\,(5 + \sin.^2 L) = 5(1+2\omega)\frac{\varpi}{\varpi'}$. Divisant les deux membres par $1+2\omega$, et multipliant par ϖ', on a $5\varpi' - 2\omega[5 - \cos.^2 L(5 + \sin.^2 L)]\varpi' = 5\varpi$, d'où

$$\omega = \frac{5(\varpi' - \varpi)}{2(-\sin.^2 L + \sin^4 L + 5\sin.^2 L)\varpi'},$$

ou enfin,

$$\omega = \frac{5(\varpi' - \varpi)}{2\varpi'\sin.^2 L(4 + \sin.^2 L)} \; \ldots\ldots (118).$$

Nous pouvons mettre cette équation sous la forme

$$\omega = \frac{5}{8}\left(\frac{1 - \frac{\varpi}{\varpi'}}{\sin.^2 L(1 + \frac{1}{4}\sin.^2 L)}\right)$$

laquelle se réduira aisément au calcul logarithmique, en faisant

$$\left.\begin{array}{c} \sin. N = \frac{\varpi}{\varpi'} \\ \text{et tang. } P = \frac{1}{2}\sin. L, \\ \text{ce qui donne} \quad \omega = \frac{5\sin.^2(50^\circ - \frac{1}{2}N)\cos.^2 P}{4\sin.^2 L} \end{array}\right\} \ldots\ldots (119).$$

Faisant constamment $\varpi = 0{,}99669$, qui est la longueur du pendule sous l'équateur, et successivement $\varpi' =$ à toutes les autres longueurs observées du pendule (tab. IV, art. 13); enfin, faisant successivement $L =$ aux latitudes correspondantes à ϖ', on formera la table suivante :

TABLE VIII.

VALEURS de ω.	COMPARAISON DES LONGUEURS DU PENDULE.		RAPPORTS des axes.
0,00626	La première avec la	Seconde...........................	160 à 161
0,00363		Troisième.........................	275 à 276
0,00388		Quatrième.........................	258 à 259
0,00330		Cinquième.........................	303 à 304
0,00314		Sixième...........................	319 à 320
0,00320		Septième..........................	313 à 314
0,00303		Huitième..........................	330 à 331
0,00309		Neuvième..........................	324 à 325
0,00296		Dixième...........................	338 à 339
0,00303		Onzième...........................	330 à 331
0,00285		Douzième..........................	350 à 351
0,00291		Treizième.........................	343 à 344

25. Avant de passer outre, nous comparerons les résultats donnés par les deux hypothèses de $n=2$ et de $n=4$. Dans la première, les mesures géodésiques nous donnent pour ω, abstraction faite de l'ordre décimal des nombres, les trois quantités 285, 298 et 310 (tab. II, art. 10). La tab. V (art. 13) relative aux longueurs observées du pendule simple, donne pour les valeurs de ω les plus rapprochées entr'elles, et abstraction faite de l'ordre décimal, les nombres

281, 281, 287, 288, 290, 293, 297, 297 . . . . . (Q)
diff. . . . 0, 6, 1, 2, 3, 4, 0,

lesquels diffèrent fort peu entr'eux et de ceux donnés par les mesures géodésiques.

Mais, si nous prenons les résultats donnés par l'hypothèse de $n=4$, nous aurons pour les valeurs de ω (tab. VII), et abstraction faite de l'ordre décimal, les deux nombres 573 et 611, qui sont les plus rapprochés entr'eux, quoiqu'ils diffèrent de 38, c'est-à-dire d'une quantité à peu près trois fois plus grande que

celles 12 et 13, différences des trois quantités 285, 278, 310 prises dans la table II.

Prenant maintenant dans la table précédente (VIII) résultante des longueurs observées du pendule, et pour le cas de $n=4$, les valeurs de ω les plus rapprochées entr'elles, on a la suite

$$\begin{array}{lcccccccc} & 285, & 291, & 276, & 303, & 303, & 309, & 314, & 320 \ldots\ldots (R) \\ \text{dif.} \ldots & 6, & 5, & 7, & 0, & 6, & 5, & 6, & \end{array}$$

dans laquelle la différence des termes est généralement plus grande que celle des termes de la suite (Q). D'ailleurs les termes de la suite (R) diffèrent beaucoup des nombres 573 et 611 donnés par les mesures géodésiques et l'hypothèse de $n=4$. Donc, d'après toutes ces considérations, nous conclurons que l'hypothèse de $n=2$ ou de la figure sensiblement elliptique des méridiens terrestres, se rapproche beaucoup plus des lois de la nature que celle de $n=4$.

26. Pour déterminer les limites des plus grandes erreurs commises dans les mesures géodésiques des degrés du méridien, en supposant que $n=4$, nous opérerons comme à l'article 14, et nous aurons pour proportion analogue à celle (H) du même article

$$A'+A''\ldots\ldots+A^{m'}-mA : \sin.^4 L'+\sin.^4 L''\ldots\ldots+\sin.^4 L^{m'} :: A^{r'}-A : \sin^4 L^{r'} \ldots\ldots (H').$$

Mais le premier terme de cette proportion, que nous représenterons toujours par M, est $=1507{,}88$ (art. 14); le second est $=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cos.4L'-\frac{1}{2}\cos.2L'+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cos.4L''-\frac{1}{2}\cos.2L''\ldots\ldots+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cos.4L^{m'}-\frac{1}{2}\cos.2L^{m'}=\frac{3m}{8}+\frac{1}{8}(\cos.4L'+\cos.4L''\ldots\ldots+\cos.4L^{m'})-\frac{1}{2}(\cos.2L'+\cos.2L''\ldots\ldots+\cos.2L^{m'})$, et faisant, pour abréger, $Q=\cos.4L'+\cos.4L''\ldots\ldots+\cos.4L^{m'}$, et toujours $N=\cos.2L'+\cos.2L''\ldots\ldots+\cos.2L^{m'}$, la proportion (H') deviendra

$$M : \frac{3m+Q-4N}{8} :: A^{r'}-A : \sin.^4 L^{r'}.$$

Or, s'il y a erreur dans cette proportion, alors les premier, second et quatrième termes restant les mêmes, le troisième sera plus grand ou plus petit que $A^{r'}-A$ d'une quantité que nous représenterons par $E^{r'}$; donc on aura

$$M : \frac{3m+Q-4N}{8} :: A^{r'}-A+E^{r'} : \sin.^4 L^{r'},$$

d'où l'on tire

$$E^{r'}=\frac{8M\sin.^4 L^{r'}}{3M+Q-4N}-(A^{r'}-A) \ldots\ldots (120).$$

Faisant successivement $p=1, 2, 3 \ldots m$; et, ajoutant toutes les équations résultantes, on a $E'+E''+E''' \ldots + E^{m'} = \frac{8M}{3m+Q-4N} (\sin.^4 L' + \sin.^4 L'' \ldots + \sin.^4 L^{m'}) - [(A'-A)+(A''-A) \ldots + (A^{m'}-A)] = \frac{8M}{3m+Q-4N} \times \frac{3m+Q-4N}{8} - M = 0$;
d'où nous conclurons, comme à l'article 14 par rapport à $n=2$, que dans le cas de $n=4$, la somme des erreurs positives est égale à celle des erreurs négatives.

Relativement à la table 1 (art. 10) des longueurs mesurées des degrés du méridien, on a, comme à l'art. 14,

$$M=1507{,}88\,,\quad m=6\,,\quad N=-0{,}1494573.$$

De plus on a $Q=-4{,}654422$; donc, substituant ces valeurs numériques dans l'équation (120), il viendra, toutes réductions faites,

$$E^{r} = 864{,}426 \sin.^4 L^{r} - (A^{r} - A).$$

Faisant successivement $p=1, 2 \ldots 6$, on aura successivement

$E' = -177$	$E'' = 16$
$E''' = -16$	$E^{vi} = 210$
$E^{iv} = -4$	
$E^{v} = -29$	
Somme -226	Somme. 226

D'où l'on voit que la plus grande erreur négative -177 est donnée par le degré du méridien mesuré par La Caille au cap de Bonne-Espérance, et que la plus grande erreur positive 210 est donnée par le degré mesuré en Bothnie par les astronomes suédois.

27. Passant enfin aux erreurs commises dans les observations des longueurs du pendule d'après l'hypothèse de $n=4$, nous tirerons de l'éq. (118) celle

$$\varpi' - \varpi = \frac{2\alpha\varpi' \sin.^2 L'(4+\sin.^2 L')}{5};$$

ce qui nous donnera la suite de rapports géométriques égaux

$\varpi' - \varpi : \varpi' \sin.^2 L'(4+\sin.^2 L') :: \varpi'' - \varpi : \varpi'' \sin.^2 L''(4+\sin.^2 L'') \ldots :: \varpi^{m'} - \varpi : \varpi^{m'} \sin.^2 L^{m'}(4+\sin.^2 L^{m'})$; donc $\varpi' + \varpi'' \ldots + \varpi^{m'} - m\varpi : 4(\varpi' \sin.^2 L' + \varpi'' \sin.^2 L'' \ldots + \varpi^{m'} \sin.^2 L^{m'}) + \varpi' \sin.^4 L' + \varpi'' \sin.^4 L'' \ldots + \varpi^{m'} \sin.^4 L^{m'} :: \varpi^{r} - \varpi : \varpi^{r} \sin.^2 L^{r}(4+\sin.^2 L^{r})$, ou $\varpi' \ldots + \varpi^{m'} - m\varpi : 2(\varpi' \ldots + \varpi^{m'}) - 2(\varpi' \cos. 2L' \ldots + \varpi^{m'} \cos. 2L^{m'}) + \frac{3}{8}(\varpi' \ldots + \varpi^{m'}) + \frac{1}{8}(\varpi' \cos. 4L' \ldots +$

$\varpi^{m'} \cos. 4 L^{m'}) - \frac{1}{2}(\varpi' \cos. 2 L' \ldots + \varpi^{m'} \cos. 2 L^{m'}) :: \varpi^{p'} - \varpi : \varpi^{p'} \sin.^2 L^{p'}(4 + \sin.^2 L^{p'})$; et, réduisant, il vient la proportion $\varpi' \ldots + \varpi^{m'} - m\varpi : \frac{19}{8}(\varpi' \ldots + \varpi^{m'}) - \frac{5}{2}(\varpi' \cos. 2 L' \ldots + \varpi^{m'} \cos. 2 L^{m'}) + \frac{1}{8}(\varpi' \cos. 4 L' \ldots + \varpi^{m'} \cos. 4 L^{m'}) :: \varpi^{p'} - \varpi : \varpi^{p'} \sin.^2 L^{p'}(4 + \sin.^2 L^{p'})$;

Faisant, pour abréger,

$$M' = \varpi' \ldots + \varpi^{m'} - m\varpi = 0{,}03687,$$

d'où

$$\varpi' \ldots + \varpi^{m'} = 0{,}03687 + 12 \times 0{,}99669 = 11{,}99715.$$

De même, faisant

$$N' = \varpi' \cos. 2 L' \ldots \varpi^{m'} \cos. 2 L^{m'},$$

$$Q' = \varpi' \cos. 4 L' \ldots + \varpi^{m'} \cos. 4 L^{m'},$$

on aura la proportion

$$M' : \frac{227{,}84585 - 20 N' + Q'}{8} :: \varpi^{p'} - \varpi : \varpi^{p'} \sin.^2 L^{p'}(4 + \sin.^2 L^{p'}).$$

Or, s'il y a erreur dans cette proportion, alors, les premier, second et quatrième termes restant les mêmes, le troisième sera $\varpi^{p'} - \varpi + e^{p'}$, $e^{p'}$ étant l'erreur positive ou négative, on aura donc

$$e^{p'} = \frac{8 M' \varpi^{p'} \sin.^2 L^{p'}(4 + \sin.^2 L^{p'})}{227{,}84585 - 20 N' + Q'} - (\varpi^{p'} - \varpi) \ldots \ldots (121).$$

Faisant successivement $p = 1, 2, \ldots m$, on aura successivement les valeurs de $e', e'' \ldots e^{m'}$; et faisant l'addition de toutes ces valeurs, la somme s'évanouira comme dans les cas précédens.

Nous nous dispenserons de calculer les valeurs numériques de e, très-persuadés que nous sommes déjà, que nous trouverions les limites des erreurs positives et négatives beaucoup plus considérables que celles trouvées à l'article 15 pour le cas de $n = 2$.

28. Laissant exister le raisonnement de l'article 16 tel qu'il est jusqu'aux mots : *Enfin, représentons par* (L) *cette latitude moyenne* $51°,3327$, inclusivement, nous continuerons ainsi qu'il suit :

Cela posé, la proportion (H') de cet article, dans laquelle nous ferons $m = 10{,}7487$, nous donne celle

$$M' - mA : \sin.^4 L' + \sin.^4 (L' + 1°) \ldots + \sin.^4 (L' + 9°) + \sin.^4 (L' + 9°{,}7487) :: (A) - A : \sin.^4 (L) \ldots \ldots (K').$$

Mais généralement $\sin.^4 L' + \sin.^4 (L'+1^\circ) \ldots\ldots + \sin.^4 (L'+p^\circ) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos. 4L' - \frac{1}{2}\cos. 2L' + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos. 4(L'+1^\circ) - \frac{1}{2}\cos. 2(L'+1^\circ) \ldots\ldots + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos. 4(L'+p^\circ) - \frac{1}{2}\cos. 2(L'+p^\circ) = \frac{3p}{8} + \frac{1}{8}[\cos. 4L' + \cos. 4(L'+1^\circ) \ldots\ldots + \cos. 4(L'+p^\circ)] - \frac{1}{2}[\cos. 2L' + \cos. 2(L'+1^\circ) \ldots\ldots + \cos. 2(L'+p^\circ)] = \frac{3p}{8} + \frac{1}{8}\cos. 4L' + \frac{1}{8}\cos. 4L'[\cos. 4^\circ + \cos. 8^\circ \ldots + \cos. 4p^\circ] - \frac{1}{8}\sin. 4L'[\sin. 4^\circ + \sin. 8^\circ \ldots + \sin. 4p^\circ] - \frac{1}{2}\cos. 2L' - \frac{1}{2}\cos. 2L'[\cos. 2^\circ + \cos. 4^\circ \ldots\ldots + \cos. 2p^\circ] + \frac{1}{2}\sin. 2L'[\sin. 2^\circ + \sin. 4^\circ \ldots\ldots + \sin. 2p^\circ]$; et, mettant à la place de ces quatre séries leurs termes sommatoires respectifs, on aura $\sin.^4 L' \ldots\ldots + \sin.^4 (L'+p^\circ) = \frac{3p}{8} + \frac{1}{8}\cos. 4L' + \frac{1}{8}\cos. 4L' \times \frac{\cos. 2(p+1)^\circ \sin. 2p^\circ}{\sin. 2^\circ} - \frac{1}{8}\sin. 4L' \times \frac{\sin. 2(p+1)^\circ \sin. 2p^\circ}{\sin. 2^\circ} - \frac{1}{2}\cos. 2L' - \frac{1}{2}\cos. 2L' \times \frac{\cos. (p+1)^\circ \sin. p^\circ}{\sin. 1^\circ} + \frac{1}{2}\sin. 2L' \times \frac{\sin. (p+1)^\circ \sin. p^\circ}{\sin. 1^\circ} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}\left(3p + \cos 4L' + \frac{\sin. 2p^\circ}{\sin. 1^\circ}\cos. 2[2L' + (p+1)^\circ]\right) - \left(\cos. 2L' + \frac{\sin. p^\circ}{\sin. 1^\circ}\cos. [2L' + (p+1)^\circ]\right)\right\}$.

Ajoutant aux deux membres de cette équation la quantité $\sin.^4(L'+9{,}7487)$, faisant $p=9$, et pour abréger,

$$H' = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}\left(27 + \cos. 4L' + \frac{\sin. 18^\circ}{\sin. 2^\circ}\cos. 4(L'+5^\circ)\right) - \left(\cos. 2L' + \frac{\sin. 9^\circ}{\sin. 1^\circ}\cos. 2[L'+5]^\circ\right)\right\} + \sin.^4(L'+9{,}7487);$$

on aura la proportion (K′) qui se réduira à celle

$$M' - mA : H' :: (A) - A : \sin.^4(L),$$

d'où l'on tire

$$(A) - A = \frac{(M' - mA)\sin.^4(L)}{H'}.$$

Mais, mettant respectivement les symboles (A) et (L) à la place de ceux A′ et L dans la formule (117), on en tirera l'équation

$$(A) - A = \frac{15A\varepsilon\sin.^4(L)}{5 - 3\varepsilon}.$$

Égalant ces deux valeurs de $(A) - A$, et prenant la valeur de ε, on a, toutes réductions faites,

$$\varepsilon = \frac{5(M' - mA)}{15AH + 3(M' - mA)} \quad \ldots\ldots \quad (122).$$

Substituant la valeur numérique de $L' = 46^\circ{,}4583$ dans la valeur de H', on a $H' = 3{,}21235$; et substituant cette valeur, ainsi que celles de $M' = 551584{,}72$,

$m = 10,7487$ et $A = 51077,7$ dans l'équation (122), on aura $\omega = 0,00312$, et le rapport des deux axes $= \frac{321}{322}$ (*), rapport très-dissemblable de ceux donnés par les formules (116 et 117) (tab. VI et VII), mais très-rapprochés de ceux $\frac{319}{320}$ et $\frac{324}{325}$ de la table VIII, donnés par la formule (118).

29. Les équations (80 et 81) article 17, qui se réduisent à celles $\sin. L = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, et $\sin. L = \sqrt[4]{\frac{8}{15}}$ lorsque $n = 4$, nous apprennent 1.° que dans l'hypothèse actuelle de $n = 4$, la latitude sous laquelle le degré du méridien est égal à celui du globe inscrit, est $= 46° 63' 32''$. 2.° Que, dans la même hypothèse, la latitude sous laquelle le degré du méridien est égal au degré de l'équateur, est de 63°,2374.

30. Égalant les valeurs de x et de R' (éq. 95 et 98), on a, toutes réductions faites, l'équation du cinquième degré

$$\cos.^5 L - 5 \cos.^4 L - \tfrac{10}{3} \cos.^3 L + 10 \cos.^2 L + \frac{5 + 12\omega}{3\omega} \cos. L - \frac{5 + 12\omega}{3\omega} = 0.$$

Faisant $\omega = 0,00303$, qui se trouve deux fois dans la table VIII, et ne diffère guère de la valeur de $\omega = 0,00312$ trouvée précédemment, on aura l'équation $\cos.^5 L - 5 \cos.^4 L - \frac{10}{3} \cos.^3 L + 10 \cos.^2 L + 554,055 \cos. L - 554,055 = 0$, dont la seule racine réelle est, à moins d'un dix millième près, 0,9951 qui est sensiblement le cosinus de 6°,31 ; ce qui est la latitude à laquelle le degré du méridien est égal au degré du parallèle qu'il coupe lorsque $n = 4$.

31. Faisant $x = 1$, l'équation (95) devient

$$\cos.^5 L - \tfrac{10}{3} \cos.^3 L + \frac{12\omega + 5}{3\omega} \cos. L - \frac{5}{3\omega} = 0.$$

Mettant à la place de ω sa valeur 0,00303, on a l'équation

$$\cos.^5 L - 3,3333 \cos.^3 L + 554,055 \cos. L - 550,055 = 0,$$

qui, résolue, donne avec approximation $L = 4°,93$, ce qui est à peu près la

(*) Aujourd'hui 8 fructidor an 13, étant à la séance de la classe des mathématiques de l'institut, j'ai entendu M. Delambre rendre compte d'un ouvrage de M. Svamberg, l'un des quatre astronomes suédois qui ont mesuré le degré du méridien en Bothnie, ayant pour objet la mesure de ce même degré : il y est dit que d'après ses opérations, qui paroissent avoir été faites avec beaucoup de soins, il a trouvé que le rapport des deux axes est $= \frac{321}{322}$. Au reste, M. Delambre a annoncé qu'il alloit s'occuper de chercher la cause des différences qu'il y a entre les résultats des suédois et ceux des astronomes françois en 1736.

latitude sous laquelle le degré du parallèle est égal au degré de la sphère inscrite lorsque $n=4$.

32. Faisant $n=4$, l'équation (82) devient $\sin. L=\frac{1}{\sqrt{2}}$; d'où $L=63°,5943$, ce qui est la latitude sous laquelle la longueur absolue du degré du méridien est moyenne proportionnelle entre les longueurs de tous les autres degrés. (Art. 18).

33. Conservant les mêmes dénominations qu'à l'article 19, et faisant attention que nous avons trouvé que le degré du méridien est égal à celui de la sphère inscrite lorsque $\sin. L=\frac{1}{\sqrt{5}}$ (art. 29, 1.er cas), nous aurons, d'après le principe sur lequel pose la théorie actuelle, la proportion $\sin.^4 L : \frac{1}{5} :: A'-A : r-A$; d'où

$$r=\frac{A'-A+5A\sin.^4 L}{5\sin.^4 L} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (123).$$

Telle est l'expression de la longueur absolue d'un degré du globe inscrit. Donc, pour savoir combien de parties d'un grand cercle de la sphère inscrite contient A', c'est-à-dire, pour connoître la valeur de K, on fera les proportions

$$\frac{A'-A+5A\sin.^4 L}{5\sin.^4 L} : A' :: 1° : K \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\delta');$$

d'où

$$K=\left(\frac{5A'\sin.^4 L}{A'-A+5A\sin.^4 L}\right)^{\text{degrés}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (124).$$

Cette formule donne le degré du méridien mesuré en Bothnie par les astronomes suédois $=1°,0056$; or, de la proportion (δ') on tire le premier terme $r=\frac{A'}{K}$; d'où il sera aisé de conclure que la longueur absolue d'un degré du globe inscrit est $=51191,3$ toises.

Si l'on ne veut pas exclure du calcul la quantité ω, alors il est évident qu'à cause de la proportion $R' : A' :: 1 : r$, on aura, en substituant la valeur de R' (éq. 98),

$$r=\frac{A'}{1-\frac{2}{5}\omega(1-5\sin.^4 L)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (125);$$

d'où

$$K=\left(\frac{A'}{r}\right)=1-\frac{2}{5}\omega(1-5\sin.^4 L) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (126)\;(*).$$

Prenant les mêmes données que précédemment, et faisant $\omega=0,00303$, les formules (125 et 126) donnent

La longueur absolue r d'un degré de la sphère inscrite $=51242,7$ toises.

(*) Même observation que pour l'équation (87).

Le nombre de parties K de circ. de cercle de l'arc $A' = 1°,0046$.

Faisant successivement $L = 0$, et $L = 100°$, on a, respectivement à ces valeurs de L, le degré du méridien sous l'équateur $= 0,995495$, et le degré du méridien sous les pôles $= 1,00727$. Multipliant ces quantités par la longueur absolue 51242,7 toises du degré de la sphère inscrite, on a pour la longueur absolue du degré du méridien sous l'équateur 51011,8 toises, quantité qui diffère de près de 66 toises du degré mesuré sous l'équateur par Bouguer et La Condamine. Enfin, on a pour la longueur absolue du degré du méridien sous les pôles la quantité 51615,3 toises.

54. Si nous nous proposons de trouver l'arc de projection sur la sphère inscrite d'un arc M du méridien dont on connoît les latitudes L′ et L″ des deux extrémités, par une formule directe en fonctions de L′ et de L″, nous observerons que l'équation (97) peut être écrite de la manière suivante :

$$\text{tang.}\,\lambda = \text{tang.}\,L\left(1 - \tfrac{6}{5}\omega\right) + \frac{3\omega}{5}\cos.\,L\sin.\,L,$$

Donc, mettant dans cette équation λ' et L', ensuite λ'' et L'' à la place de λ et de L; on aura deux équations dont la différence sera $\text{tang.}\,\lambda'' - \text{tang.}\,\lambda' = (1 - \tfrac{6}{5}\omega)(\text{tang.}\,L'' - \text{tang.}\,L') + \frac{3\omega}{5}(\sin.\,L''\cos.\,L'' - \sin\,L'\cos.\,L')$; ou $\frac{\sin.\,(\lambda''-\lambda')}{\cos.\,\lambda''\cos.\,\lambda'} = \frac{(1-\frac{6}{5}\omega)\sin.\,(L''-L')}{\cos\,L''\cos.\,L'} + \frac{3\omega}{10}(\sin.\,2L'' - \sin.\,2L') = \frac{(1-\frac{6}{5}\omega)\sin.\,(L''-L')}{\cos.\,L''\cos.\,L'} + \frac{3\omega}{5}\cos.\,(L'' + L')\sin.\,(L''-L')$, ou $\sin.\,\mu = \frac{\sin.\,(L''-L')\cos.\,\lambda''\cos.\,\lambda'}{\cos.\,L''\cos.\,L'}\left\{1 - \tfrac{6}{5}\omega + \frac{3\omega}{5}\left(\cos.^2 L'' \times \cos.^2 L' - \frac{\sin.\,2L''\sin.\,2L'}{4}\right)\right\}$. Mais $\cos.\,\lambda'\left(= \frac{\sin.\,\lambda'}{\text{tang.}\,\lambda'}\right) = \cos.\,L' \times \left(\frac{1-\frac{3}{5}\omega(1-\sin.^4 L')}{1-\frac{3}{5}\omega(1+\sin.^2 L')}\right)$ (éq. 96 et 97) $= \cos.\,L'[1 + \tfrac{3}{5}\omega(\sin.^2 L' + \sin.^4 L')]$. On aura de même $\cos.\,\lambda'' = \cos.\,L''[1 + \tfrac{3}{5}\omega(\sin.^2 L'' + \sin.^4 L'')]$; d'où $\cos.\,\lambda'\cos.\,\lambda'' = \cos.\,L'\cos.\,L''[1 + \tfrac{3}{5}\omega(\sin.^2 L' + \sin.^2 L'' + \sin.^4 L' + \sin.^4 L'')]$, et substituant cette valeur dans celle de $\sin.\,\mu$, on a l'équation $\sin.\,\mu = \sin.\,(L''-L')\left\{1 + \tfrac{3}{5}\omega(\sin.^2 L' + \sin.^2 L'' + \sin.^4 L' + \sin.^4 L'')\left(1 - \tfrac{3}{5}\omega\left(2 - \cos.^2 L'\cos.^2 L'' + \frac{\sin.\,2L'\sin.\,2L''}{4}\right)\right)\right\}$; et enfin

$$\sin.\,\mu = \sin.\,(L''-L')\left[1 - \tfrac{3}{5}\omega\left(2 - \cos.^2 L'\cos.^2 L'' + \frac{\sin.\,2L'\sin.\,2L''}{4} - \sin.^2 L' - \sin.^2 L'' - \sin.^4 L' - \sin.^4 L''\right)\right] \quad \ldots\ldots (127).$$

Nous ne nous arrêterons pas à la recherche des valeurs numériques de μ correspondantes à quelques valeurs principales que l'on pourroit donner à L″ et L′, comme nous l'avons fait lorsque nous considérions notre sphéroïde sous une

forme sensiblement égale à celle d'un ellipsoïde; car ces objets, qui ne sont pas d'un très-grand intérêt, exigeroient trop de temps. D'ailleurs, les résultats de ces recherches sont si aisés à obtenir, que nous laissons au lecteur le soin de les trouver s'il le désire.

35. L'équation (114) nous donne pour les latitudes L′ et L″ les deux équations

$$M'=(1+\tfrac{21}{40}\varpi)L'-\tfrac{3}{4}\varpi\sin.2L'(1-\tfrac{1}{4}\cos.2L'),$$
$$M''=(1+\tfrac{21}{40}\varpi)L''-\tfrac{3}{4}\varpi\sin.2L''(1-\tfrac{1}{4}\cos.2L''):$$

donc

$$M''-M' \text{ ou } m=(1+\tfrac{21}{40}\varpi)(L''-L')-\tfrac{3}{2}\varpi[\sin.(L''-L')\cos.(L''+L')-\tfrac{1}{8}\sin.2(L''-L')\cos.2(L''+L')]\ .\ .\ .\ .\ .\ (128).$$

Il faut multiplier le second terme de la valeur de la méridienne m comprise entre les latitudes vraies L′ et L″ par 63°,661977, afin d'avoir m en parties de la circonférence du cercle.

Faisant $L''=\frac{\pi}{2}$ et $L'=0$, on aura le quart du méridien que nous avons représenté par $Q=(1+\frac{21}{40}\varpi)\frac{\pi}{2}$, comme nous l'avons déjà trouvé (éq. 115). Substituant à la place de ϖ sa valeur numérique 0,00303, et effectuant les opérations arithmétiques, on a

$$Q=100°,1591.$$

Multipliant cette longueur du quart du méridien par la longueur absolue 51242,7 toises du degré de la sphère inscrite, on a Q = 5132422,7 toises, dont la dix millionième partie, c'est-à-dire la longueur du mètre, est 0,51324227 de toise; et réduisant en pieds, pouces et lignes, on a

la longueur absolue du mètre $= 3^{pi}\ 0^{po}\ 11^{lig},331$.

NOTE DEUXIÈME.

Sur la Réduction du temps en parties de l'Équateur, et réciproquement, dans le Système décimal.

DANS la division décimale du temps, le jour est de 10 heures, l'heure de 100 minutes, la minute de 100 secondes, et ainsi de suite en continuant cette sous-division centésimale. De même le cercle est divisé en 400°, le degré en 100′, la

minute en 100″ etc. : donc, 1 heure de différence en temps équivaut à 40° de différence en longitude; de même une minute en temps équivaut à 40 minutes de degré, une seconde en temps à 40 secondes de degré, et ainsi de suite; d'où on déduit aisément les règles suivantes pour réduire le temps en parties de l'équateur et réciproquement.

1.° Réduction du temps en parties de l'équateur. *Mettez le temps sous la forme décimale des heures, multipliez par 4 et séparez sur la droite du produit un chiffre décimal de moins qu'il y en avoit dans le multiplicande : le résultat sera la réduction demandée.*

Exemple. Réduire 3 heures 91 minutes et 57 secondes en parties de l'équateur.

Multipliant 3,9157 par 4, et ne séparant sur la droite que trois chiffres décimaux, on a au produit 156,628 ou 156° 62′ 80″, qui est l'arc demandé de l'équateur.

2.° Réduction des parties de l'équateur en temps. *Mettez la valeur de l'arc proposé sous la forme décimale; portez la virgule à une place plus sur la gauche, et prenez le quart du résultat, ce qui vous donnera une quantité décimale, dont la partie entière sera des degrés de l'équateur.*

Exemple. Réduire en temps 156° 62′ 80″.

Je mets cette quantité sous la forme décimale, ce qui donne 156,628, et portant la virgule à une place plus sur la gauche, j'ai 15,6628. Enfin, prenant le quart de cette dernière quantité, j'ai 3,9157, ou 3ʰ 91′ 57″, ce qui est le temps demandé.

NOTE TROISIÈME.

Construction des cartes géographiques, en considérant la terre comme ayant sensiblement la figure d'un ellipsoïde de révolution.

Les mappemondes sont ordinairement construites par projection stéréographique polaire ou équatoriale; nous allons d'abord nous occuper des mappemondes polaires, ensuite nous nous occuperons des équatoriales; mais dans l'une et l'autre nous aurons égard à l'aplatissement du sphéroïde terrestre, que nous représenterons par ε comme dans la première note; d'ailleurs, nous conserve-

rons les mêmes dénominations que dans la note en question, à laquelle nous renverrons lorsqu'il sera nécessaire de le faire.

1.° Soit représenté le sphéroïde terrestre par l'ellipsoïde PH'P'AE'H'EAP, dont l'axe de rotation est $PP'(=2)$, et l'équateur est le grand cercle H'EAE', ayant pour diamètre $AH'(=2+2\omega)$. Supposons que l'œil de l'observateur est au pôle P', et qu'il voit à travers le plan de l'équateur pris pour le plan de projection, tout l'hémisphère supérieur PH'EAE'. Cela posé, il est évident, 1.° que la projection de tout demi-méridien, tel que celui H'PA sur l'équateur, sera le diamètre AH' de l'équateur, qui est l'intersection de ce dernier cercle avec le méridien projeté; car tous les rayons visuels, tels que P'D, P'P, P'A' etc., qui partent des différens points D, P, A', etc., du méridien, et vont aboutir à l'œil en P', étant dans le plan du méridien, ne peuvent couper l'équateur que dans l'intersection de ce dernier cercle et du méridien, puisque tous les rayons visuels sont dans le plan du méridien projeté. Donc, la projection d'un seul arc PD d'un méridien, sera la partie CF du diamètre correspondant de l'équateur, compris entre le centre C et le point F où le rayon visuel P'D qui aboutit à l'extrémité de cet arc, rencontre l'équateur. Par la même raison, FH' est la projection de l'arc DH' du méridien.

Fig. 2.

2.° Que tout parallèle à l'équateur tel que DKA'K', se projettera sur l'équateur sous la figure d'un cercle FIBI' ayant pour rayon la projection CF de l'arc PD du méridien; car, tous les rayons visuels P'D, P'K, P'A', PK' etc., qui aboutissent à tous les points D, K, A', K' etc., de la circonférence du parallèle DKA'K' forment la surface convexe d'un cône droit renversé P'DKAK'. Mais ce cône est coupé parallèlement à sa base par le plan de l'équateur; donc la section FIBI', ou la projection du parallèle DKA'K', est un cercle ayant pour rayon la projection CF de l'arc PD du méridien.

Il ne s'agit donc que de déterminer pour chaque la latitude vraie L', la longueur que l'on doit donner à CF. Or, à cause des triangles semblables P'CF, P'ND, on a la proportion $P'N : ND :: P'C : CF$. D'où $CF=\frac{P'C\times ND}{P'N}$; et substituant dans cette équation les valeurs de $P'C=1$, $ND=x=\cos. L(\omega \sin.^2 L+a)$ (note 1 éq. 30), et $P'N=P'C+CN=1+y=1+\sin. L(1-\omega \cos.^2 L)$ (note 1, éq. 29), on aura

$$CF=\frac{\cos. L+\omega\cos. L(1+\sin.^2 L)}{1+\sin. L-\omega\sin. L\cos.^2 L}.$$

Effectuant la division, en négligeant les secondes puissances de ω comme nous

l'avons fait à la note I, et représentant généralement par φ le rayon CF de la projection du parallèle projeté, on aura Fig. 2.

$$\varphi = \frac{\cos. L}{1 + \sin. L} + \frac{(\sin. L \cos.^3 L + \cos. L + \cos. L \sin.^2 L + \sin. L \cos. L + \cos. L \sin.^3 L)\,\omega}{(1 + \sin. L)^2} =$$

$$\frac{\cos. L}{1 + \sin. L} + \frac{\cos. L (2 \sin. L + 1 + \sin.^2 L)\,\omega}{(1 + \sin. L)^2};$$

et enfin

$$\varphi = \frac{\cos. L}{2 \cos.^2 (50^\circ - \frac{1}{2} L)} + \omega \cos. L \ldots\ldots (1).$$

Pour soumettre cette formule au calcul logarithmique, faisons

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang.}\, M = \cos. (50^\circ - \frac{1}{2} L) \sqrt{2\omega} \\ \varphi = \frac{\cos. L}{\sin.^2 M} \end{array}\right\} \ldots\ldots (2).$$

d'où

Remarque. Afin de rendre un peu sensible la différence d'une mappemonde polaire, en ayant égard à l'aplatissement des pôles, à ce qu'elle seroit si l'on considéroit la terre comme étant sphérique, il faut qu'il y ait au moins cinq millimètres de différence entre le rayon de l'équateur et le demi-petit axe. Or, si nous prenons la valeur la plus probable de ω qui est 0,00297 (note I, article 19, remarque II), nous trouverons que la longueur qu'il faudroit donner au demi-petit axe de la mappemonde tracée, est le quatrième terme de la proportion $1 : 0{,}00297 :: 0{,}005 : \frac{500}{297} =$ 1 mètre et 7 décimètres, ce qui est une trop grande longueur pour pouvoir être ordinairement employée; donc on peut, dans le tracé d'une mappemonde ordinaire, qui ne doit guère avoir que trois décimètres de diamètre, négliger l'aplatissement du sphéroïde qui ne seroit que d'environ $0^m{,}00045$.

Nous allons maintenant nous occuper de la construction des mappemondes du sphéroïde terrestre, en nous servant de la projection stéréographique équatoriale. Cette construction est un peu plus difficile que la précédente, et exige que nous démontrions quelques propositions préliminaires.

2. Soit AFEKANEOA le sphéroïde terrestre que nous considérerons toujours comme ne différant pas sensiblement d'un ellipsoïde de révolution; AKEF un cercle qui représente l'équateur; ANEO une ellipse qui représente le méridien perpendiculaire au diamètre FK de l'équateur qui passe par le point F où est l'œil de l'observateur. Cela posé, je dis que la projection stéréogra- Fig. 3.

Fig. 3. phique BVDT d'une ellipse quelconque HQIP sur le plan ANEO, pris pour plan de projection, est une ellipse. En effet, l'ellipse HPIQ peut être considérée comme une section d'un cône ordinaire FLSMR, qui n'est ni parallèle ni anti-parallèle à la base circulaire LSMR; car, comme on le sait, si elle étoit parallèle ou anti-parallèle à la base, elle seroit un cercle, ce qui est contre l'hypothèse. Mais à cause que l'angle DBF ou EBF a pour mesure $\frac{1}{2}$(EF+AH)=$\frac{1}{2}$(AF+AH)=$\frac{1}{2}$FAH, de même que l'angle HIF; et que l'angle BDF ou ADF a pour mesure $\frac{1}{2}$(AF+EI)=$\frac{1}{2}$(FE+EI)=$\frac{1}{2}$FEI, de même que l'angle FHI; il s'ensuit que l'angle DBF est égal à celui HIF, et que l'angle BDF est égal à celui IHF. Donc la section BTDV est anti-parallèle à la section elliptique HQIP, et par conséquent elle ne peut être ni parallèle ni anti-parallèle à la base circulaire LRMS, puisque si elle étoit parallèle à la base, son anti-parallèle HPIQ le seroit aussi à la base, ce qui n'est pas; et que si elle étoit anti-parallèle à la base RMLS, son anti-parallèle HPIQ seroit parallèle à la base, ce qui est encore faux. Donc, la section BTDV, n'étant ni parallèle ni anti-parallèle à la base circulaire LRMS du cône, est une ellipse; c'est ce qu'il falloit démontrer.

Fig. 4 3. Cela posé, cherchons 1.° à tracer sur le méridien de projection ATEV, que nous supposons le premier méridien, la projection d'un méridien quelconque HTIV formant avec le premier un angle dièdre IVTE, dont la mesure est l'arc IE de l'équateur, c'est-à-dire, ayant pour longitude l'arc IE. Or, si par le point F et par les extrémités I et H du grand axe HI du méridien projeté, on tire les droites FI, FHB, il est clair que les points D et B, où ces lignes rencontrent le diamètre AE et son prolongement, seront sur le plan ATEV prolongé indéfiniment, les projections stéréographiques des extrémités I et H de l'axe principal de l'ellipse projetée; donc la droite BD est la projection de cet axe, et est par conséquent elle-même le grand axe de la projection elliptique TDVB du méridien IVHT.

Déterminons maintenant les grandeurs de l'axe principal BD et du second axe de la projection du méridien IVHT, afin de pouvoir tracer sur le premier méridien ATEV la projection VDT du demi-méridien VIT qui, évidemment, est la seule que l'on puisse projeter sur le premier méridien; car le second axe VT du premier méridien VATE, n'est qu'une double ordonnée de la projection correspondante à une abscisse DC plus petite que le demi-grand axe DB de la même projection.

Dans le triangle rectangle DCF l'angle CFD a pour mesure $\frac{1}{2}$KI: donc, à

cause que le rayon CE de l'équateur est $= 1 + \omega$, on aura $CD = (1 + \omega) \tang. \frac{1}{2} KI$; Fig. 4.
mais $KI = 100° - EI = 100° - \lambda$, en représentant par λ la longitude EI du méridien IVHT que l'on veut projeter : donc $CD = (1 + \omega) \tang. (50° - \frac{1}{2}\lambda)$. De même dans le triangle rectangle BCF, on a l'angle BFC qui a pour mesure $\frac{1}{2} KAH = \frac{1}{2} KA + \frac{1}{2} AH = 50° + \frac{1}{2}\lambda$, donc $BC = (1 + \omega) \tang. (50° + \frac{1}{2}\lambda)$; et représentant par A le demi-grand axe de la projection cherchée, on aura BD ou $2A = CD + BC = (1 + \omega) [\tang. (50° - \frac{1}{2}\lambda) + \tang. (50° + \frac{1}{2}\lambda)] = \frac{1 + \omega}{\cos. (50° - \frac{1}{2}\lambda) \cos. (50° + \frac{1}{2}\lambda)}$
$= \frac{1 + \omega}{\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos. \frac{1}{2}\lambda + \sin. \frac{1}{2}\lambda) \times \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos. \frac{1}{2}\lambda - \sin. \frac{1}{2}\lambda)} = \frac{2(1 + \omega)}{\cos. \lambda} = 2(1 + \omega) \text{séc.} \lambda$; donc

$$A = (1 + \omega) \text{séc.} \lambda \ldots\ldots (3).$$

Telle est la valeur cherchée du demi-grand axe de la projection elliptique, d'où il sera aisé de trouver le demi-second axe que je représente par B; car, par la propriété de l'ellipse, on a, dans celle BTDV, l'équation $\overline{TC}^2 = \frac{B^2}{A^2} \times DC \times BC$. Mais TC, demi-axe de la terre, $= 1$, donc substituant cette valeur ainsi que celles de A, DC et BC, on aura $1 = \frac{B^2}{(1 + \omega)^2 \text{séc.}^2 \lambda} \times (1 + \omega)^2 \times \tang. (50° - \frac{1}{2}\lambda) \times \tang. (50° + \frac{1}{2}\lambda) = \frac{B^2}{\text{séc.}^2 \lambda}$, donc

$$B = \text{séc.} \lambda \ldots\ldots (4).$$

4. Avant de passer à la projection stéréographique des parallèles, nous observerons que, d'après la démonstration de l'art. 2, il est clair que si la courbe projetée IPHQ est un cercle, sa projection BTDV sur le plan ANEO est aussi un cercle; car, alors on a un cône ordinaire à base circulaire FHQIP, qui est coupé anti-parallèlement par le plan ANEO; donc la section BVDT est un cercle. Fig. 5.

Cela posé, faisant faire à la fig. 4 un quart de révolution autour du diamètre KF, qui aboutit à l'œil de l'observateur; alors l'équateur KAFE, que nous voyons en face dans la fig. 4, ne nous présentera plus que le profil, comme on le voit dans la fig. 5; et l'axe VT de rotation, que nous ne voyons qu'en raccourci dans la fig. 4, se montre dans toute sa longueur dans la fig. 5. Enfin, le méridien KVFT, que nous voyons en face dans cette dernière figure, est celui qui est perpendiculaire sur le plan du méridien de projection VATE. Fig. 4 et 5.

Ceci bien conçu, proposons-nous de projeter sur le premier méridien VATE un parallèle quelconque I'RH'S. Il est aisé de voir qu'en menant par le point F Fig. 5.

aux deux extrémités I′ et H′ du diamètre H′ I′ du parallèle I′R H′S, les droites F I′, F H′; et prolongeant cette dernière jusqu'à sa rencontre en B′ du petit axe
Fig. 5. TV, suffisamment prolongé, on aura, sur le plan de projection indéfiniment prolongé, les points D′ et B′ qui seront les projections de ceux I′ H′; et par conséquent la droite D′B′ sera le diamètre du cercle D′R B′S, qui est la projection stéréographique du parallèle I′R H′S. Mais il est à propos d'observer qu'il n'y aura que la moitié R I′S du parallèle qui sera projetée sur le méridien, et que la projection de l'autre moitié R H′S ne pourroit se trouver que sur le prolongement indéfini du plan du méridien de projection; car la droite R S, qui est l'intersection des plans du premier méridien V R E T A S et du parallèle I′R H′S, est en même temps le diamètre de ce dernier.

Il ne s'agit donc plus que de déterminer la longueur du diamètre B′D′ du cercle B′R D′S. Or, j'observe que, menant des points I′ et H′, les perpendiculaires I′Q, H′P sur le diamètre K F de l'équateur, j'aurai d'abord les deux triangles semblables FCD′, FQI′, qui me donneront la proportion FQ : QI′ :: FC : CD′, ou FC + CQ : QI′ :: FC : CD′; mais $FC = 1 + \epsilon$, $CQ = x$, $QI' = y$ (note I), donc

$$CD' = \frac{(1+\epsilon)y}{1+\epsilon+x}.$$

J'ai ensuite les deux triangles semblables FPH′, FCB′ qui me donnent la proportion FP : PH′ :: FC : CB′, ou FC − CQ : QI′ :: FC : CB′, donc

$$CB' = \frac{(1+\epsilon)y}{1+\epsilon-x}.$$

Mais le diamètre B′D′ de la projection du parallèle, que je représente par 2 Q, est $= CB' - CD'$: donc $2Q = (1+\epsilon)y\left(\frac{1}{1+\epsilon-x} - \frac{1}{1+\epsilon+x}\right) = \frac{2(1+\epsilon)xy}{(1+\epsilon)^2 - x^2}$; divisant les deux membres de cette équation par 2, mettant à la place de x et de y leurs valeurs (éq. 30 et 29, note I, art. 6), et effectuant la division en négligeant les secondes puissances de ϵ, on aura

$$Q = \cot. L\left[1 + \epsilon\left(5 + \frac{2}{\sin.^2 L} + \cos. L - \sin.^2 L\right)\right] \ldots\ldots (5).$$

Telle est la valeur demandée du rayon de la projection d'un parallèle dont la latitude vraie est L, sur le plan du premier méridien. Ainsi, par le moyen des trois équations (3, 4 et 5), on pourra tracer la mappemonde du sphéroïde terrestre.

Mais, ainsi que nous l'avons dit pour les mappemondes polaires, la différence entre les rayons de l'équateur et le demi-axe de rotation étant presque insensible dans une mappemonde ordinaire, dont les diamètres des hémisphères sont d'environ trois décimètres, on pourra considérer la terre comme étant sphérique, ce qui réduira les équations (3, 4 et 5) à celles

A = B = séc. *longitude du méridien qu'on veut projeter*
Q = cot. *latitude du parallèle qu'on veut projeter* .... } ..... (6).

Nous nous dispensons de tracer ces mappemondes, parce qu'on en trouve dans tous les livres de géographie.

Les cartes géographiques qui représentent de grandes parties de la surface du globe, doivent se construire exactement suivant les mêmes principes.

NOTE QUATRIÈME.

Formules générales servant à construire la carte réduite d'une partie quelconque de la surface du sphéroïde terrestre, quelle que soit la figure de ce sphéroïde. Application de ces formules au cas particulier où l'on suppose que la terre est sensiblement un ellipsoïde de révolution (*).

1 NOUS avons dit que dans les cartes marines les méridiens sont représentés par des lignes droites parallèles entr'elles, et que l'équateur, ainsi que ses parallèles, sont représentés par d'autres droites perpendiculaires aux premières; d'où il résulte évidemment que les degrés de longitudes, quelle que soit la latitude du parallèle sur lequel on les compte, sont toujours égaux au degré de l'équateur; défectuosité frappante qui, lorsqu'on n'y obvie pas, donne aux navigateurs ces cartes absurdes que nous avons appelées cartes plates dans le texte, et qui sont très-dangereuses lorsqu'on s'en sert sous des latitudes plus grandes

(*) Cette note est en grande partie tirée d'un mémoire que j'ai composé, il y a six ou sept ans, et qui, soumis en 1802 à l'examen du bureau des longitudes, a eu l'approbation de cette illustre assemblée.

que celles de 7° (*) dans la navigation hauturière. Mais, si dans les cartes marines on fait croître les degrés, ou, plus généralement parlant, les parties du méridien qui répondent à des différences infiniment petites et égales en latitudes vraies, en même proportion que les élémens des circonférences des cercles de longitude devroient diminuer, afin de conserver entre les uns et les autres le même rapport que sur le sphéroïde, il résultera les cartes réduites qui sont de la plus grande utilité aux navigateurs, puisqu'elles leur servent à déterminer sur une surface plane la vraie position du vaisseau sur le sphéroïde, etc.

La construction des cartes réduites qui, comme nous venons de le dire, exige qu'on augmente convenablement les parties de latitudes, c'est-à-dire qu'on forme une table des *latitudes croissantes*, n'a aucune difficulté dans l'hypothèse de la sphéricité de la terre : car, les méridiens étant sur la sphère des grands cercles, de même que l'équateur, et les arcs des parallèles étant aux arcs de l'équateur qui leur sont semblables, comme le cosinus de la latitude des premiers est au rayon 1 des grands cercles de la sphère, il n'y a qu'à faire croître les parties correspondantes des méridiens rectilignes, dans le rapport du rayon 1 de l'équateur au cosinus de la latitude; d'où il est aisé de conclure que les degrés de longitude étant sur les cartes réduites égaux à ceux de latitude naturelle, on aura la proportion

$$d(Mr) : dL'' :: 1 : \cos. L''$$

dans laquelle (Mr) représente la partie du méridien rectiligne, ou échelle des latitudes croissantes, comprise depuis l'équateur jusqu'au parallèle dont la latitude vraie est représentée par L''.

De cette proportion on tire $d(Mr) = \frac{dL''}{\cos. L''}$; et intégrant, on a complètement

$$(Mr) = \log. \text{tang.} \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}L''\right) \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

S'il ne s'agissoit que d'avoir une partie $(Mr)'$ de l'échelle des latitudes croissantes, correspondante à la différence $L'' - L'$ des latitudes vraies, alors ajoutant une constante à l'équation précédente, ou observant que, quand $(Mr)' = 0$, on a $L'' = L'$; d'où const. $= -\log. \text{tang} \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}L'\right)$, on auroit complètement

$$(Mr)' = \log. \left(\frac{\text{tang.}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}L''\right)}{\text{tang.}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}L'\right)}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

(*) Nous nous servirons, dans cette note, de l'ancienne division du cercle, comme nous l'avons fait dans le texte, parce qu'elle se lie par les résultats numériques, avec ce que nous disons au chapitre II et suivans du premier livre.

Mais, dans le sphéroïde terrestre, aplati vers les pôles, les parties du méridien n'étant pas égales à celles de l'équateur, il en résulte, pour la construction des cartes réduites, une complication de rapports qu'il faut conserver 1.° entre les parties du méridien rectiligne et celles des lignes droites qui représentent les cercles de longitude, lesquelles sont égales, quoique sur le sphéroïde elles varient en sens inverse des latitudes; 2.° entre les parties du méridien et celles des latitudes vraies qui diffèrent sur le sphéroïde même. Ainsi la recherche que nous nous proposons, présente un peu plus de difficulté que dans l'hypothèse de la sphéricité (*).

(*) « Cependant, ajoutai-je, dans le mémoire dont j'ai extrait cette note, j'ai la certitude
» qu'on s'est occupé avant moi du même sujet; car je trouve, dans la *Connoissance des temps*
» de Paris, année 1793, page 303, une table des latitudes croissantes dans l'hypothèse de l'ellip-
» sité des méridiens, par *Mendoza*, officier de la marine espagnole, lequel, dans l'avertissement
» qui précède sa table, nous dit *que son célèbre compatriote Don J. Juan a aussi donné, dans les*
» *observations de son voyage, une table des latitudes croissantes pour le rapport de 265 à 266*
» *entre les axes de la terre.* Mais à cause 1.° que cet astronome ne joint pas à sa table la théorie
» qui l'a conduit à ce résultat (M. Delambre, nommé par le bureau des longitudes pour examiner
» et lui rendre compte de mon mémoire, écrivit en marge, *c'est celle de Maclaurin*); 2.° que je
» ne connois point d'écrit sur ce sujet; 3.° que la formule que je donnerai pour le calcul de ces
» tables est extrêmement simple; 4.° que ma théorie est généralement applicable à tout sphéroïde,
» soit elliptique, soit de figure différente de l'ellipsoïde; je me décide à hasarder le parallèle que
» les géomètres pourront faire de cet écrit avec tous ceux qui doivent avoir paru sur ce sujet.
» D'ailleurs, je préviens que si je suis jamais à même de faire cette comparaison, je serai le pre-
» mier à me juger sévèrement, s'il y a lieu; car en géométrie, le mieux est évident, et celui qui ne
» l'aperçoit pas, n'est pas géomètre ».

Ce temps dont je parlois est venu, et je vois avec plaisir que la lecture de mon mémoire ayant dirigé les idées de M. Delambre vers cet objet, a été la cause que ce savant a donné, dans la *Connoissance des temps* de cette année 1805, page 342, une formule plus simple que la mienne, lorsqu'on néglige une quantité assez petite pour pouvoir l'être sans une erreur sensible, et une autre formule encore plus exacte qu'il a eu la bonté de me communiquer, et dont je parlerai après celle qui est dans la *Connoissance des temps*.

Représentant par 1 le demi-grand axe de l'ellipse; b le demi-petit axe; e l'excentricité; L la latitude vraie; λ un angle tel que tang $\lambda = b$ tang. L (c'est l'angle que nous appelons latitude corrigée); λ' un autre arc tel que tang. $\lambda' = b^2$ tang. L; de plus, faisant C = arc du méridien sur les cartes réduites, ou C = latitude croissante.

M. Delambre trouve

$$C = \log.\tan g.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda') \ldots . \quad (a).$$

Mais représentant par ν l'angle de la verticale, on a sensiblement $\lambda' = L - \nu$; car puisque ce géo-

2. On sait que la *loxodromique* est la courbe que trace sur le sphéroïde terrestre, un vaisseau qui suit constamment un même air de vent intermédiaire aux quatre cardinaux. Ainsi la loxodromique est une courbe à double courbure, de forme spirale, qui coupe tous les méridiens sous un même angle, et qui fait un nombre infini de révolutions autour des pôles, en s'approchant continuellement de ces points sans pouvoir les atteindre; car, si elle les atteignoit, il faudroit qu'elle y coupât tous les méridiens à la fois sous un même angle, ce qui est ab-

---

mètre a fait $\text{tang}\ \lambda' = b^2\ \text{tang}\ L$, on aura, en se servant de la même notation que lui, c'est-à-dire, représentant par a l'aplatissement de l'ellipsoïde, $\text{tang.}\ \lambda' = (1 - 2a)\ \text{tang.}\ L = \frac{1 - 2a\cos.^2 L}{1 + 2a\sin.^2 L}\ \text{tang.}\ L = \frac{\sin. L - \cos. L \times a \sin. 2L}{\cos. L + \sin. L \times a \sin. 2L}$. Mais, ainsi que nous l'avons démontré dans la note I, $\text{tang.}\ \nu = a \sin. 2L$, donc $\text{tang.}\ \lambda' = \frac{\sin. L \cos. \nu - \cos. L \sin. \nu}{\cos. L \cos. \nu + \sin. L \sin. \nu} = \frac{\sin. (L - \nu)}{\cos. (L - \nu)} = \text{tang.}\ (L - \nu)$; d'où $\lambda' = L - \nu$. Ainsi, par le moyen de la formule (a) de M. Delambre, il suffit de diminuer la latitude d'une quantité égale à l'angle de la verticale avec le rayon, après quoi on calculera comme dans la sphère, ce qui est fort commode. Il est vrai que ce même géomètre ajoute que pour l'ellipse rigoureuse, il a la formule

$$C = \log. \text{tang.} (45° + \tfrac{1}{2} L) - e^2 \sin. L - \tfrac{1}{3} e^4 \sin.^3 L - \tfrac{1}{5} e^6 \sin.^5 L - \tfrac{1}{7} e^8 \sin.^7 L - \text{etc.} \ldots (b),$$

dans laquelle nous avons corrigé quelques fautes d'impression.

Tout ce qui sort de la plume de ce savant, étant fait pour nous intéresser, nous allons démontrer ses formules (a et b).

M. Delambre a déjà démontré que $\frac{dM}{dL} = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}$ (*déter. d'un arc du méridien*, page 72, formule 23), et que le rayon du parallèle à l'équateur, dont la latitude vraie est L, et que nous représenterons par P, est $= \frac{\cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$. Mais $dP : dL ::$ le rayon de P ou $\frac{\cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} : 1$; donc $\frac{dP}{dL} = \frac{\cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$, et $\frac{dM}{dP} = \frac{1 - e^2}{\cos. L (1 - e^2 \sin.^2 L)}$. Mais puisque par la nature des latitudes croissantes, les parties d'un arc des latitudes croissantes, que nous représenterons par C, doivent croître relativement à celles des latitudes, dans le même rapport que les parties du méridien aux parties des parallèles, on aura la proportion

$$dP : dM :: dL : dC;\ \text{d'où}\ dC = dL \times \frac{dM}{dP} = \frac{(1 - e^2)\, dL}{(1 - e^2 \sin.^2 L) \cos. L} = \frac{(1 - e^2)\, d \sin. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L) \cos.^2 L} =$$

$$\frac{d \sin. L - e^2 d \sin. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)(1 - \sin.^2 L)} = \frac{d \sin. L - e^2 d \sin. L + e^2 \sin.^2 L\, d \sin. L - e^2 \sin.^2 L\, d \sin. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)(1 - \sin.^2 L)} =$$

$$\frac{d \sin. L (1 - e^2 \sin.^2 L) - e^2 d \sin. L (1 - \sin.^2 L)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)(1 - \sin.^2 L)} = \frac{d \sin. L}{1 - \sin.^2 L} - \frac{e^2 d \sin. L}{1 - e^2 \sin.^2 L};\ \text{donc}$$

$$C = \int \frac{d \sin. L}{1 - \sin.^2 L} - e \int \frac{e\, d \sin. L}{1 - e^2 \sin.^2 L} = \log. \text{tang.} (45° + \tfrac{1}{2} L) - \tfrac{1}{2} e \log. \left(\frac{1 + e \sin. L}{1 - e \sin. L} \right),$$

et développant ce dernier terme, on retrouve l'équation (b).

Si de la latitude vraie L, on retranche l'angle de la verticale ν, on aura $L - \nu$ qui, évidemment,

surde. Cela posé, supposons que la droite QE est le développement rectiligne d'une partie de l'équateur de la sphère inscrite, dans lequel, conséquemment, les degrés sont conservés dans leurs longueurs naturelles; que QM est un méridien rectiligne, c'est-à-dire l'échelle des latitudes croissantes que nous nous proposons de trouver; et qu'enfin la loxodromique qui, évidemment doit être une ligne droite, puisque sur une surface plane il n'y a qu'une telle ligne qui puisse couper d'autres droites parallèles entr'elles sous un même angle, est re- Fig. 6.

---

sers l'angle de latitude apparente; on aura donc $\text{tang.}(L-\nu)=(1-2a)\text{tang.}L$ (éq. 64 de la première note). Mais $2a=e^2$, donc $\text{tang.}(L-\nu)=(1-e^2)\text{tang.}L=\text{tang.}L-e^2\text{tang.}L$, d'où $\text{tang.}L-\text{tang.}(L-\nu)=e^2\text{tang.}L$, et $\frac{\text{sin.}\nu}{\text{cos.}L\,\text{cos.}(L-\nu)}=e^2\text{tang.}L$; d'où $\text{sin.}\nu=e^2\text{sin.}L\times\text{cos}(L-\nu)=e^2\text{sin.}L\,\text{cos.}L\,\text{cos.}\nu+e^2\text{sin.}^2L\,\text{sin.}\nu$. Mais $\text{sin.}\nu=2\,\text{sin.}\frac{1}{2}\nu\,\text{cos.}\frac{1}{2}\nu=2\,\text{tang.}\frac{1}{2}\nu\times\text{cos.}^2\frac{1}{2}\nu$, et $\text{cos.}\nu=\text{cos.}^2\frac{1}{2}\nu-\text{sin.}^2\frac{1}{2}\nu=(1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}\nu)\text{cos.}^2\frac{1}{2}\nu$; donc, substituant ces valeurs, et divisant toute l'équation par $\text{cos.}^2\frac{1}{2}\nu$, on aura $2\,\text{tang.}\frac{1}{2}\nu=e^2\text{sin.}L\,\text{cos.}L(1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}\nu)+2e^2\text{sin.}L\,\text{tang.}\frac{1}{2}\nu$. Donc $2(1-e^2\text{sin.}^2L)\,\text{tang.}\frac{1}{2}\nu=e^2\text{sin.}L\,\text{cos.}L(1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}\nu)$. Or, nous observerons qu'à cause de $\text{tang.}\nu=a\,\text{sin.}2L$ (éq. 47 de la note 1) $=\frac{e^2}{2}\text{sin.}2L$, et de $\text{tang.}\frac{1}{2}\nu=\frac{1}{2}\text{tang.}\nu$ (à cause de la petitesse de l'angle ν), on aura $\text{tang.}\frac{1}{2}\nu=\frac{e^2}{4}\text{sin.}2L$; d'où $\text{tang.}^2\frac{1}{2}\nu=\frac{e^4}{16}\text{sin.}^2L$; donc l'équation précédente, en négligeant les termes affectés de e^4, se réduit à celle $2(1-e^2\text{sin.}^2L)\text{tang}\frac{1}{2}\nu=e^2\text{sin.}L\,\text{cos.}L$, d'où $\text{tang.}\frac{1}{2}\nu=\frac{\frac{1}{2}e^2\text{sin.}L\,\text{cos.}L}{1-e^2\text{sin.}^2L}=\frac{1}{2}e^2\text{sin.}L\,\text{cos.}L+\frac{1}{2}e^4\times\text{sin.}^3L\,\text{cos.}L$. Mais M. Delambre a démontré, dans sa préface des tables de Borda (page 46, formule 8), que $d\,\text{log.tang.}A=\frac{2\,\text{tang.}dA}{\text{sin.}2A}-\frac{2\,\text{tang.}^2dA\,\text{cot.}2A}{\text{sin.}2A}+\text{etc.}$ Donc, se bornant à ces deux premiers termes, et faisant $A=45^\circ+\frac{1}{2}L$, d'où $2A=90^\circ+L$, $\text{sin.}2A=\text{cos.}L$, $\text{cot.}2A=\text{tang.}L$ et $dA=\frac{1}{2}dL$, on aura $d\,\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}L)$, ou $\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}L)-\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}L-\frac{1}{2}dL)=\frac{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}dL}{\text{cos.}L}+\frac{2\,\text{tang.}^2dL\,\text{tang.}L}{\text{cos.}L}$. Or, M. Delambre considère l'angle ν de la verticale comme étant la différentielle dL de la latitude vraie L; donc, substituant dans cette dernière équation la valeur trouvée précédemment à $\text{tang.}\frac{1}{2}\nu$, au lieu de $\text{tang.}\frac{1}{2}dL$, on aura $\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}L)-\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}(L-\nu))=\frac{e^2\text{sin.}L\,\text{cos.}L+e^4\text{sin.}^3L\,\text{cos.}L}{\text{cos.}L}+\frac{\frac{1}{2}e^4\text{sin.}^2L\,\text{cos.}^2L\,\text{tang.}L}{\text{cos.}L}=e^2\text{sin.}L+e^4\text{sin.}^3L+\frac{1}{2}e^4\text{sin.}^3L=e^2\text{sin.}L+\frac{3}{2}e^4\text{sin.}^3L$; donc $\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}(L-\nu))=\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}L)-e^2\text{sin.}L-\frac{3}{2}e^4\text{sin.}^3L$. Or, nous avons déjà démontré que $C=\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}L)-e^2\text{sin.}L-\frac{1}{3}e^4\text{sin.}^3L$, en négligeant le terme affecté de e^6, d'où $\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}L)-e^2\text{sin.}L=C+\frac{1}{3}e^4\text{sin.}^3L$; et substituant cette valeur, on aura $\text{log.tang}[45^\circ+\frac{1}{2}(L-\nu)]=C+\frac{1}{3}e^4\text{sin.}^3L-\frac{3}{2}e^4\text{sin.}^3L=C-\frac{7}{6}e^4\text{sin.}^3L=C-\frac{14}{3}a^2\text{sin.}^3L$. Donc, négligeant ce dernier terme qui est fort petit, et ne peut jamais égaler 2″, on aura $C=\text{log.tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}\lambda')$; ce qui est l'équation donnée par M. Delambre dans la *Connoissance des temps* de 1805.

Fig. 6. présentée par l'hypothénuse PF. Nommons F l'angle constant PFQ sous lequel la loxodromique coupe tous les méridiens sur le sphéroïde, et Γ' le changement en longitude PQ comptée sur l'équateur de la sphère inscrite, que nous appellerons *longitude corrigée*.

Quant à ma formule que ce géomètre a insérée dans le même ouvrage, sous la forme $C = \log.\tan g.(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda) - (1-b)\sin.\lambda$, j'observerai que b étant $= 1 - a$, on pourroit l'écrire sous la forme plus simple $C = \log.\tan g.(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda) - a\sin.\lambda$.

Voici une autre méthode du même géomètre qu'il a eu la bonté de me communiquer en même temps que les démonstrations des précédentes, et à laquelle il donnoit la préférence; car il me disoit, dans une note qu'il m'envoyoit sur ce sujet : « Cette formule (a), qui emploie la latitude corrigée de l'angle de la verticale avec le rayon, est d'une exactitude suffisante; mais l'autre méthode que je démontre dans la même note, est plus exacte, et me paroît préférable en tout point ».

Cette seconde méthode n'est, à proprement dire, que celle donnée par la formule (b), dans laquelle on néglige les termes affectés des puissances de e supérieures à la quatrième, ce qui donna pour la correction à faire aux latitudes croissantes calculées pour la sphère, la quantité $-(e^2\sin.L + \frac{1}{3}e^4\sin.^3L)$, ou, afin d'avoir cette quantité exprimée en parties de circonférence de cercle, $-\left(\frac{e^2\sin.L}{\sin.1'} + \frac{e^4\sin.^3L}{\sin.3'}\right) = -\left(\frac{e^2+\frac{1}{4}e^4}{\sin.1'}\right)\sin.L + \left(\frac{e^4}{\sin.12'}\right)\sin.3L$. Mais a représentant l'aplatissement, on a $1 - a = \sqrt{(1-e^2)} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}e^4$, d'où $2a = e^2 + \frac{1}{4}e^4$, et $\frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{12}e^4$. Donc la correction d'aplatissement est $-\left(\frac{2a}{\sin.1'}\right)\sin.L + \left(\frac{a^2}{\sin.3'}\right)\sin.3L$. Ce dernier terme est le plus souvent insensible; on pourra donc s'en tenir au terme $-\left(\frac{2a}{\sin.1'}\right)\sin.L$, et l'on aura en réduisant le logarithme naturel en logarithme vulgaire, et multipliant le premier terme du second membre par $3437',747$, qui est la valeur du rayon en minutes,

$$7915,704676\log.\text{vulg}.\tan g.(45^\circ + \tfrac{1}{2}L) - \frac{2a}{\sin.1'}\sin.L.$$

Cette formule, extrêmement élégante, a sur la mienne (6) (art. 4 de cette note) l'avantage de n'employer directement que la latitude vraie L au lieu de la latitude corrigée que j'ai employée, inconvénient qui n'est pas à la vérité bien grand, puisque la table I donne tout de suite la latitude corrigée qui correspond à la latitude vraie L; mais il n'en existe pas moins : aussi n'aurois-je pas donné ma formule, si la démonstration n'en avoit été infiniment plus simple que celles des formules de M. Delambre, et si la théorie qui m'a servi à trouver cette formule n'étoit celle qui me sert de même, dans la note VII, à résoudre les problèmes de navigation sur le sphéroïde terrestre, quelle que soit sa figure. C'est à ce système général que j'ai tenu, parce qu'il est celui qui plait le plus aux géomètres. Au reste, je saisis avec plaisir cette occasion de renouveler mes remercîmens à M. Delambre, sur la communication qu'il a bien voulu me faire de ses formules, dont je suis le premier à reconnoître la supériorité sur la mienne.

Il est clair que le triangle rectiligne rectangle PQF, nous donnant $QF = \frac{PQ}{\text{tang.} F}$, nous aurons l'équation Fig. 6.

$$(Mr) = \frac{r'}{\text{tang.} F} \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

dans laquelle le second membre ne se compose que de deux quantités qui sont les mêmes dans le triangle rectiligne PQF, et dans le sphéroïde ; donc, si dans ce dernier cas nous pouvons trouver une valeur de $\frac{r'}{\text{tang.} F}$ en fonctions des latitudes et des axes, nous aurons la valeur cherchée de (Mr).

3. Soit ABDEA une partie de la surface du sphéroïde terrestre, Eq un arc de la loxodromique que nous représenterons par ξ. Imaginons que le méridien AD passe infiniment près de celui AB ; et que pq est l'élément dP d'un cercle de longitude que nous nommons P, et qui a pour rayon $qF = x$. Il est clair que le triangle rectangle et infinitésimal qpm donne l'équation $d\xi = \sqrt{(dP^2 + dM^2)}$, M représentant le méridien du sphéroïde. Mais l'on sait que, dans toute courbe plane M, on a $dM^2 = dy^2 + dx^2$. De plus, r' étant un arc de l'équateur de la sphère inscrite dont le rayon est 1, et P' étant la circonférence d'un parallèle dont le rayon est x, on aura $dP = x\,dr'$; d'où $dP^2 = x^2(dr')^2$; donc, substituant ces valeurs dans celle de $d\xi$, on aura l'équation Fig. 7.

$$d\xi = \sqrt{x^2(dr')^2 + dy^2 + dx^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (Z),$$

qui est celle de toutes les courbes que l'on peut tracer sur un sphéroïde de révolution.

Actuellement nous remarquerons que le même triangle infinitésimal qpm donne $d\xi = \frac{dP}{\text{sin.} F} = \frac{x\,dr'}{\text{sin.} F}$; donc, égalant ces deux valeurs de $d\xi$, et carrant l'équation résultante, on aura $\frac{x^2(dr')^2}{\text{sin.}^2 F} = x^2(dr')^2 + dy^2 + dx^2$; d'où $x^2(dr')^2 \cot.^2 F = dy^2 + dx^2$, et $\frac{dr'}{\text{tang.} F} = \frac{\sqrt{dy^2 + dx^2}}{x} = \frac{dM}{x}$; donc (équation 3)

$$d(Mr) = \frac{\sqrt{dy^2 + dx^2}}{x} = \frac{dM}{x} \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Mais nous avons vu dans la note 1 que, quelle que soit la puissance n des sinus des latitudes suivant laquelle croissent les différences respectives des très-petits arcs du méridien du sphéroïde à celui de ces très-petits arcs qui est sous l'équateur, on pouvoit toujours obtenir les valeurs de y et de x en fonctions de la latitude vraie L. (*Voyez* dans la note 1 les équations 5 et 6 lorsque n est

un nombre pair, et les équations 11 et 12 lorsque n est un nombre impair.) Donc, différenciant ces valeurs des coordonnées, et faisant les substitutions convenables dans notre équation (4), ensuite intégrant, on aura la valeur de (Mr) qu'il falloit trouver.

Fig. 1. 4. Supposons $n=2$, hypothèse qui, comme nous l'avons déjà dit dans la première note, est jusqu'à présent la meilleure base d'un système sur la figure d'un sphéroïde terrestre. Représentons par Λ'' la latitude corrigée OCA de l'extrémité A′ de l'arc AA′ du méridien M que nous considérons comme la plus éloignée de l'équateur. Cela posé, nous aurons $Oq = A'B = y = \sin.\Lambda''$, et $CB = NA' = x$ qui, par la propriété de l'ellipse circonscrite à un cercle, est $= \frac{NO \times AC}{A''C} = Cq \times a$, en représentant toujours par $a\,(=1+\omega)$ le rayon de l'équateur. Mais $Cq = \cos.\Lambda''$; donc $x = a\cos.\Lambda''$. Différenciant ces valeurs de y et de x, on a $dy = \cos.\Lambda''\, d\Lambda''$, et $dx = -a\sin.\Lambda''\, d\Lambda''$; donc $dM\ (=\sqrt{dy^2+dx^2}) = d\Lambda''\sqrt{\cos.^2\Lambda'' + a^2\sin.^2\Lambda''} = d\Lambda''\sqrt{1+2\omega\sin.^2\Lambda''} = d\Lambda'' + \omega\, d\Lambda''\sin.^2\Lambda''$. Substituant cette valeur de dM et celle de $x = a\cos.\Lambda'' = (1+\omega)\cos.\Lambda''$ dans l'éq. (4), nous aurons $d(Mr) = \frac{d\Lambda'' + \omega\, d\Lambda''\sin.^2\Lambda''}{(1+\omega)\cos.\Lambda''}$, ou

$$d(Mr) = \frac{d\Lambda''}{\cos\Lambda''} - \frac{\omega\, d\Lambda''\cos.\Lambda''}{1+\omega} = \frac{d\Lambda''}{\cos.\Lambda''} - \omega\, d\sin.\Lambda'' \ \ldots\ldots \ (b);$$

et intégrant, on a l'équation

$$(Mr) = \log.\text{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Lambda'') - \omega\sin.\Lambda'' \ \ldots\ldots \ (5)$$

qui, évidemment, est complète lorsque l'on compte l'échelle croissante (Mr) depuis l'équateur.

Afin de pouvoir soumettre la formule (5) au calcul des tables de logarithmes vulgaires, et avoir (Mr) en parties de la circonférence du cercle, par exemple, en minutes, nous multiplierons le premier terme du second membre, qui évidemment est un logarithme naturel, par le module 2,302585 des logarithmes des tables, et tout le second membre par 3437′,747 qui est la valeur du rayon de cercle en minutes. Enfin, nous supposerons que le rapport des axes de la terre est de 320 à 321 (*), ce qui nous donnera l'équation

$$(Mr) = 7915',704676 \log.\text{vulg}.\ \text{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Lambda'') - 10',7095\sin.\Lambda'' \ \ldots\ldots \ (6),$$

(*) C'est le rapport des axes dont s'est servi Mendoza lorsqu'il a calculé la table des latitudes croissantes que nous avons adoptée dans cet ouvrage, d'après des raisons que nous exposerons plus bas.

formule extrêmement simple, par le moyen de laquelle on peut aisément calculer une table des latitudes croissantes. Mais, afin de rendre ce calcul, ainsi que plusieurs autres dans lesquels peuvent entrer les latitudes corrigées, plus aisés, nous avons calculé la table I des différences entre les latitudes vraies et les latitudes corrigées. Il faut bien se rappeler que ces différences sont soustractives, lorsqu'on veut passer des latitudes vraies aux corrigées; et additives dans le cas contraire, puisque $L > \lambda$. Cela posé, faisons une application de la formule (6), en nous proposant de déterminer, sur la carte réduite, à quelle distance de l'équateur exprimée en minutes de degré, doit se trouver placé le parallèle dont la latitude vraie est de 60°.

La table I me donne la latitude corrigée qui répond à la latitude vraie $60° = 60° - 4' 38'',6 = 59° 55' 21'',4$. Cela connu, voici le calcul :

$45° + \frac{1}{2}\lambda'' = 74° 57' 40'',7$ log. tang. $= 0,5707757$ log. log. tang. $= 9,7564654$

log. 7915',704676 $=$ 3,8984896

Somme. 3,6549550 log. de 4518,09 +

log. sin. λ'' ($=$ log. sin. $59° 55' 21'',4$) $= 9,9371914$

log. 10,7095 $=$ 1,0297689

Somme 0,9669603 log. de . . . . 9,27 —

Différence. 4508,82

ce qui est la valeur cherchée de (Mr), et qui est parfaitement conforme au résultat que Mendoza a trouvé, en se servant de la méthode de Maclaurin, qui est beaucoup plus longue que la nôtre (*).

Nous donnons la table des latitudes croissantes (tab. II) calculée par Mendoza, quoique cet astronome ait pris pour rapport des axes $\frac{320}{321}$, et qui donne $\alpha = 0,00312$, au lieu de $\alpha = 0,00297$, qui est la valeur de l'aplatissement du sphéroïde qui paroît le plus se rapprocher de la vérité (*voyez* la note I); cependant, vu que l'on ne peut encore considérer cette dernière valeur de α comme étant irrévocablement celle qu'adopteront les astronomes, et que les nouvelles opérations géodésiques de M. Méchain, continuées par M. Biot, ainsi que celles des astronomes suédois, Swamberg, etc., dont M. Delambre s'occupe dans ce moment-ci à faire connoître les résultats, pourront y apporter quelques change-

(*) La formule de Maclaurin est celle-ci

$$(Mr) = \text{log. tang.}(45° + \tfrac{1}{2} L) - e \,\text{log. tang.}(45° + \tfrac{1}{2} L'),$$

dans laquelle e est l'excentricité, et $L' = $ arc (sin. $= e$ sin. L).

mens ; peut-être aussi, le temps où enfin on se servira de la nouvelle division du cercle, dont jusqu'à présent on ne parle que dans la théorie, et qui malheureusement n'est pas mise en pratique, n'étant pas éloigné, nous nous sommes décidés, en attendant, de ne donner que la table de Mendoza qui se trouve dans la *Connoissance des temps* de 1795. D'ailleurs, elle peut, dans tous les cas, être considérée comme suffisamment exacte, quand même la vraie valeur de ω seroit 0,00312, ce qui donneroit l'erreur de $\omega = -0{,}00015$. En effet, différenciant l'équation (5) par rapport à (Mr), Λ'' et ω, on a $d(Mr) = \frac{d\Lambda''}{\cos.\Lambda''} - \omega \cos.\Lambda'' d\Lambda'' - \sin.\Lambda'' d\omega$; mais $\text{tang.}\,\Lambda'' = \frac{\text{tang.}\,L}{1+\omega} = (1-\omega)\,\text{tang.}\,L$; donc $\frac{d\Lambda''}{\cos.^2\Lambda''} = -d\omega \times \text{tang.}\,L$; d'où $d\Lambda'' = -d\omega\,\text{tang.}\,L \cos.^2\Lambda''$; ou, sensiblement, $d\Lambda'' = -d\omega \sin.L \cos.L$; donc, mettant dans la valeur de $d(Mr)$ celle de $d\Lambda''$, et respectivement cos. L et sin. L à la place de $\cos.\Lambda''$ et $\sin.\Lambda''$, on a $d(Mr) = -2d\omega \sin.L + \omega \cos.^2 L \sin.L\, d\omega$; et substituant la valeur de $d\omega = -0{,}00015$, on a $d(Mr) = 0{,}0003 \sin.L - 0{,}000000234 \cos.L \sin.2L$; donc, dans le cas où la vraie valeur de ω seroit 0,00297, la plus grande erreur que l'on pourroit commettre en se servant de la table II seroit en moins de 0,0003 sin. L, ce qui ne donneroit pour 82 degrés de latitudes, qui est vraisemblablement la limite que les glaces nous empêcheront de passer (*), qu'une quantité $= 1''{,}021$, c'est-à-dire, que la latitude croissante de 82° seroit $9125'{,}26$, au lieu d'être $9124'{,}24$ comme elle se trouve dans la table ; et, puisque l'erreur diminue comme le sinus de la latitude, on voit qu'elle devient insensible par les latitudes moyennes.

5. L'équation (5) a été prise sans constante, c'est-à-dire d'après la supposition que (Mr) commençant à l'équateur, on a la latitude corrigée Λ' de l'extrémité la plus près de l'équateur du méridien (Mr) des cartes réduites, qui est $= 0$. Mais $(Mr)'$ représentant, par exemple, la partie de l'échelle des latitudes croissantes qui correspond à la différence des latitudes vraies de départ et d'arrivée d'un vaisseau que nous représenterons respectivement par L' et L'', soit que le vaisseau s'éloigne, soit qu'il s'approche de l'équateur ; de plus, représentant par Λ' et Λ'' les latitudes corrigées correspondantes aux vraies L' et L'' ; il est évident que lorsque $(Mr)' = 0$, on a $\Lambda'' = \Lambda'$; donc l'équation (5), à la-

(*) Les îles appelées *les Sept-Sœurs*, et qui appartiennent aux Russes, sont à peu près par 82 degrés de latitude nord, et sont dans la région la plus septentrionale, où l'on ait encore pénétré. Du côté du sud, le plus haut degré de latitude auquel on soit parvenu, est 71° 10'. Ce fut dans ces régions méridionales que le capitaine Cook fut arrêté par les glaces, et obligé de rétrograder.

quelle doit être ajoutée une constante, nous donnera const. $= -\log.\,\text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Lambda') + \omega \sin.\,\Lambda'$, et on aura complètement

$$(\text{M}r)' = \log.\left(\frac{\text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Delta'')}{\text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Lambda')}\right) - 2\,\omega\,\sin.\left(\frac{\Lambda'' - \Lambda'}{2}\right)\cos.\left(\frac{\Lambda'' + \Lambda'}{2}\right) \ldots\ldots (7).$$

Il est aisé de voir que cette valeur de $(\text{M}r)$ doit être prise positivement lorsque le vaisseau s'éloigne de l'équateur, et négativement dans le cas contraire. Mais, pour rendre le calcul de cette formule plus facile, et lui faire exprimer des minutes de degrés, nous lui ferons éprouver les mêmes opérations numériques qu'à l'éq. (5), et nous aurons celle

$$(\text{M}r)' = 7915{,}704676 \log.\,\text{vulg.}\left(\frac{\text{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Delta'')}{\text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Lambda')}\right) - 21{,}419 \sin.\left(\frac{\Lambda'' - \Lambda'}{2}\right)\cos.\left(\frac{\Lambda'' + \Lambda'}{2}\right) \ldots (8).$$

6. De l'équation (v), art. 21 de la note 1, on tire celle

$$\text{L}'' - \text{L}' = \frac{m + \frac{1}{2}\omega \sin.(\text{L}'' - \text{L}')\cos.(\text{L}' + \text{L}'')}{1 + \frac{1}{2}\omega},$$

dans laquelle il faut se rappeler que m représente l'arc $\text{M}'' - \text{M}'$ du méridien elliptique compris entre les latitudes vraies L′ et L″, que nous considérons ici comme étant les latitudes de départ et d'arrivée du vaisseau.

Faisant dans le second membre de cette dernière équation $\text{L}'' - \text{L}' = m$, d'où $\text{L}'' + \text{L}' = m + 2\text{L}'$, ce qui ne sauroit causer une erreur sensible (*), on aura

$$\text{L}'' - \text{L}' = \frac{m + \frac{1}{2}\omega \sin.\,m \cos.(m + 2\text{L}')}{1 + \frac{1}{2}\omega} \ldots\ldots (9).$$

Mettant à la place de ω la valeur 0,00312 que nous lui avons supposée précédemment, et multipliant le second terme du numérateur de la fraction par

(*) La plus grande différence qui puisse exister entre m et $\text{L}'' - \text{L}'$ est évidemment, lorsque $\text{L}'' = \frac{\pi}{2}$ et $\text{L}' = 0$, et dans ce cas l'équation (10) se réduira à $\text{L}'' = 0{,}99844\,(m + 965{,}32 \sin.\,m \cos.\,m) = 0{,}99856\,(m + 482{,}66 \sin.\,2m)$. Mais dans le cas dont nous parlons, m qui est le quart du méridien, est $= (1 + \frac{1}{2}\omega)\frac{\pi}{2} = (1{,}00156)\,90^\circ$ (éq. 68, art. 9 de la note 1) $= 90^\circ\,8'\,25'',44$, on aura donc $\text{L}'' = 0{,}99844\,(90^\circ\,8'\,25'',44 - 482{,}66 \sin.\,16'\,50'',88) = 323994'' = 89^\circ\,59'\,54''$. Or, L″ est par hypothèse $= 90^\circ$, il n'y auroit donc dans ce cas, qui est le plus défavorable qua l'on puisse imaginer, que 6″ d'erreur; d'où il est aisé de conclure que l'erreur est presqu'insensible dans les cas ordinaires qui seront les seuls que nous examinerons.

206264″,8 qui est la valeur du rayon du cercle en secondes, afin d'avoir L″—L′ en secondes de circonférence de cercle, on aura

$$L''-L'=0{,}99844\,[m+965{,}32\,\sin.m\cos.(m+2\,L')]^{\text{secondes}}\ldots\ldots(10).$$

Cette formule nous sera très-utile à la note VII.

NOTE CINQUIÈME.

Application du nouveau système de division de l'espace, du temps et de la circonférence du cercle à la navigation.

1. On sait que, par la nouvelle division du cercle, le quart de la circonférence est divisé en 100 degrés, le degré en 100 minutes, la minute en 100 secondes, etc. De plus, le mètre est la dix-millionième partie de la longueur absolue du quart du méridien (note I); donc la longueur du degré moyen, c'est-à-dire celui compris entre 49° 50′ et 50° 50′ de latitude vraie (note I art. 18), est égale à la centième partie de la longueur absolue 10000000 mètres du quart du méridien terrestre, et par conséquent est égale à 100000 mètres. Cela posé, prenons pour la lieue marine la dixième partie du degré terrestre, ce qui nous donnera pour sa longueur 10000 mètres; donc, la dixième partie de cette quantité, qui équivaut à la centième partie du degré ou à la minute, et que nous appellerons le *mille marin* (*), sera de 1000 mètres. Or, d'après la nouvelle division du temps, le jour est de 10 heures, l'heure est de 100 minutes, la minute de 100 secondes, etc. Donc, si le vaisseau fait un mille marin par heure, il ne fera dans 50″, qui est la deux-centième partie d'une heure, que $\frac{1000}{200}=5$ mètres, d'où il suit qu'il faut diviser la ligne du loch en nœuds de 5 mètres, et construire des ampoulettes de 50″ de temps. Mais 50″, nouvelle division du temps, équivalent à 43″ 12‴ ancienne division; conséquemment, le temps de l'opération seroit trop long lorsque le vent est très-fort; il seroit donc à propos de ne se servir de cette ampoulette que dans les très-beaux temps,

(*) Ce que nous appelons lieue marine et mille marin, s'appelle respectivement *myriamètre* et *kilomètre*.

vent modéré; mais dans les gros temps, on se serviroit d'ampoulettes de 25″, qui valent 21″ 36‴ sexagésimales.

2. Quant à la rose des vents, on pourroit, comme dans l'ancien système, la diviser en 32 rumbs de vents, et donner à chaque air de vent la même dénomination qu'il avoit d'abord; toute la différence qu'il y auroit, c'est que le rumb de vent, au lieu d'être de 11° 15′, ancienne division, seroit de 12° 50′ nouvelle division.

On pourroit encore, en divisant le cercle, sur lequel doit être tracée la rose des vents, en huit angles égaux, qui conséquemment seroient de 50 degrés chacun, nommer les huit premiers airs de vent comme dans l'ancienne rose des vents, ensuite subdiviser ces angles en cinq angles de 10° chacun, ce qui seroit la valeur d'un rumb de vent; ainsi, en allant du *nord* vers l'est, on compteroit *nord* 10° *est*, *nord* 20° *est*, ainsi de suite jusqu'à *nord* 50° *est* qui est le *nord-est*. De même on compteroit de l'est vers le nord de 10 en 10°, et ainsi de suite comme c'est marqué à la fig. 8. Il me semble que cette subdivision de la boussole seroit beaucoup plus commode et aisée à se graver dans la mémoire que l'ancienne. D'ailleurs, sur tout ceci, nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer à l'ouvrage de M. de Fleurieu (*Système métrique décimal* appliqué à la navigation, pag. 88 et suivantes), où l'on trouvera tout ce qu'il est possible de dire de meilleur sur ces objets-là. Fig. 8.

NOTE SIXIÈME.

Examen de l'erreur que l'on peut commettre en prenant pour différence des longitudes de départ et d'arrivée, celle qui est donnée par le moyen parallèle.

Nous avons vu au renvoi qui est au bas de la page 35 du texte, que $r' = \frac{1}{2}$ tang. R log. $\left(\frac{1+\sin. L''}{1-\sin. L''} \times \frac{1-\sin. L'}{1+\sin. L'}\right)$ (éq. Q); ou, pour plus de facilité, faisant $L'' = L' + \delta$, effectuant la multiplication et divisant partiellement, on aura

$$r' = \tfrac{1}{2}\,\text{tang. R log.}\left(1 + \frac{2[\sin(L'+\delta) - \sin. L']}{(1+\sin. L')[1-\sin.(L'+\delta)]}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{tang. R log.}\left\{1 + \frac{4\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)\sin.\frac{\delta}{2}}{(1+\sin. L')[1-\sin.(L'+\delta)]}\right\};$$

mais $1+\sin. L'=\sin. 90^\circ+\sin. L'=2\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}L')\cos.(45^\circ-\frac{1}{2}L')$, et $1-\sin.(L'+\delta)=\sin. 90^\circ-\sin.(L'+\delta)=2\cos.(45^\circ+\frac{1}{2}L'+\frac{1}{2}\delta)\sin.(45^\circ-\frac{1}{2}L'-\frac{1}{2}\delta)$; donc $(1+\sin. L')[1-\sin.(L'+\delta)]=2\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}L')\sin.(45^\circ-\frac{1}{2}L'-\frac{1}{2}\delta)\,2\cos.(45^\circ-\frac{1}{2}L')\cos.(45^\circ+\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}\delta)$. Or, l'on sait que généralement $\cos. A-\cos. B=-2\sin.\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin.\left(\frac{A-B}{2}\right)$; donc, faisant d'abord $\frac{A+B}{2}=\frac{90^\circ+L'}{2}$ et $\frac{A-B}{2}=\frac{90^\circ-L'-\delta}{2}$, ou $A+B=90^\circ+L'$ et $A-B=90^\circ-L'-\delta$, on aura par le moyen de l'élimination, $A=90^\circ-\frac{1}{2}\delta$, et $B=L'+\frac{1}{2}\delta$, donc $2\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}L')\sin.(45^\circ-\frac{1}{2}L'-\frac{1}{2}\delta)=-\sin.\frac{1}{2}\delta+\cos(L'+\frac{1}{2}\delta)$. De même, à cause que $\cos. A+\cos. B=2\cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos.\left(\frac{A-B}{2}\right)$, on aura, en faisant $A-B=90^\circ-L'$ et $A+B=90^\circ+L'+\delta$, et par le moyen de l'élimination, $A=90^\circ+\frac{1}{2}\delta$, et $B=L'+\frac{1}{2}\delta$; donc, $2\cos.(45^\circ-\frac{1}{2}\delta)\cos.(45^\circ+\frac{1}{2}L'+\frac{1}{2}\delta)=-\sin.\frac{1}{2}\delta+\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)$; et enfin $(1+\sin. L')[1-\sin.(L'+\delta)]=[\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)-\sin.\frac{1}{2}\delta]^2$. Substituant cette valeur dans celle de r', on a

$$r'=\tfrac{1}{2}\,\text{tang. R log.}\left(1+\frac{4\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)\sin.\frac{1}{2}\delta}{(\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)-\sin.\frac{1}{2}\delta)^2}\right).$$

Mais cette fraction est $=4\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)\sin.\frac{1}{2}\delta(\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)-\sin.\frac{1}{2}\delta)^{-2}=\frac{4\sin.\frac{1}{2}\delta}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)}\left(1+\frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)}+\frac{3\sin.^2\frac{1}{2}\delta}{\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}+\text{etc}\right)$ (Alg. § 64 form. 13; donc, négligeant les puissances de $\sin.\frac{1}{2}\delta$ supérieures à la troisième, on aura

$$r'=\tfrac{1}{2}\,\text{tang. R log.}\left\{1+\left(\frac{4\sin.\frac{1}{2}\delta}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)}+\frac{8\sin.^2\frac{1}{2}\delta}{\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}+\frac{12\sin.^3\frac{1}{2}\delta}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\right)\right\}$$

Mais représentant par y la série de trois termes renfermée entre les parenthèses rondes, la formule 70, § 155 de l'Algèbre, donnera le développement du logarithme précédent $=$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{4\sin.\frac{1}{2}\lambda}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)}+\frac{8\sin.^2\frac{1}{2}\delta}{\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}+\frac{12\sin.^3\frac{1}{2}\delta}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\\ -\frac{8\sin.^2\frac{1}{2}\delta}{\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}-\frac{32\sin.^3\frac{1}{2}\delta}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\\ +\frac{64\sin.^3\frac{1}{2}\delta}{3\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\end{array}\right\}=\frac{4\sin.\frac{1}{2}\delta}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)}+\frac{\frac{4}{3}\sin.^3\frac{1}{2}\delta}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)},$$

en négligeant toujours les quatrièmes puissances de $\sin.\delta$. Donc.

$$r'=\text{tang. R}\left(\frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)}+\frac{\frac{2}{3}\sin.^3\frac{1}{2}\delta}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\right).$$

Mais négligeant les puissances de $\frac{1}{2}\delta$ supérieures à la troisième, on a

$$\sin.\tfrac{1}{2}\delta = \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{12}\delta^3,\ \text{et}\ \sin.^3\tfrac{1}{2}\delta = \tfrac{1}{8}\delta^3;\ \text{donc}\ r' = \text{tang. R} \times$$

$$\left(\frac{\delta}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)} - \frac{1}{24}\frac{\delta^3}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)} + \frac{2}{24}\frac{\delta^3}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\right),$$

ou

$$r' = \text{tang. R}\left\{\frac{\delta}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)} + \frac{\delta^3}{12}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\right)\right\} \ldots\ldots (A).$$

Or, puisque représentant par λ le chemin fait en longitude, et par ξ la longueur de la route faite par le vaisseau, on a $\lambda = \xi \sin.$ R (éq. 3 art. 44 du texte), il s'ensuit que si λ étoit égal à la longueur de l'arc du moyen parallèle compris entre les méridiens des points de départ et d'arrivée, la différence en longitude seroit $= \xi \sin.$ R séc. $\left(\frac{L''+L'}{2}\right)$; donc, représentant par r'' cette différence en longitude donnée par le moyen parallèle, et faisant attention que l'équation de convention $L'' = L'+\delta$, donne séc. $\frac{L''+L'}{2} =$ séc. $(L'+\frac{1}{2}\delta)$, on aura $r'' = \frac{\xi \sin. R}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)}$; mais $\xi = \frac{L''-L'}{\cos. R}$ (éq. 2, art. 43 du texte) $= \frac{\delta}{\cos. R}$; donc $r'' = \text{tang.R} \times \frac{\delta}{\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)}$. Retranchant cette dernière équation de celle (A), on a

$$r' - r'' = \frac{\text{tang. R}}{12}\,\delta^3\left(\frac{1-\frac{1}{2}\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\right) \ldots\ldots (B).$$

Mais $r'-r''$ et le facteur δ^3 du second membre, sont évidemment en parties du rayon (*); donc la longueur de la minute en parties du rayon étant 0,0002908g, ou sensiblement 0,00029, on aura $\frac{\delta}{0{,}00029}$ qui sera le nombre de minutes correspondantes à δ. Or, ce nombre de minutes est $= (3\xi \cos. R)^{\text{min.}}$, ξ étant la longueur de la route du vaisseau en lieues (éq. 2, art. 43 du texte); donc $\delta = 3 \times 0{,}00029\,\xi \cos. R$; et substituant cette valeur dans l'équation (B), nous aurons $r'-r'' = \frac{9}{4}(0{,}00029)^3\xi^3 \sin. R \cos.^2 R\left(\frac{1-\frac{1}{2}\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\right)$, ou divisant les

(*) Ceci ne peut regarder que le δ^3 qui provient du développement de sin. $\frac{\delta}{2}$ en fonction de l'arc $\frac{1}{2}\delta$, et on sait que dans ce développement l'homogenité des espèces dans les deux membres, exige que le second membre de l'équation $\sin.\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta -$ etc., soit de même espèce que le premier, c'est-à-dire, en fonctions du rayon. Mais le $\frac{1}{2}\delta$ ajouté à L' dans la fonction trigonométrique $\cos.(L'+\frac{1}{2}\delta)$, est toujours en parties de la circonférence du cercle.

deux membres par 0,00029, l'un et l'autre exprimeront des minutes, et on aura l'équation

$$\frac{r'-r''}{0,00029}=\frac{9}{4}(0,00029)^2\xi^3 \sin. R \cos.^2 R\left(\frac{1-\frac{1}{2}\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\right) \ldots\ldots \text{(C)}.$$

Afin de rendre la valeur de $\frac{r'-r''}{0,00029}$, la plus grande possible relativement à l'angle du rumb de vent R, cherchons le maximum de sin. R cos.² R. Or, en différenciant cette formule, et égalant sa différentielle ($\cos.^3 R - 2\sin.^2 R \cos. R$) dR à zéro, on a $\cos.^2 R - 2\sin.^2 R = 0$, d'où $\sin. R=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\cos. R=\sqrt{\frac{2}{3}}$; donc $\sin. R \cos.^2 R=\frac{2}{3\sqrt{3}}$; et substituant cette valeur dans l'équation (C), on aura

$$\frac{r'-r''}{0,00029}=\frac{\sqrt{3}}{2}(0,00029)^2\xi^3\left(\frac{1-\frac{1}{2}\cos.^2(L'+\frac{1}{2}\delta)}{\cos.^3(L'+\frac{1}{2}\delta)}\right) \ldots\ldots \text{(D)}.$$

Ainsi le cas le plus désavantageux à l'usage du moyen parallèle pour la recherche de la différence en longitude des points de départ et d'arrivée, est celui où l'angle du rumb de vent a pour sinus $\frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire, qu'il est égal 35° 15′ 52″, et que conséquemment la route du vaisseau est sur l'un des quatre airs de vent suivans:

N. E. ¼ N 1° 30′ 52″ E; N. O. ¼ N 1° 30′ 52″ O; S. O. ¼ S 1° 30′ 52″ O; S. E. ¼ S 1° 30′ 52″ E.

Nous allons voir dans ce cas le plus défavorable, les erreurs qui en résultent par les différentes latitudes; et, pour plus de simplicité, représentons par N le nombre de centaines de lieues contenues dans ξ, ce qui donne $\xi=100$ N; et $\frac{\delta}{2}\left(=\frac{3\xi\cos. R}{2}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\xi=122,474$ N: donc

$$\frac{r'-r''}{0,00029}=0,0728\ N^3\left(\frac{1-\frac{1}{2}\cos.^2(L'+122,474\,N^{\text{min.}})}{\cos.^3(L'+122,474\,N^{\text{min.}})}\right) \ldots\ldots \text{(E)}.$$

Afin de soumettre cette formule au calcul logarithmique, nous ferons

$$\cos. M=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos.(L'+122,474\,N^{\text{min.}}) \ldots\ldots \text{(F)},$$

ce qui nous donnera

$$\frac{r'-r''}{0,00029}, \text{ ou l'erreur en minutes}=\frac{0,0258\,N^3 \tang.^2 M}{\cos. M} \ldots\ldots \text{(H)}.$$

Cette équation nous apprend que, pour une même latitude, les erreurs croissent à peu près comme les cubes du nombre N de centaines de lieues de la lon-

gueur de la route ξ. Je dis *à peu près ;* car M est affecté de N, mais l'est de manière à ne pas rendre bien sensible la différence qui existe entre la vraie loi des accroissemens des erreurs, et celles que nous venons d'énoncer. Au reste, il est aisé de voir que l'erreur est toujours plus grande que $0{,}0258\,N^3$; car M doit être $> 45°$, puisque, si M étoit $< 45°$, on auroit l'équation (F) qui donneroit $\cos.(L' + 122{,}474\,N^{\text{min.}}) \left(= \frac{\cos. M}{\cos. 45°}\right) > 1$, ce qui est absurde.

En faisant successivement $L' + 122{,}474\,N^{\text{min.}} = 0°; 45°; 60°; 75°$ et $80°$, on trouve que les valeurs respectives de l'erreur en minutes sont successivement

$$[0{,}056\,N^3;\ 0{,}154\,N^3;\ 0{,}509\,N^3;\ 4{,}05\,N^3;\ \text{et}\ 13{,}62\,N^3] \ldots\ldots (I).$$

Si l'on fait $\xi = 200$ lieues, ce qui est une des plus grandes routes que l'on puisse considérer dans les problèmes que nous résolvons au chapitre IV, nous aurons successivement pour les latitudes $L' + 4°\,9'$

du moyen parallèle.	0°;	45°;	60°;	75°;	80°
les erreurs	17″;	1′14″;	4′5″;	32′24″;	1°48′58″

De la suite d'expressions en (I), il est aisé de voir qu'afin que l'emploi du moyen parallèle donne une minute d'erreur en longitude, il faut que sous l'équateur on ait $0{,}056\,N^3 = 1$, ou $N = \frac{10}{\sqrt[3]{56}} = 3{,}02$; et de même que pour les latitudes successives 45°; 60°; 75°; 80° du moyen parallèle, il faut qu'on ait respectivement $N = 1{,}87$; $N = 1{,}25$; $N = 0{,}62$; $N = 0{,}42$; ce qui donne des longueurs de route, qui sont respectivement aux latitudes du moyen parallèle

0° ; 45° ; 60° ; 75° ; 80°
de 302^lie; 187^lie; 125^lie; 62^lie; 42^lie,

puisque $\xi = 100\,N$.

On voit donc que l'on pourroit, sans crainte de commettre une erreur considérable, trouver la différence des longitudes de départ et d'arrivée, lorsque ces deux points sont compris dans les limites précédentes, en se servant du moyen parallèle. Mais, à cause que cette méthode n'est pas plus simple que la directe, et l'est même moins, lorsque l'on ne veut pas connoître le nombre de lieues courues en longitude; ce qui, au reste, n'est pas toujours très-intéressant à connoître; on fera bien de se servir de la méthode des latitudes croissantes enseignée à l'article 45 du texte.

NOTE SEPTIÈME.

De la Résolution des Problèmes de Navigation sur l'Ellipsoïde terrestre.

Fig. 9 du texte. 1. SUPPOSANT sur l'ellipsoïde la même construction que celle que nous avons supposée sur la sphère (art. 43, livre I, chap. IV); le triangle infinitésimal LaI donnera l'équation $d\xi = \frac{dm}{\cos. R}$ . . . . (1), en représentant par m un arc SN d'un méridien elliptique compris entre les parallèles BA et TD de départ et d'arrivée; intégrant l'équation précédente, on a

$$\xi = \frac{m}{\cos. R} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

sans constante; car lorsque $m = 0$ on a $\xi = 0$.

Le même triangle infinitésimal LIa donne $d\xi = \frac{d\lambda}{\sin. R}$, d'où

$$\xi = \frac{\lambda}{\sin. R} \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

De ces deux équations on tire celle tang. $R = \frac{\lambda}{m}$. Mais de l'éq. (3), note IV, on tire tang. $F = \frac{r'}{(Mr)'}$; ou, mettant à la place de la lettre F qui représentoit l'angle constant de la loxodromique avec les méridiens, c'est-à-dire l'angle du rumb de vent, la lettre R dont nous nous servons maintenant pour représenter le même angle, et mettant $(Mr)'$ qui représente la partie de l'échelle des latitudes croissantes comprise entre les deux latitudes vraies L' et L'', qui sont celles des deux extrémités de l'arc m du méridien, on aura tang. $R = \frac{r'}{(Mr)'}$; d'où

$$r' = (Mr)' \text{ tang. } R \; . \; . \; . \; . \; . \; (4),$$

et égalant la dernière valeur de tang. R avec celle trouvée ci-dessus, on aura l'équation $\frac{\lambda}{m} = \frac{r'}{(Mr)'}$; d'où l'on tire la proportion

$$(Mr)' : m :: r' : \lambda \; . \; . \; . \; . \; . \; (5),$$

et par conséquent l'analogie: *La différence des latitudes croissantes des points*

de partance et d'arrivée, est au chemin vraiment couru en latitude, comme la différence des changemens des longitudes corrigées, comptées sur l'équateur de la sphère inscrite, est au chemin vraiment couru en longitude. Ainsi, dans la figure 10 du texte, on a TB, qui n'est plus la différence en latitude comme dans l'hypothèse sphérique (chap. IV, liv. I), mais est seulement le chemin m fait en latitude. D'ailleurs la construction géométrique est la même qu'à l'article 43 et suivans.

Les équations précédentes et celle (10) de la note IV, qui est

$$L''-L'=0{,}99844\,[m+965{,}32\sin.m\cos.(m+2\,L')]^{\text{secondes}}\ .\ .\ .\ .\ .\ (6),$$

serviront à résoudre sur l'ellipsoïde, les mêmes problèmes que nous avons résolus au chapitre V.

Mais, avant de faire des applications de ces formules, il est à propos de remarquer que les circonférences des grands cercles de la sphère inscrite étant à celle de l'équateur de la terre, comme $1:1+\omega$; il faut, pour réduire les différences des changemens en longitudes comptées sur l'équateur de la sphère inscrite, à celles de l'équateur de la terre sur lesquelles elles doivent être comptées, afin d'en conclure les vraies longitudes, diviser les premières par $1+\omega$, ou par $\frac{321}{320}$, en supposant que cette fraction représente le rapport du grand au petit axe de l'ellipsoïde. Mais, pour faciliter ces réductions, j'ai calculé la table III, par le moyen de laquelle il est très-aisé de convertir les arcs de l'équateur de la sphère inscrite en arcs de l'équateur terrestre, et réciproquement. Par exemple, soit demandée la valeur d'un arc de 37° 17′ 23″ de l'équateur de la sphère inscrite à l'ellipsoïde terrestre en parties de l'équateur de ce dernier. Je prends dans la table III les différences.

5′ 37″,5	qui répondent respectivement aux arcs de	30° 0′ 0″
1 18 ,75		7 0 0
1 ,875		0 10 0
1 ,3125		0 7 0
0 ,0625		0 0 20
0 ,009375		0 0 3
Somme. 6′ 59″,507375		

ensuite, additionnant ces différences partielles, j'ai la totale 6′ 59″,507375, laquelle, retranchée de 37° 17′ 23″, me donne pour la valeur de l'arc de grand cercle de la sphère inscrite en parties de degré de l'équateur terrestre, la quantité 37° 10′ 23″,492625.

2. Problème. *Connoissant le point de départ, c'est-à-dire sa latitude et sa longitude, l'air de vent qu'a couru le vaisseau, et le chemin qu'il a fait, ou les lieues de distance ; on demande la latitude et la longitude du point d'arrivée.*

Solution. L'équation (2), d'où l'on tire $m = \xi \cos. R$, ayant fait connoître le nombre de minutes courues en latitude, et substituant cet arc dans l'équation (6), on aura la différence des latitudes vraies de partance et d'arrivée, d'où l'on conclura cette dernière, puisqu'on connoît la première.

On aura la différence des latitudes croissantes $(Mr)'$ qui correspond à la différence des latitudes vraies de départ et d'arrivée par le moyen de la table II, et la substituant dans l'équation (4), on aura la différence r' des longitudes corrigées des mêmes points ; d'où l'on déduira, par le moyen de la table III, la différence des longitudes vraies, et par conséquent la longitude vraie du point d'arrivée.

Exemple. Étant parti de 49° 25' de latitude nord, et de 25° 6' de longitude occidentale, on a fait 43 lieues au S O $\frac{1}{4}$ S 5° 45' S du monde : on demande la latitude et la longitude du point d'arrivée.

Nous avons $R = 28°$ et $\xi = 43$ lieues $= 129'$. Cela posé, voici d'abord le calcul de m (éq. 2).

$\xi = 129'$ log. 2,1105897

$R = 28°$ log. cos. 9,9459349

Somme. 2,0565246, qui est le log. de 113',9, donc $m = 1° 53' 54''$

Calcul de la latitude d'arrivée (éq. 6).

$L' = 49° 25' 0''$

$2L' = 98\ 50\ 0$

$m = 1\ 53\ 54$ } log. sin. 8,5201704

Som. 100 43 54 log. cos. 9,2700022

965,32 log. 2,9846713 $m = 683,5'' +$

Somme. 0,7748439 log. de 6 — (*)

Diff. 6828" log. 3,8342935

0,99844 log. 9,9993220

Somme. 3,8336155

qui est le log. de $L'' - L' = 6817'' = 1° 53' 37''$ —

lat. de départ $L'' = 49\ 25\ 0$ +

Différence. 47 31 23

ce qui est la latitude nord du point d'arrivée du vaisseau.

(*) Je mets le signe —, parce que cos. 100° 43' 54" est négatif.

Calcul de la différence en longitude (éq. 4).

L″ = 49° 25′ 0″ lat. croiss. qui lui correspond (tab. II) 3404,1 +
L′ = 47 31 23 . . . . *idem*. . . . . 3233,19 —

Différence. 170,91 log. 2,2327675
R = 28°. . . . . log. tang. 9.7256744

Somme. 1,9584419

qui est le log. de r′ = 90′,87 = 1° 30′ 52″. Or, la table III donne

pour	1°	les quantités	11″,25
	30′		5 ,625
	50″		0 ,15625
	2″		0 ,00625
		Somme.	17″,03750

Retranchant cette quantité de la valeur de r′, on a pour la vraie différence en longitude 1° 30′ 35″, et ajoutant à cette quantité la longitude 25° 6′ du point de départ, on a la longitude demandée du point d'arrivée qui est 26° 36′ 35″ occidentale.

Nous ne nous arrêterons pas à résoudre les quatre autres problèmes que nous avons déjà résolus sur la sphère terrestre (art. 49 .... 53, chap. v, liv. I) et qui ne présentent point de difficulté sur l'ellipsoïde, d'après les formules que nous avons démontrées à l'art. 1, et le problème que nous venons de résoudre.

NOTE HUITIÈME.

Complément au chapitre I, livre II, sur notre Système planétaire.

1. Le *soleil* est un corps radieux de figure sensiblement sphérique, sur la surface duquel l'on a, par l'observation, découvert des taches qui changent de figures d'un jour à l'autre, et qui se représentent sous le même aspect et dans les mêmes positions respectives tous les 25 jours et demi; d'où il a été aisé de conclure que cet astre a un mouvement de rotation autour d'un de ses axes qui, en ayant égard au mouvement de translation de la terre autour du soleil, a été trouvé de 25 jours et 10 heures.

Le diamètre du soleil est de 142083 myriamètres. Sa densité n'est que le quart de celle de la terre.

L'observation a appris qu'il se fait à la surface du soleil d'énormes bouillonnemens, de vives effervescences; ce qui a fait présumer que cet astre est un très-gros globe enflammé, qui lance autour de lui des torrens de lumière dont la terre, quoiqu'à plus de quinze millions de myriamètres de distance de cet astre, éprouve des grands effets.

Mais, quoi qu'il en soit de la constitution physique du soleil, sur laquelle on ne peut, jusqu'à présent, avoir que des conjectures, il est actuellement prouvé que cet astre est placé au foyer commun des orbites elliptiques que décrivent autour de lui les onze planètes dont nous avons parlé au chapitre I, livre II, et que nous allons considérer ici avec un peu plus de détail.

2. *Mercure* fait sa révolution sidérale autour du soleil dans $87^j,96926$: sa figure est sensiblement sphérique; il a un mouvement de rotation autour d'un axe dont la durée n'est pas bien connue, parce que cet astre est trop près du soleil pour qu'on ait pu y découvrir des taches dont la différence des aspects et les retours aux mêmes positions ont servi à faire connoître la rotation de quelques planètes *supérieures* (*), et la durée de cette révolution. Mais on a reconnu celle de Mercure par l'observation suivie des variations des cornes de ses phases, et Schrœter a trouvé de cette manière que Mercure tournoit autour de son axe dans $1^j\ 0^h\ 5^{m}\ 28^s,32$.

Le demi-grand axe de l'orbite de Mercure, c'est-à-dire sa distance moyenne du soleil, est de 5917938 myriamètres. L'excentricité de l'orbite étoit de 1216213 myriamètres en 1806. Cette excentricité, ainsi que celle des orbites des autres planètes, est variable, et croît par siècle de $19^{myr.},9375$.

Le diamètre de cette planète est de 519 myriamètres.

L'on se sert souvent du signe ☿ pour représenter Mercure.

3. La seconde planète de notre système planétaire est *Vénus*, qui fait sa révolution sidérale autour du soleil dans $224^j,70082$. Sa figure est sensiblement sphérique; elle tourne autour d'un de ses axes, et la durée de sa rotation est de $23^h\ 21^m\ 7^s,2$. Le demi-grand axe de son orbite, c'est-à-dire sa distance moyenne au soleil, est de 11058215 myriamètres; l'excentricité de son orbite étoit de

(*) On appelle planètes supérieures celles qui sont plus éloignées du soleil que la terre, telles que Mars, Vesta, etc.

$75745^{myr.},9$ en 1806, et la diminution séculaire de l'excentricité est de $695^{myr.},6155$.

Le diamètre de cette planète est de 1223 myriamètres.

Vénus est la plus brillante et la plus belle de toutes les planètes que nous voyons dans le ciel, surtout lorsqu'elle est à environ 59° 40′ du soleil, c'est-à-dire 69 jours avant et après sa *conjonction inférieure* (*).

On représente cette planète par le caractère ♀.

4. Vient ensuite la *terre*, qui fait sa révolution sidérale autour du soleil dans $365^{j},2563835$, et dont la durée de la rotation autour de son axe est d'un jour. (*Voyez*, pour sa figure, la note I.)

Le demi-grand axe de l'orbite de la terre, c'est-à-dire sa moyenne distance au soleil, est de 15287873 myriamètres. L'excentricité de l'orbite terrestre est de 256071 myriamètres, et la diminution séculaire de cette excentricité est de $695^{myr.},102$.

Le diamètre de la terre est de 1274 myriamètres.

Le signe qui la représente dans les calculs astronomiques est celui ♁.

La terre a un satellite qu'on appelle *lune*, dont nous parlons particulièrement au chap. VII du liv. II, et qui se représente par le signe ☾.

5. Vient après *Mars*. Sa révolution sidérale autour du soleil se fait dans $686^{j},97962$. La figure de cette planète est sensiblement sphérique. La durée de sa rotation autour d'un axe incliné de 59° 41^{m} $49^{s},2$ sur le plan de l'écliptique est de 1^{j} 0^{h} 38^{m} $52^{s},4$.

Le demi-grand axe de son orbite, ou sa distance moyenne du soleil, est de 23294021 myriamètres. L'excentricité de son orbite étoit en 1806 de 2168406 myriamètres, et la variation séculaire de cette excentricité est de $2112^{myr.},42$.

Le diamètre de cette planète est de 663 myriamètres.

Mars paroît toujours rougeâtre et d'une lumière trouble.

Le caractère dont se servent les astronomes pour représenter cette planète est ♂.

(*) On appelle, pour les planètes inférieures, Mercure et Vénus, *conjonction inférieure*, la position de la planète, lorsqu'elle se trouve entre le soleil et la terre, le plus près possible de la ligne des centres de ces deux derniers globes; et l'on appelle *conjonction supérieure* de l'une de ces deux planètes, sa position en-delà du soleil, par rapport à la terre, lorsqu'elle est le plus près possible de la ligne des centres du soleil et de la terre.

6. La plus nouvelle planète connue est *Vesta ;* elle fait sa révolution autour du soleil dans 1335^j. Elle est visible à la vue simple, et paroît de la grosseur d'une étoile de *quatrième grandeur* (*). Le demi-grand axe de l'orbite de cette planète est de 36278123 myriamètres. Son excentricité est de 1425140 myriamètres. Le signe caractéristique de cette planète est ⚶.

7. La sixième planète de notre système planétaire est *Junon*, qui tourne autour du soleil dans 1591 jours; sa distance moyenne à ce dernier astre est de 40619979 myriamètres, et son excentricité est de 5836270 myriamètres.

Cette planète ne paroît dans le ciel que comme une étoile de huitième grandeur ; son signe caractéristique est ⚵.

8. Vient ensuite *Cérès*, qui fait sa révolution autour du soleil dans 1682^j; le demi-grand axe de son orbite est de 42282000 myriamètres, et l'excentricité de cette courbe est de 3200757 myriamètres.

Cette planète ne paroît dans le ciel que comme une étoile de six ou de septième grandeur; son signe est ⚳.

9. La planète *Pallas*, qui est encore une des nouvelles, et la septième dans notre système planétaire, fait sa révolution autour du soleil dans $1702^j\ 17^h$; le demi-grand axe de son orbite, ou sa distance moyenne du soleil, est de 42666000 myriamètres, et l'excentricité de son orbite est de 10493056 myriamètres.

La grandeur de cette planète n'est que celle d'une étoile de six ou septième grandeur; son signe est ⚴.

Au reste, ces quatre petites planètes ayant été découvertes depuis très-peu de temps, les élémens de leurs orbites ne sont pas encore bien connus.

10. *Jupiter*, neuvième planète de notre système, fait sa révolution sidérale autour du soleil, dans $4332^j,59631$. Sa figure est celle d'un sphéroïde aplati vers les pôles, et dont le rapport des deux axes est celui de 13 à 14. La durée de la rotation de cette planète autour de son petit axe, est de $9^h\ 56^m\ 9^s,6$.

Le demi-grand axe de son orbite, c'est-à-dire sa distance moyenne au soleil, est de 79511907 myriamètres. L'excentricité de son orbite est de

(*) On divise les étoiles en plusieurs grandeurs, suivant leur degré de lumière ou leur éclat. Les plus grandes et brillantes sont de première grandeur; viennent ensuite celles de seconde grandeur; et ainsi de suite, en diminuant, jusqu'à celles de septième et huitième grandeurs qui ne se voient plus que par le secours d'un bon télescope.

3828670 myriamètres, et l'augmentation séculaire de cette excentricité est de $10673^{myr.},28$.

Le diamètre moyen de Jupiter est de 13843 myriamètres.

On remarque, sur la surface de cette planète, plusieurs bandes obscures, dont le nombre est indéterminé.

Jupiter a quatre satellites, qui tournent autour de lui d'occident en orient, ainsi que nous l'avons déjà dit au chap. I, liv. II, art. 69.

Le signe caractéristique de cette planète est ♃.

11. Vient après *Saturne*, qui fait une révolution entière autour du soleil, en décrivant une orbite elliptique, dont le demi-grand axe est de 145836700 myriamètres. La durée de cette révolution est de $10758^{j},96984$. La figure de cette planète est celle d'un ellipsoïde de révolution, dont les deux axes sont dans le rapport de 11 à 10. Saturne a aussi un mouvement de rotation autour de son petit axe, et la durée de cette rotation est de $10^{h}\ 16^{m}\ 19^{s}$. Le grand aplatissement de cette planète étoit un indice sûr que la durée de la rotation devoit être courte, et M. de Laplace avoit annoncé d'avance cette rotation, d'après la simple considération que nous venons d'exposer. L'excentricité de l'orbite de Saturne est de $8177956^{myr.},728$, et sa diminution séculaire est de $38250^{myr.},1$.

Le diamètre moyen de cette planète est de 12723 myriamètres.

Saturne a peu d'éclat, et sa couleur est plombée. Mais de tous les astres que nous connoissons, c'est celui qui est le plus brillamment entouré : car il est premièrement environné d'un anneau mince, dont la largeur est un peu moindre que le tiers du diamètre de la planète, et dont la distance à la surface de cette dernière, est à peu près égale au tiers du diamètre de Saturne. La surface de l'anneau n'est pas continue; une bande noire qui lui est concentrique, la sépare en deux parties qui paroissent former deux anneaux distincts.

Cet anneau tourne autour d'un axe perpendiculaire à son plan, et passant par le centre de Saturne, d'occident en orient; la durée de cette rotation est de $10^{h}\ 29^{m}\ 17^{s}$ (*).

(*) La durée de cette rotation est assez conforme à la troisième loi de Képler : *les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des moyennes distances.* En effet, puisque l'intervalle compris entre l'anneau et la surface de Saturne est sensiblement égal au $\frac{2}{3}$ du rayon de la planète que je représente par 1, et que la largeur de cet anneau est aussi, sensiblement $=\frac{2}{3}$; on aura la distance de la circonférence moyenne entre les deux qui limitent l'anneau, au centre de la

Les différentes positions de Saturne relativement au soleil et à la terre, nous font paroître l'anneau sous des aspects bien différens entr'eux. Quelquefois nous le voyons sous la forme d'une ellipse. D'autre fois l'ouverture de cette courbe se resserrant peu à peu, nous finissons par ne plus voir que ses extrémités dans le sens du grand axe, ce qui nous fait voir Saturne comme étant au milieu de deux petits corps de même éclat que lui, et qui semblent lui adhérer. D'autrefois nous cessons entièrement de voir l'anneau, et alors Saturne nous paroît rond comme les autres planètes.

La dernière disparition de l'anneau de Saturne a eu lieu au mois de juin 1803. Généralement nous cessons de voir l'anneau de Saturne, 1.° lorsque le centre de la terre est dans le plan de l'anneau, puisqu'alors ce dernier ne nous présente que son épaisseur qui, étant très-petite, ne peut être vue (*). A mesure que le centre de la terre s'élève au-dessus du plan de l'anneau, alors nous pouvons voir une partie de sa surface, et lorsque le centre de la terre est à sa plus grande élévation ou abaissement relativement à ce plan, nous voyons l'anneau dans sa plus grande ouverture; mais seulement sous la forme d'une ellipse; car il est incliné de 31° 19′ 12″ sur le plan de l'écliptique, et pour le voir sous sa vraie forme, c'est-à-dire rond, il faudroit qu'il fût perpendiculaire au plan de l'écliptique.

2.° L'anneau disparoît encore, lorsque le centre du soleil est dans le plan de l'anneau, puisqu'alors la seule épaisseur est éclairée, et non la largeur.

3.° Enfin l'anneau est invisible, tant que le plan de l'anneau prolongé passe entre le soleil et la terre; puisqu'alors nous ne voyons que sa partie obscure.

Saturne est encore accompagné de sept satellites qui tournent presque circulairement autour de lui. Les six premières se meuvent à fort peu près dans le plan de l'anneau : le septième approche davantage du plan de l'écliptique. Le signe caractéristique de cette planète est ♄.

---

planète qui sera $= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2$. Or, si l'on prend pour terme de comparaison le premier satellite de Saturne, dont la distance moyenne au centre de la planète est 3,08, et dont la durée de la révolution est $22^h 37^m 28^s,7$; on aura, par la loi énoncée précédemment, le temps de la révolution $= 22^h\ 37^m\ 28^s,7 \times \sqrt{\frac{8}{(3,08)^3}} = 11^h 50^m 15^s$.

(*) Cependant Herschel, célèbre observateur, et à qui l'on doit la découverte de la première des planètes modernes, n'a pas cessé de voir l'anneau lorsqu'il étoit invisible à tous les autres observateurs dans une des dernières disparitions.

12. Enfin la onzième et dernière planète de notre système est *Uranus*, dont la distance moyenne au soleil est de 291720130 myriamètres. L'excentricité de son orbe est de 13614186 myriamètres, et la diminution séculaire de cette excentricité est de $7651^{myr.},24$. La durée de sa révolution autour du soleil est de $30688^{j},71269$.

Cette planète est trop loin de nous pour que nous puissions découvrir ses taches, et par conséquent déterminer le temps de sa rotation autour de son axe. Le diamètre d'Uranus est de 5522 myriamètres, et son signe caractéristique est ♅.

Cette planète a six satellites.

13. D'après la définition que nous avons donnée des nœuds à l'article 72 du texte, il suit 1.° que si l'une des deux planètes inférieures, Mercure et Vénus, se trouve à l'un de ses nœuds en même temps qu'elle est en conjonction inférieure, c'est-à-dire entre le soleil et la terre, elle passera sur le soleil. Ces passages sont relativement à Vénus et Mercure, un phénomène très-remarquable et très-important pour l'astronomie; on les voit comme une tache noire qui traverse dans l'espace de quelques heures le *disque* (*) du soleil.

Il y a eu, depuis 1615 jusqu'à nos jours, neuf passages de Mercure dans le nœud descendant, et dix-neuf passages de la même planète dans le nœud ascendant. Il y aura encore, d'ici à la fin de ce siècle, quatre passages de Mercure sur le soleil dans le nœud descendant qui seront en 1832, 1845, 1870 et 1891, et huit passages dans le nœud ascendant qui auront lieu dans les années 1815, 1822, 1835, 1848, 1861, 1868 et 1894.

De même, il y a eu depuis 1615, jusqu'à ce moment, quatre passages de Vénus sur le soleil; il n'y en aura que deux d'ici à la fin de ce siècle, qui seront en 1874 et 1882.

Les passages de la lune sur le soleil sont beaucoup plus fréquens, et s'appellent *éclipses de soleil.*

2.° Si l'une des deux planètes inférieures est en conjonction supérieure (c'est-à-dire si le soleil est placé entr'elle et la terre), dans le moment où elle passe à l'un de ses deux nœuds, elle doit être entièrement cachée derrière le soleil, et par conséquent invisible.

(*) On appelle *disque* d'un astre la surface de la figure circulaire sous laquelle nous paroît cet astre. La largeur du disque, ou le diamètre apparent du soleil et de la lune, se divise en douze parties égales, qu'on appelle *doigts*.

Mais si la planète a dans ses deux *syzygies* (*) une latitude qui excède le vrai disque du soleil, elle est visible; elle paroît ronde dans la conjonction supérieure, parce qu'alors tout son disque est éclairé, et on ne la voit que sous la forme d'un croissant dans les conjonctions inférieures.

14. Quant à la lune, il est clair que si elle passe à un de ses nœuds dans le moment où elle est en *opposition*, c'est-à-dire lorsque la terre se trouve entre elle et le soleil, le premier de ces deux corps interceptera la lumière du second, et par conséquent la lune nous paroîtra obscure. Ce phénomène s'appelle *éclipse de lune*, et se modifie suivant certaines circonstances qui dépendent des distances respectives des trois corps, le soleil, la lune et la terre, ainsi que pour chaque observateur du lieu de la terre qu'il habite; ce qui tient à une cause que nous expliquerons bientôt. Des modifications semblables ont lieu pour les éclipses de soleil.

Les planètes supérieures, Mars, Vesta, Junon, Cérès, Pallas, Jupiter, Saturne et Uranus, nous sont également invisibles dans leurs conjonctions, soit qu'elles passent à un de leurs nœuds dans cet instant, cas dans lequel elles sont cachées derrière le soleil; soit qu'elles passent à un autre point de leurs orbites respectives assez éloigné de chacun des nœuds, pour que les rayons visuels qui, partant de l'œil de l'observateur, vont à la planète, ne soient pas interceptés par le soleil, parce qu'alors, quoiqu'elles nous présentent l'hémisphère tout éclairé, nous ne pouvons les distinguer au travers les rayons de lumière du soleil dans lesquels elles sont plongées.

Lorsque les planètes passent à un de leurs nœuds à l'instant de l'opposition, il y auroit éclipse de ces planètes si elles étoient plus près de nous; mais à cause de la grande distance où elles sont de la terre, elles passent hors du cône d'ombre de cette dernière, qui se projette dans l'espace du côté opposé au soleil.

Fig. 9. 15. Le soleil étant beaucoup plus grand que la terre, il est évident que les rayons de lumière, tels que I L M, B C M, etc., qui rasent la surface de la terre, servent de limite à l'ombre projetée en arrière de cette planète; mais ces rayons vont en convergeant jusqu'à leur rencontre en M où ils se coupent, et vont ensuite en divergeant. Donc, l'ombre de la terre est un cône circulaire droit, ayant pour base le cercle du diamètre L C, et pour triangle générateur celui M L C. Déterminons maintenant par une formule analytique, la hauteur PM de ce cône.

Soit S T la distance des centres S et T du soleil et de la terre, que nous re-

(*) On appelle *syzygies* les deux conjonctions supérieures et inférieures.

présenterons par la lettre D; AK et FE les diamètres des deux astres perpendiculaires à la ligne des centres ST. Menons des points S et T les rayons SB et TC aux points de contact B et C. Joignons les points de tangence B et I par la corde BI, ainsi que ceux C et L par la soustendante LC. Enfin, menons TN perpendiculaire à SB, et par conséquent parallèle à BCM. Cela posé; représentant par R le rayon du soleil, par r celui de la planète, et par T l'angle $STN = ASB = ETC$, on aura le triangle rectangle SNT, qui donnera l'équation $\sin. T = \frac{SN}{ST} = \frac{R-r}{D}$. Mais $BO = R \cos. AB = R \cos. T$, et $PC = r \cos. T$; de plus, $OS = R \sin. T$ et $TP = r \sin. T$, ce qui donne $OP (= ST - OS + TP) = D - (R-r) \sin. T = D - \frac{(R-r)^2}{D} = \frac{[D+R-r][D-(R-r)]}{D}$. Donc, représentant par x la hauteur MP du cône d'ombre, les triangles semblables MPC, MOB donneront la proportion $MP(x) : MO \left(\frac{[D+R-r][D-(R-r)]}{D} + x\right) :: PC (r \cos. T) : OB (R \cos. T) :: r : R$, d'où l'on tire $x = \frac{r[D+(R-r)][D-(R-r)]}{(R-r)D}$, ou Fig. 9.

$$x = \frac{rD}{R-r} - \frac{r(R-r)}{D} \ldots\ldots (M),$$

formule qui nous apprend que plus la distance D des centres est grande, plus aussi la hauteur x du cône d'ombre est grande. Voyons, d'après cela, à quelle distance les planètes supérieures devroient passer de la terre, pour que se trouvant en opposition en même temps qu'elles sont dans le plan de l'écliptique, elles pussent être éclipsées centralement par la terre.

Mars étant de toutes les planètes supérieures, celle qui est la plus voisine de la terre, c'est elle que nous allons considérer dans la position la plus favorable à l'eclipse; ce à quoi nous parviendrons en plaçant, 1.° la terre à son *aphélie* (on appelle ainsi le point de l'orbite d'une planète, où cette dernière est la plus éloignée possible du soleil: ce point est l'extrémité du grand axe de l'orbite elliptique le plus éloigné du foyer où est le centre du soleil) dans le moment de l'opposition, parce qu'alors, D étant le plus grand possible, on aura aussi la hauteur x du cône d'ombre qui sera la plus grande possible: d'ailleurs, cela rapprochera d'autant la terre de Mars; 2.° en plaçant le nœud de l'orbite de Mars, par où nous supposons que passe cette planète au moment de l'opposition, à son *périhélie* (on appelle ainsi le point de l'orbite opposé à celui de l'aphélie, c'est-à-dire le point de l'orbite où la planète est le plus près possible du soleil, et par conséquent l'extrémité du grand axe de l'orbite le plus voisin du foyer

Fig. 9. qu'occupe le centre du soleil), ce qui rapproche d'autant Mars de la terre. Or, nous avons vu, à l'art. 4 de cette note, que le demi-axe de l'orbite terrestre est 15287873 myriamètres, et que l'excentricité de cet orbite est $=256071$ myriamètres; donc, la plus grande valeur de D est $15287873+256071=$ 15543944 myriamètres. De plus, nous avons $R=71041^{myr},5$ (art. 1 de cette note) et $r=637$ myriamètres (art. 4 de cette note). Substituant ces valeurs numériques dans l'équation (M), on trouve, pour la plus grande valeur de la hauteur x du cône d'ombre, la quantité 140634 myriamètres, et lui ajoutant $TP=r\sin.T=\frac{r(R-r)}{D}=2^{myr},8852$, ou plus simplement trois myriamètres, on aura la plus grande distance du sommet M du cône d'ombre au centre T de la terre $=140637$ myriamètres. Mais le demi-grand axe de l'orbite de Mars étant de 23294021 myriamètres, et son excentricité étant de 2168406 myriamètres (art. 5 de cette note), on aura la plus petite distance de Mars au soleil $=21125615$ myriamètres; et, puisque dans l'opposition de Mars dans son nœud, la même droite passe par les centres du soleil, de la terre et de Mars, on aura la distance des centres de ces deux derniers astres, qui sera de $21125615-15543944=$ 5581671 myriamètres, et qui, quoique la plus petite possible, est cependant près de 39 fois plus grande que la plus grande distance MT du sommet du cône d'ombre de la terre au centre de la planète. Donc la planète Mars, et à plus forte raison les autres planètes supérieures, ne peuvent être éclipsées par la terre.

NOTE NEUVIÈME.

Du calcul des anomalies.

1. Ainsi que nous l'avons dit à l'art. 93 du texte, on appelle généralement *anomalie* la distance d'une planète à son aphélie, et on distingue trois sortes d'anomalies, la vraie, l'excentrique et la moyenne.

Fig. 10. Soit f le centre des mouvemens des planètes, c'est-à-dire le point de l'espace

qu'occupe le centre du soleil, et par conséquent le foyer commun à toutes les orbites elliptiques des planètes, abp le demi-orbite d'une planète quelconque, a son aphélie, p son périhélie, et par conséquent ap le grand axe de l'orbite. Supposons que la planète parcourt son orbite dans le sens abp, ce qui suppose l'observateur tourné vers le sud, puisque le mouvement des planètes s'effectue d'occident en orient. Soit b le point de son orbite où se trouve la planète dans un instant quelconque; on aura, d'après les définitions que nous avons données des anomalies (art. 93 du texte), l'angle afb qui sera l'anomalie vraie, l'angle ace qui sera l'anomalie excentrique, et le rayon ch du cercle circonscrit, décrivant uniformément ce cercle dans le temps que la planète parcourt sa trajectoire entière, on aura l'angle ach, qui sera l'anomalie moyenne. Mais on démontre en mécanique que dans toute trajectoire parcourue par l'effet d'une force de projection et d'une force d'attraction vers un point pris dans le plan de la courbe, les aires décrites par les rayons vecteurs de la courbe qui aboutissent au mobile, sont proportionnelles aux temps employés à les décrire; donc, par rapport aux planètes, telles que celle que nous considérons, l'anomalie moyenne ach sera égale à l'aire du secteur $afba$. Fig. 10.

2. Représentant par b le demi-petit axe ck de l'orbite de la planète, et faisant le demi-axe ac de cette courbe $=1$; on aura la proportion $bd:ed::b:1$, ainsi que c'est démontré dans la théorie des courbes du second degré. Mais les triangles rectilignes rectangles bdf, edf ayant même base fd ont leurs aires dans le rapport de leurs hauteurs db, de; donc, puisque ces deux droites sont dans le rapport du demi-petit axe b au demi-grand axe 1, on aura la proportion aire fdb : aire $fde::b:1\ldots\ldots(a)$. Mais y et y' étant respectivement les ordonnées correspondantes de l'ellipse et du cercle circonscrit, on a complètement les expressions des aires correspondantes dab, dae qui seront $\int y\,dx$ et $\int y'dx$; ou, substituant les valeurs respectives de y et y' données par les équations de l'ellipse et du cercle qui lui est circonscrit, les aires des demi-segmens en question dab et dae seront $b\int dx\sqrt{2x-ax}$ et $\int dx\sqrt{2x-xx}$, c'est-à-dire, qu'elles seront dans le rapport de b à 1, donc (prop. a), on aura aire fdb : aire fde :: aire dab : aire dae, d'où aire fdb + aire dab : aire fde + aire dae :: aire fdb : aire $fde::b:1$; ou aire du secteur fab : aire du secteur fae :: $b:1\ldots(b)$.

Or, les aires des secteurs tels que afb parcourus par le rayon vecteur fb étant proportionnelles aux temps, on aura la proportion aire de la trajectoire entière : aire du secteur afb :: le temps employé par la planète à faire sa révolution en-

Fig. 10. tière : au temps employé par la planète pour parcourir l'arc ab de sa trajectoire. De même, le rayon ch du cercle circonscrit faisant uniformément sa révolution autour du centre c dans le même temps que la planète parcourt son orbite entière, et le même rayon ch étant parvenu par un mouvement uniforme en h, dans le temps que la planète est parvenue au point b de son orbite, on aura la proportion, l'aire du cercle circonscrit est à l'aire du secteur ach, comme le temps employé par la planète à faire sa révolution entière est au temps employé par la planète pour parcourir l'arc ab de son orbite. Donc, ces deux dernières proportions, ayant le second rapport de commun, on aura celle, aire de la trajectoire entière est à l'aire du secteur afb, comme l'aire du cercle circonscrit est à l'aire du secteur ach; ou, faisant changer de place aux deux moyens, et faisant attention que l'aire de la trajectoire elliptique est à celle du cercle circonscrit comme b est à 1; on aura la proportion $b : 1$ :: aire du secteur afb : aire du secteur ach; et à cause que cette proportion et celle (b) ont le rapport commun $b : 1$, on aura aire du secteur afb : aire du secteur afe :: aire du secteur afb : aire du secteur ach, d'où

$$\text{Aire du secteur } afe = \text{aire du secteur } ach \ldots\ldots (e).$$

Donc généralement *l'aire du secteur circulaire, compris entre le grand axe de l'orbite de la planète et la droite qui joint le centre du soleil avec le point du cercle circonscrit où aboutit l'ordonnée de la planète, est égale à l'aire du secteur circulaire compris entre les deux rayons du cercle circonscrit qui forment l'angle de l'anomalie moyenne.*

5. Soit le rayon vecteur fm infiniment voisin de celui fb; on aura l'aire du secteur infiniment petit $mfb = d$ (aire bfa). Mais si du point f comme centre, et d'un rayon égal au rayon vecteur fm, on décrit l'arc de cercle infiniment petit mq, on aura l'aire du secteur infiniment petit mfq, qui sera égale $\frac{(mf)^2 \times mq}{2} = \frac{(bf)^2 \times mq}{2}$: or, les aires du secteur elliptique mfb et du secteur circulaire mfq ne différant entr'elles que de la quantité infiniment petite du second ordre mbq, et les arcs elliptique mb et circulaire mq ne différant aussi entr'eux que d'une quantité infiniment petite du second ordre, on aura aire mfb ou d (aire bfa) $= \frac{(bf)^2 mb}{2}$. Mais nous avons démontré, dans l'article précédent, que aire bfa : aire efa :: $b : 1$; d'où b aire $efa =$ aire bfa; donc bd(aire efa) $=$ d(aire bfa) $= \frac{(bf)^2 bm}{2}$; et par conséquent (éq. c) bd(aire ach) ou $\frac{bd\ ah\ (hc)^2}{2}$

ou $\frac{bd(ah)}{2}$ (puisque $hc=1$) $=\frac{(bf)^2 mb}{2}=\frac{(bf)^2 d(ab)}{2}$. Donc, représentant par A l'anomalie moyenne ah, par α l'anomalie vraie ab et par v le rayon vecteur fb, on aura l'équation

$$bd\mathrm{A}=v^2 d\alpha \ldots\ldots (1).$$

Mais, ainsi qu'on le démontre dans la théorie des conrbes du second degré, on a le rayon vecteur fb, on $v=1+ex$, en représentant par e l'excentricité cf, et par x l'abscisse cd: or, le triangle rectiligne rectangle bdf donne la proportion $bf : 1 :: fd : \cos. bfd$; ou $v : 1 :: e+x : \cos. \alpha$; donc $x=v\cos.\alpha-e$; et, substituant cette valeur de x dans celle de $v(=1+ex)$, on aura $v=1+ev\cos.\alpha-e^2$; d'où $v=\frac{1-e^2}{1-e\cos.\alpha}$, ou

$$v=\frac{b^2}{1-e\cos.\alpha} \ldots\ldots (2).$$

Substituant cette valenr de v dans l'équation (1), et divisant par b, il vient

$$d\mathrm{A}=\frac{b^3 d\alpha}{(1-e\cos.\alpha)^2} \ldots\ldots (3).$$

Et intégrant cette équation différentielle, on a l'équation finie.

$$\mathrm{A}=\frac{eb\sin.\alpha}{1-e\cos.\alpha}-2\,\mathrm{arc}(\mathrm{tang.}=\frac{b}{1+e}\cot.\tfrac{1}{2}\alpha)+\mathrm{const.}$$

Mais, lorsque $\mathrm{A}=0$, on a $\alpha=0$; d'où $\cot.\frac{1}{2}\alpha=\infty$, et arc $(\mathrm{tang.}=\frac{b}{1+e}\cot.\frac{1}{2}\alpha)=\frac{\pi}{2}$, en représentant par π le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, ou la longueur absolue de la demi-circonférence du cercle dont le rayon est l'unité; donc $\mathrm{const.}=\pi$, ce qui donne complètement

$$\mathrm{A}=\frac{eb\sin.\alpha}{1-e\cos.\alpha}+\pi-2\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang.}=\frac{b}{1+e}\cot.\tfrac{1}{2}\alpha) \ldots\ldots (4).$$

Il seroit à propos de multiplier le second membre de cette équation par 63°,661977 (nouv. div. du cercle), qui est la valeur graduelle de l'arc de la circonférence du cercle qui est égal au rayon, afin d'avoir la valeur graduelle de l'anomalie moyenne A.

La formule (4) seroit très-commode pour trouver l'anomalie moyenne par le

moyen de l'anomalie vraie; mais, à cause que l'anomalie moyenne peut se trouver directement sans le secours de la vraie, qui ne peut se déduire de son rapport avec le temps, parce que ce rapport est variable; il est bien plus essentiel de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire le suivant.

4. Problème. *Étant donnée l'anomalie moyenne d'une planète, trouver la vraie.*

Solution. Reprenons l'équation (3) que nous mettons sous la forme

$$d\alpha = (1 - e\cos.\alpha)^2 (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} dA \;.\;.\;.\;.\;.\; (Q),$$

et nous contentant de pousser le calcul jusqu'à la troisième puissance de e inclusivement, ce qui est suffisant, surtout pour la terre, dont l'excentricité n'est que 0,01680207, nous aurons

$$d\alpha = (1 - e\cos.\alpha)^2 (1 + \tfrac{3}{2}e^2) dA \;.\;.\;.\;.\;.\; (A).$$

Différenciant cette équation en prenant dA constante, puisque l'anomalie moyenne varie uniformément, et substituant à la place de $d\alpha$ sa valeur donnée par l'équation (A), on aura

$$dd\alpha = 2e\sin.\alpha (1 - e\cos.\alpha)^3 (1 + 3e^2) dA^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (B).$$

Différenciant encore cette dernière équation, et substituant de même dans le second membre la valeur de $d\alpha$, on aura

$$d^3\alpha = [6(1 - e\cos.\alpha)^4 e^2 \sin.^2\alpha + 2e\cos.\alpha (1 - e\cos.\alpha)^5] dA^3 (1 + \tfrac{3}{2}e^2).$$

Développant et effectuant les multiplications, il vient

$$d^3\alpha = [6e^2 - 15e^3\cos.\alpha + 2e\cos.\alpha - 16e^2\cos.^2\alpha + 44e^3\cos.^3\alpha] dA^3.$$

Mais $16e^2\cos.^2\alpha = 8e^2\cos.2\alpha + 8e^2$, et $44e^3\cos.^3\alpha = 11e^3\cos.3\alpha + 33e^3\cos.\alpha$.

Donc, toutes réductions faites, on aura

$$d^3\alpha = [-2e^2 + (18e^3 + 2e)\cos.\alpha - 8e^2\cos.2\alpha + 11e^3\cos.3\alpha] dA^3 \;.\;.\;.\;.\; (C).$$

Différenciant cette dernière équation, il vient

$$d^4\alpha = [-(18e^3 + 2e)\sin.\alpha + 16e^2\sin.2\alpha - 33e^3\sin.3\alpha] dA^3 d\alpha.$$

Mais, effectuant les développemens et multiplications indiquées dans le second membre de l'équation (A), on a

$$d\alpha=[1+2e^2-(2e+3e^3)\cos.\alpha+\tfrac{1}{2}e^2\cos.2\alpha]\,dA\;.\;.\;.\;.\;.\;(D);$$

et substituant cette valeur de $d\alpha$ dans celle $d^4\alpha$, il vient l'équation

$$d^4\alpha=[2e^2-(78e^3+2e)\cos.\alpha+38e^2\cos.2\alpha-185e^3\cos.3\alpha]\,dA^4\ldots\;.\;(E).$$

Supposons maintenant qu'on a

$$\alpha=A+m\sin.A+p\sin.2A+q\sin.3A\;.\;.\;.\;.\;.\;(F),$$

m, p et q étant des coefficiens indéterminés. Différenciant cinq fois de suite cette dernière équation, on a

$$\left.\begin{aligned}d\alpha&=\;\;[1+m\cos.A+2p\cos.2A+3q\cos.3A]\,dA\\ d^2\alpha&=-[m\sin.A+4p\sin.2A+9q\sin.3A]\,dA^2\\ d^3\alpha&=-[m\cos.A+8p\cos.2A+27q\cos.3A]\,dA^3\\ d^4\alpha&=\;\;[m\sin.A+16p\sin.2A+81q\sin.3A]\,dA^4\\ d^5\alpha&=\;\;[m\cos.A+32p\cos.2A+243q\cos.3A]\,dA^5\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(H).$$

Or, nous observerons que, lorsque $\alpha=0$, ce qui donne $A=0$, les équations (D), (C), (E) se réduisent à celles

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dA}&=1-2e+\tfrac{5}{2}e^2-3e^3\\ \frac{d^3\alpha}{dA^3}&=2e-10e^2+29e^3\\ \frac{d^5\alpha}{dA^5}&=-2e+40e^2-263e^3\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(I);$$

et les première, troisième et cinquième équations du groupe (H) se réduisent, dans le même cas de $\alpha=0$, aux trois suivantes

$$\frac{d\alpha}{dA}=1+m+2p+3q,$$
$$\frac{d^3\alpha}{dA^3}=-m-8p-27q,$$
$$\frac{d^5\alpha}{dA^5}=m+32p+243q.$$

Égalant respectivement ces valeurs avec celles du groupe (I), on a les trois équations

$$\left.\begin{aligned}m+2p+3q&=-2e+\tfrac{5}{2}e^2-3e^3\\ m+8p+27q&=-2e+10e^2-29e^3\\ m+32p+243q&=-2e+40e^2-263e^3\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(K),$$

Retranchant la première équation de la seconde, et la seconde de la troisième, on a les deux suivantes

$$\left.\begin{array}{l} 6p+24q=\frac{15}{2}e^2-26e^3 \\ 12p+108q=15e^2-117e^3 \end{array}\right\} \ldots\ldots (L).$$

De la dernière de ces deux équations retranchant le double de celle qui la précède, il viendra $60q=-65e^3$, d'où

$$q=-\tfrac{13}{12}e^3.$$

Substituant cette valeur dans la première des équations (L); on a, toutes réductions faites,

$$p=\tfrac{5}{4}e^2;$$

Et substituant ces valeurs de p et q dans la première équation du groupe (K), il vient $m+\frac{5}{2}e^2-\frac{13}{4}e^3=-2e+\frac{5}{2}e^2-3e^3$, d'où

$$m=-2e+\tfrac{1}{4}e^3.$$

Enfin ces valeurs de m, p et q étant substituées dans l'équation (F), on aura, avec une approximation suffisante pour remplir l'objet que nous nous proposons,

$$\alpha=\text{A}-(2e-\tfrac{1}{4}e^3)\sin.\text{A}+\tfrac{5}{4}e^2\sin.2\text{A}-\tfrac{13}{12}e^3\sin.3\text{A}\ \ldots\ldots (5).$$

Substituant la valeur numérique 0,01680207 de l'excentricité e de la terre (*), ou du soleil, si, pour plus de simplicité, nous rapportons les mouvemens vrais de translation de la terre au soleil, ce que nous ferons toujours, nous aurons

$$\alpha=\text{A}-[0{,}3360295\sin.\text{A}-0{,}0003529\sin.2\text{A}+0{,}0000515\sin.3\text{A}]63{,}661977\ldots\ldots(6),$$

équation dans laquelle nous avons multiplié la série renfermée entre parenthèses, par la valeur graduelle de l'arc de cercle égal au rayon, afin d'avoir la valeur graduelle de l'anomalie vraie α,

5. On peut encore trouver la valeur de l'anomalie vraie en fonctions de la moyenne par le moyen de la formule (7), que nous allons démontrer.

Substituant la valeur de α (form. 5) dans le second membre de l'équation $\cos.\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2}+$ etc., on aura

(*) Cette excentricité qui varie, est, à très-peu près, ce que nous la marquons ici dans le moment où nous écrivons ceci.

$$\cos.\alpha = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-A^2}{2} \\ \frac{+A^4}{2.3.4} \\ \frac{-A^6}{2.3.4.5.6} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}(1 - 2e^2\sin.^2 A + \tfrac{5}{3}e^3\sin.A\sin.2A) + \left\{\begin{array}{c} A \\ \frac{-A^3}{2.3} \\ \frac{+A^5}{2.3.4.5} \\ -\text{etc.} \end{array}\right\}(2e\sin.A - \tfrac{5}{4}e^2\sin.2A$$

$$- \tfrac{1}{4}e^3\sin.A + \tfrac{13}{12}e^3\sin.3A - \tfrac{4}{3}e^3\sin.^3 A).$$

Mais la première série verticale est l'expression de cos. A, et la seconde est celle de sin. A ; donc

$$\cos.\alpha = \cos.A - 2e^2\sin.^2 A\cos.A + \tfrac{5}{8}e^3\sin.A\sin.2A\cos.A + 2e\sin.^2 A - \tfrac{5}{4}e^2\sin.2A\sin.A - \tfrac{1}{4}e^3\sin.^2 A + \tfrac{13}{12}e^3\sin.3A\sin.A - \tfrac{4}{3}e^3\sin.^4 A;$$

ou réduisant en puissances des cosinus, on aura

$$\cos.\alpha = 2e - \tfrac{8}{3}e^3 + (1 - \tfrac{8}{3}e^2)\cos.A - 2(e - \tfrac{20}{3}e^3)\cos.^2 A + \tfrac{9}{2}e^2\cos.^3 A - \tfrac{42}{3}e^3\cos.^4 A\ldots..\ (7);$$

et pour plus de simplicité, mettant à la place des puissances des cosinus, les expressions de ces quantités en fonctions des cosinus des arcs multiples, il viendra

$$\cos.\alpha = e + (1 - \tfrac{9}{8}e^2)\cos.A - (e - \tfrac{4}{3}e^3)\cos.2A + \tfrac{9}{8}e^2\cos.3A - \tfrac{4}{3}e^3\cos.4A\ldots..\ (8).$$

Il est aisé de voir que ces équations (7) et (8) se réduisent à $\cos.\alpha = 1$, ou $\alpha = 0$ lorsque $A = 0$, ainsi que cela doit être.

6. L'expression de sin. α devant bientôt nous être utile pour trouver la valeur de l'anomalie excentrique en fonctions de la moyenne, nous allons, parmi plusieurs moyens qui se présentent à nous pour déduire la valeur de sin. α des équations précédentes, choisir le suivant qui nous paroît le plus simple.

Différenciant l'équation (8), l'on a

$$\sin.\alpha\, d\alpha = [(1 - \tfrac{9}{8}e^2)\sin.A - 2(e - \tfrac{4}{3}e^3)\sin.2A + \tfrac{27}{8}e^2\sin.3A - \tfrac{16}{3}e^3 \times \sin.4A]\,dA;$$

et différenciant l'équation (5), il vient

$$d\alpha = [1 - (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\cos.A + \tfrac{5}{2}e^2\cos.2A - \tfrac{13}{4}e^3\cos.3A]\,dA.$$

Divisant la première de ces deux équations différentielles par la seconde, en ne poussant le calcul que jusqu'à la troisième puissance de e, l'on a, toutes réductions faites,

$$\sin.\alpha = \sin.A\left[1 - 2e^2 - \left(2e - \tfrac{23}{3}e^3\right)\cos.A + \tfrac{9}{2}e^2\cos.^2A - \tfrac{32}{3}e^3\cos.^3A\right] \ldots\ldots (9);$$

ou plus simplement,

$$\sin.\alpha = \sin.A\left[1 + \tfrac{1}{4}e^2 - \left(2e + \tfrac{1}{3}e^3\right)\cos.A + \tfrac{9}{4}e^2\cos.2A - \tfrac{8}{3}e^3\cos.3A\right] \ldots\ldots (10).$$

Divisant l'équation (10) par celle (8), ensuite les multipliant l'une par l'autre, on auroit par ces deux opérations respectives, l'expression de la tangente de l'anomalie vraie, et le sinus du double de cet arc. Mais ces calculs que j'ai faits, m'ont donné des formules plus compliquées que les précédentes.

7. La formule (8), qui peut déjà être regardée comme préférable dans beaucoup d'occasions à celle (5) déjà connue, pour calculer l'anomalie vraie en fonctions de la moyenne, va encore nous procurer l'avantage de trouver d'une manière très-simple l'expression du rayon vecteur en fonction de l'excentricité et des cosinus des multiples de l'anomalie moyenne. En effet, développant l'équation (2), on a

$$v = (1 - e^2)(1 + e\cos.\alpha + e^2\cos.^2\alpha + e^3\cos.^3\alpha + \text{etc.}) \ldots . (\omega),$$

et substituant dans cette équation la valeur de $\cos.\alpha$ (éq. 8), l'on a, toutes réductions faites,

$$v = 1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \left(e - \tfrac{3}{8}e^3\right)\cos.A - \tfrac{1}{2}e^2\cos.2A + \tfrac{3}{8}e^3\cos.3A \ldots . (11),$$

formule déjà connue, et qui est poussée jusqu'à la dixième puissance de l'excentricité e dans le discours préliminaire des grandes tables du soleil et de la lune, mais qui, à ma connoissance, n'avoit jamais été trouvée d'une manière aussi simple.

8. Passons enfin à la recherche de la valeur de l'anomalie excentrique que nous représenterons par X.

Faisant, comme précédemment le rayon du cercle $aehp$ circonscrit à la trajectoire $abkp$ du corps céleste, égal à l'unité, on a $\sin.ecd = \sin.X = ed = \frac{bd}{\sqrt{1-e^2}}$; mais dans le triangle rectiligne rectangle bdf, on a $bd = bf \times \sin.bfd = v\sin.\alpha$; donc

Fig. 10.

$$\sin.X = \frac{v\sin.\alpha}{\sqrt{1-e^2}} \ldots . (12).$$

Or, si l'on divise les deux membres de l'équation (11) par

$$\sqrt{1-e^2}=1-\tfrac{1}{2}e^2,$$

on aura

$$\frac{\rho}{\sqrt{1-e^2}}=(1-\tfrac{1}{2}e^2)^{-1}\times[1+\tfrac{1}{2}e^2+(e-\tfrac{3}{8}e^3)\cos. A - \text{etc.}),$$

ou

$$\frac{\rho}{\sqrt{1-e^2}}=1+e^2+(e-\tfrac{3}{8}e^3)\cos. A-\tfrac{1}{2}e^2\cos. 2A+\tfrac{3}{8}e^3\cos. 3A.$$

Multipliant cette équation par celle (10), et mettant dans le premier membre sin. X à la place de sa valeur $\frac{\rho \sin. \omega}{\sqrt{1-e^2}}$, on aura, toutes réductions faites,

$$\sin. X=\sin. A[1+\tfrac{1}{4}e^2-(e+\tfrac{1}{8}e^3)\cos. A+\tfrac{3}{4}e^2\cos. 2A-\tfrac{3}{8}e^3\cos. 3A] \ldots\ldots (13).$$

Au reste, toutes ces formules, où nous n'avons poussé l'approximation que jusqu'à la troisième puissance de l'excentricité, sont suffisantes pour la terre, et encore mieux pour Vénus, parce que ces deux planètes ont très-peu d'excentricité; mais pour les autres planètes, elles seroient insuffisantes, et devroient être poussées jusqu'à la neuvième ou dixième puissance de e.

NOTE DIXIÈME.

(Relative aux art. 99, 100 et 101 du texte).

Du Calcul des variations annuelles des Longitudes, Latitudes et Angles de positions des Étoiles.

REPRÉSENTANT respectivement par $d\delta$ et da, les variations annuelles des déclinaisons et ascensions droites des étoiles, et par dl, $d\lambda$ et dA les variations annuelles et respectives en latitudes, longitudes et angles de positions des mêmes astres; enfin différenciant les équations (10), (13) et (16) par rapport à δ, a et l'arc ou l'angle qui se trouve dans le premier membre de chacune de ces équations; on a les trois équations différentielles suivantes :

$$dl=\pm\frac{\cos. \omega \cos. \delta}{\cos. l}[(1\pm\tang. \delta \tang. \omega \sin. a)d\delta \mp \tang. \omega \cos. a da] \ldots\ldots (1),$$

$$d\lambda = \cos.^2\lambda \left\{ \frac{\pm \sin.\omega\, d\delta}{\cos.^2\delta \cos.a} + \left(\frac{\cos.\omega \pm \sin.a \sin.\omega \,\mathrm{tang}.\delta}{\cos.a} \right) da \right\} \ldots\ldots (2),$$

$$dA = \sin.^2 A \left\{ \frac{\cot.\omega \sin.\delta \mp \sin.a \cos.\delta}{\cos.a} d\delta - \frac{\cot.\omega \cos.\delta \,\mathrm{tang}.a\, da}{\cos.a} \right\} \ldots\ldots (3),$$

Fig. 15 du texte. les signes supérieurs lorsque la déclinaison est de même dénomination que le pôle élevé, lequel est ordinairement celui que l'on prend pour sommet du triangle A P ϖ (*fig.* 15 du texte), les signes inférieurs dans le cas contraire. Mais nous remarquerons que dans ces dernières équations (1), (2) et (3), ainsi que dans celles (10), (13) et (16) des articles respectifs (99), (100) et (101) du texte, on pourra toujours ne prendre que les signes supérieurs, puisqu'on peut toujours considérer comme sommet du triangle A P ϖ, le pôle qui est de même dénomination que la déclinaison, et dont conséquemment la distance à l'astre est $< 90°$.

Les formules précédentes (1), (2) et (3) peuvent aisément se soumettre au calcul purement logarithmique. En effet, prenant celle (1) avec les seuls signes supérieurs, ce qui simplifie et peut toujours se faire, comme nous venons de le démontrer; on fera

$$\mathrm{tang}.N = \sqrt{\mathrm{tang}.\delta\, \mathrm{tang}.\omega \sin.a} \ldots\ldots (4),$$

d'où

$$dl = \frac{\cos.\omega \cos\delta}{\cos.l} \left(\frac{d\delta}{\cos.^2 N} - \mathrm{tang}.\omega \cos.a\, da \right) = \frac{\cos.\omega \cos.\delta\, d\delta}{\cos.l \cos.^2 N} \left(1 - \frac{\mathrm{tang}.\omega \cos.a\, da \cos.^2 N}{d\delta} \right);$$

donc faisant

$$\mathrm{tang}.Q = \cos.N \sqrt{\frac{da}{d\delta} \mathrm{tang}.\omega \cos.a} \ldots\ldots (5);$$

on aura

$$dl = \frac{\cos.\omega \cos.\delta \cos.^2 Q\, d\delta}{\cos.l \cos.^2 N \cos.^2 Q} \ldots\ldots (6).$$

On opérera d'une manière semblable pour les équations (2) et (3); ce qui est si simple, que nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

Au reste, les formules (1) et (2) peuvent servir à corriger la table des latitudes et longitudes de 600 étoiles calculées par M. Chabrol (*Connoissance des temps* de 1804, pag. 430 et suivantes), et qui sont un peu fautives, à cause que cet astronome a employé dans ses calculs les ascensions droites et déclinaisons des mêmes étoiles prises dans la *Connoissance des temps* de 1803, lesquelles, d'après de nouvelles observations, ont été affectées de quelques légères erreurs.

NOTE ONZIÈME,

(Relative aux articles 115 et 116 du texte).

De la Parallaxe horizontale équatoriale, de la manière de la trouver et d'en déduire la Parallaxe de hauteur, quelle que soit la Latitude du lieu de l'observation.

1. La distance Δ des centres de l'astre observé et de la terre dans un même instant, étant la même pour tous les points de la surface de la terre; il est évident, d'après l'équation (27) de l'art. 113 du texte, que les parallaxes horizontales d'un astre pour différens lieux de la terre, seront entr'elles, dans cet instant, comme les rayons du sphéroïde qui correspondent à ces différens points. Donc, si nous représentons par $(Pe)'$ la parallaxe horizontale *équatoriale*, c'est-à-dire celle qui a lieu sous l'équateur; par P' la parallaxe horizontale du même astre pour une latitude quelconque L; par R le rayon de l'équateur, et par r' le rayon du sphéroïde qui aboutit au point de sa surface dont la latitude est L; on aura $P'=\frac{(Pe)'\times r'}{R}$; donc, considérant la terre, comme ayant sensiblement la figure d'un ellipsoïde de révolution, on aura $P'=\frac{(Pe)'(1+\omega\cos.^2L)}{1+\omega}$ (form. 49, note 1) : ou négligeant les secondes puissances de ω, on aura

$$P'=(Pe)'(1-\omega\sin.^2L). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Il ne s'agit donc plus que de trouver la valeur de $(Pe)'$: or, P et P' représentant les parallaxes horizontales du même astre pour les deux observateurs A et A'; de plus, représentant par r et r' les rayons de la terre qui aboutissent respectivement aux deux lieux des observations; par h et h' les deux hauteurs méridiennes respectivement observées en A et A'; enfin par p et p' les parallaxes de hauteurs qui correspondent aux parallaxes horizontales P et P', on aura $p\,(=P\cos.h)=\frac{r\cos.h}{\Delta}$, et $p'\,(=P'\cos.h')=\frac{r'\cos.h'}{\Delta}$ (éq. 27, 28, art. 113 du texte;) donc $p+p'=\frac{r\cos.h+r'\cos.h'}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}(r\cos.h+r'\cos.h')=\frac{1+\omega}{\Delta}$

$\times\left(\frac{r\cos.h+r'\cos.h'}{1+\omega}\right)=(\mathrm{P}e)\left(\frac{r\cos.h+r'\cos.h'}{1+\omega}\right)$; d'où $(\mathrm{P}e)=\frac{(1+\omega)(p+p')}{r\cos.h+r'\cos.h'}$. Nous démontrerions, comme nous l'avons fait à l'art. 115 du texte, que $p+p'=90^\circ-\frac{1}{2}(h+h'+\mathrm{L}\overset{+}{\backsim}\mathrm{L}')$, donc

$$(\mathrm{P}e)=\frac{(1+\omega)[90^\circ-\frac{1}{2}(h+h'+\mathrm{L}\overset{+}{\backsim}\mathrm{L}')]}{(1+\omega\cos.^2\mathrm{L})\cos.h+(1+\omega\cos.\mathrm{L}')\cos.h'}.$$

On, divisant le numérateur et le dénominateur par $1+\omega\cos.^2\mathrm{L}'$, et négligeant les termes affectés de la seconde puissanee de ω, on aura d'abord $\frac{1+\omega}{1+\omega\cos.^2\mathrm{L}'}=1+\omega\sin.^2\mathrm{L}'$, et $\frac{1+\omega\cos.^2\mathrm{L}}{1+\omega\cos.^2\mathrm{L}'}=1+\omega(\cos.^2\mathrm{L}-\cos.^2\mathrm{L}')=1+\omega\sin.(\mathrm{L}'+\mathrm{L})\times\sin.(\mathrm{L}'\backsim\mathrm{L})$; donc

$$(\mathrm{P}e)=\frac{(1+\omega\sin.^2\mathrm{L}')[90^\circ-\frac{1}{2}(h+h'+\mathrm{L}'\overset{+}{\backsim}\mathrm{L})]}{[1+\omega\sin.(\mathrm{L}'+\mathrm{L})\sin.(\mathrm{L}'\backsim\mathrm{L})]\cos.h+\cos.h'}\ \ldots\ldots\ (2).$$

Si les deux latitudes différoient entr'elles de 90°, alors il est évident que l'une d'elles, par exemple, celle L étant nord, l'autre L' seroit sud, et qu'elles seroient réciproquement complément l'une de l'autre, ce qui réduiroit l'équation précédente à celle

$$(\mathrm{P}e)=\frac{(1+\omega\cos.^2\mathrm{L})[45^\circ-\frac{1}{2}(h+h')]}{(1+\omega\cos.2\mathrm{L})\cos.h+\cos.h'}\ \ldots\ldots\ (3).$$

Chacun des deux observateurs A et A' faisant observer, dans le même instant qu'il observe la hauteur méridienne de l'astre, le diamètre de cet astre par le moyen d'un micromètre, et sachant par l'autre observateur quelle est la hauteur méridienne que ce dernier a observée, il aura la valeur de $(\mathrm{P}e)$ au moment de l'observation de la hauteur méridienne (*) par le moyen de la formule (2); d'où l'observateur A, par exemple, déduira la parallaxe horizontale de l'astre pour la latitude L dans le moment des observations des hauteurs méridiennes, en se servant de la formule (1) qui, dans ce cas particulier où $(\mathrm{P}e')=(\mathrm{P}e)$, lui donnera $\mathrm{P}'=(\mathrm{P}e)(1-\omega\sin.^2\mathrm{L})$. Mais il avoit fait observer le diamètre apparent de l'astre, que nous représenterons par D, au moment où il

(*) Il n'est pas nécessaire que les observations des hauteurs h et h' aient été faites dans le même instant, c'est-à-dire que les observateurs soient exactement sous le même méridien, pourvu que l'on puisse connoître assez exactement la quantité dont l'une des deux hauteurs varie en plus ou en moins dans le temps qui s'est écoulé entre les observations des deux hauteurs méridiennes, afin de les réduire toutes les deux à l'instant où l'une des deux a été faite.

avoit observé h; donc, d'après le principe démontré à l'art. 117 du texte, représentant par $(\mathrm{D}h)$ le diamètre horizontal de l'astre dans le même moment, il aura $(\mathrm{D}h) = \frac{\mathrm{D}\cos.(h+p)}{\cos. h}$, ou

$$(\mathrm{D}h) = \frac{\mathrm{D}\cos.(h+\mathrm{P}'\cos. h)}{\cos. h} \ldots\ldots (4).$$

5. Le diamètre horizontal d'un astre étant sensiblement le même pour toutes les latitudes géographiques (*), un observateur placé dans un lieu quelconque, par exemple à Paris, pourra, en faisant observer le diamètre apparent de l'astre en même temps qu'il observera la hauteur de ce dernier, déterminer la parallaxe horizontale équatoriale de l'astre pour le moment de l'observation. En effet, mettant dans la formule (4) les valeurs observées de D et de h, ainsi que celle de P', grossièrement estimée, ce qui n'influe qu'insensiblement sur la valeur de $(\mathrm{D}h)$, dût-on même mettre à la place de la vraie valeur de P' celle de $(\mathrm{P}e)$ trouvée par le moyen de la formule (2) (**); ensuite, représentant par $(\mathrm{D}h)'$ le

---

(*) En effet, soit supposé un observateur à l'équateur, et un autre au pôle, il est clair que représentant par Δ la distance des centres, par (Δe) la distance du premier observateur au centre de l'astre, et par (Δp) la distance du second au même astre, on aura $(\Delta e) = \sqrt{\Delta^2 - (1+\omega)^2} = \Delta - \frac{1}{2}\frac{(1+\omega)^2}{\Delta} - \frac{1}{8}\frac{(1+\omega)^4}{\Delta^3} -$ etc., et $(\Delta p) = \sqrt{\Delta^2 - 1} = \Delta - \frac{1}{2\Delta} - \frac{1}{8\Delta^3} -$ etc. Mais représentant par $(\mathrm{D}he)$ le diam. horiz. à l'équateur, et par $(\mathrm{D}hp)$ le diam. horiz. polaire, on a la proportion $(\mathrm{D}he):(\mathrm{D}hp)::(\Delta p):(\Delta e)$; donc $\frac{(\mathrm{D}hp)}{(\mathrm{D}he)} = \frac{\Delta e}{\Delta p} = \frac{\Delta - \frac{1}{2}\frac{(1+\omega)^2}{\Delta} - \frac{1}{8}\frac{(1+\omega)^4}{\Delta^3} - \text{etc.}}{\Delta - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\Delta^3} - \text{etc.}} = 1 - \frac{2\omega+\omega^2}{2\Delta^2-1}$; donc $(\mathrm{D}he) - (\mathrm{D}hp) = (\mathrm{D}he)\left(\frac{2\omega+\omega^2}{2\Delta^2-1}\right) = (\mathrm{D}he) \times \frac{\omega}{\Delta^2}$. Faisant $\omega = 0{,}002984$, et donnant à Δ une des plus petites valeurs qu'il puisse avoir, c'est-à-dire faisant $\Delta = 56$, qui est la distance de la lune à la terre lorsqu'elle est périgée, on aura $(\mathrm{D}he) - (\mathrm{D}hp) = 0{,}000001(\mathrm{D}he)$. Ainsi, en supposant $(\mathrm{D}he) = 33' = 1980''$; on aura seulement $(\mathrm{D}he) - (\mathrm{D}hp) = 0'',00198$; quantité presqu'insensible pour ce cas le plus défavorable, et qui, conséquemment, sera encore moins sensible pour tout autre cas.

(**) En effet, prenant la différence finie de l'équation (4), plutôt que la différentielle, parce que nous supposons que l'erreur $\Delta\mathrm{P}'$ (Δ représentant la caractéristique des différences finies) de la parallaxe horizontale P' de la lune, va jusqu'à $10'$, on aura $\Delta(\mathrm{D}h) = -\frac{\mathrm{D}}{\cos. h}[\sin.(h+\mathrm{P}'\cos. h) \times \sin.(\cos. h\,\Delta\mathrm{P}') + 2\cos.(h+\mathrm{P}'\cos. h)\sin.^2\frac{1}{2}(\cos. h\,\Delta\mathrm{P}')]$. En faisant $h = 67°\,10'$, qui est une des plus grandes hauteurs de la lune pour Paris, ensuite $\mathrm{D} = 32'$, $\mathrm{P}' = 1°$ et $\Delta\mathrm{P}'$

diamètre horizontal de l'astre ainsi observé, par Δ' la distance correspondante du centre de l'astre à celui de la terre, et toujours par Dh et Δ le diamètre horizontal et la distance dans l'instant où les observateurs A et A′ ont fait leurs observations, on aura, d'après la proportion démontrée à l'article 109 du texte, l'équation

$$\Delta' = \frac{\Delta \times (Dh)}{(Dh)'} \ldots\ldots (7).$$

Ayant Δ', et représentant par L' la latitude de Paris que nous supposons être le lieu de la surface de la terre où est placé l'observateur; enfin par P' la parallaxe horizontale de l'astre pour le même lieu, nous aurons

$$P' = \frac{1 + \alpha \cos.^2 L'}{\Delta'}.$$

Mais afin d'avoir P' en secondes, nous observerons que le rayon de la terre, qui aboutit au quarante-cinquième degré de latitude (division sexagésimale) étant $= 1 + \frac{1}{2}\alpha$ (art. 49, note I), et le degré du méridien qui correspond à cette latitude étant de $\frac{10000000}{90}$ ou 111111,11 mètres (art. 18, note I), la longueur absolue de ce rayon sera de $57,2957795 \times 111111,11 = 6366197$ mètres : on aura donc le rapport de la distance Δ' au rayon moyen $1 + \frac{1}{2}\alpha$ de la terre, qui sera exprimé par celui de la longueur absolue de Δ' à 6366197. Substituant donc

---

$= 10'$. J'ai d'abord vu qu'en négligeant le second terme de l'équation précédente, on ne commet pas une erreur d'un dix millième de seconde. Ainsi, cette formule peut se mettre sans aucune crainte, sous la forme de la différentielle de l'équation (4), savoir, $d(Dh) = -D\sin.(h + P'\cos.h)dP' \ldots.. (A)$. Faisant, comme précédemment, $h = 67^\circ\, 10'$, $dP' = 10'$, $P' = 1^\circ$, et $D = 32'$; on trouve $d(Dh) = 5''$. Pour connoître l'influence de cette erreur sur la parallaxe horizontale P' (éq. 8); commençons par différencier l'éq. (7) par rapport à Δ' et $(Dh)'$, ce qui nous donnera $d\Delta' = -\frac{\Delta(Dh)d(Dh)'}{(Dh)'^2}$; mais différenciant l'équation (8), par rapport à P' et Δ', on a $dP' = -\frac{(1 + \frac{1}{2}\alpha \cos. 2L')6366197 \times 206264'',8\, d\Delta'}{\Delta'^2}$. Substituant dans cette équation la valeur de $d\Delta'$ trouvée ci-dessus, il vient $dP' = \frac{\Delta(Dh)(1 + \frac{1}{2}\alpha \cos. 2L')6366197 \times 206264'',8\, d(Dh)'}{\Delta'^2 (Dh)'^2}$; or, $\Delta'^2 = \frac{\Delta^2 (Dh)^2}{(Dh)'^2}$ (éq. 7), donc $dP' = \frac{(1 + \frac{1}{2}\alpha \cos 2L')6366197 \times 206264'',8\, d(Dh)'}{\Delta (Dh)}$. Faisant dans cette formule $L' =$ à la latitude $48^\circ\, 50'\, 14''$ de Paris; Δ seulement $= 56$ rayons de la terre $= 56 \times 6366197$; $(Dh) = 29'\, 30'' = 1770''$, et $d(Dh) = 5''$, comme nous l'avons déjà trouvé, nous aurons $dP' = 10''$. Cette erreur ne laisse pas que d'être assez considérable; mais on est sûr de ne plus en commettre de sensible, en introduisant dans le calcul la valeur de P' trouvée par un premier calcul.

dans la valeur précédente de P′, la quantité $\frac{(1+\frac{1}{2}\omega)\Delta'}{6366197}$ à la place de Δ', et multipliant le second membre par 206264″,8 qui est la valeur du rayon d'un cercle en secondes de degré, on aura $P'=\frac{1+\omega\cos.^2 L'}{1+\frac{1}{2}\omega}\times\frac{6366197\times 206264'',8}{\Delta'}$, ou enfin

$$P'=\frac{(1+\frac{1}{2}\omega\cos.2L')6366197\times 206264''8}{\Delta'} \ldots\ldots (8).$$

4. Avant d'aller plus loin, nous observerons que ce que nous avons dit généralement pour tous les astres, ne doit se prendre rigoureusement que pour la lune dont la proximité avec la terre ne permet pas de négliger l'aplatissement ω de cette dernière. Mais, pour tout autre astre que notre satellite, et abstraction faite des étoiles qui n'ont point de parallaxe sensible, les formules précédentes se simplifient beaucoup; car l'on pourra, sans crainte d'erreur sensible, négliger les termes affectés de ω.

Ce qui nous reste à dire dans cette note ne sera relatif qu'à la lune.

5. C'est par le moyen d'une assez longue suite de calculs semblables à ceux que nous avons indiqués à l'article 3, que l'on est enfin parvenu à reconnoître que le rapport du diamètre horizontal à la parallaxe horizontale de la lune est sensiblement égal à $\frac{6}{11}$. Mais une plus grande exactitude tient à des considérations et calculs que la nature de cet ouvrage ne nous permet pas de développer, et que l'on pourra voir discutés avec le plus grand détail dans la *Mécanique céleste* et dans le discours préliminaire des nouvelles tables de la lune.

6. Soit (*)

Le rayon de l'équateur terrestre = ... $1+\omega$
Le demi-axe de la terre = ... 1
La latitude vraie du lieu de l'observation = ... L
La latitude vraie d'un autre point P de la surface de la terre = λ
La parallaxe horizontale de la lune au lieu de l'observation = p'
La parallaxe horizontale de la lune au point P = ... p
La parallaxe horizontale équatoriale de la lune = ... p''
La distance des centres de la terre et de son satellite = ... Δ

Donc

$$p'=\frac{1+\omega\cos.^2 L}{\Delta},\quad p=\frac{1+\omega\cos.^2\lambda}{\Delta}\ \text{et}\ p''=\frac{1+\omega}{\Delta}.$$

(*) Cet article est presqu'entièrement copié dans l'*Art du Calcul astronomique des Navigateurs*, page 58, que j'ai publié en 1801.

Prenant dans les deux dernières équations la valeur de Δ, et substituant successivement ces deux valeurs de Δ dans la première équation, on a $p'=p\left(\frac{1+\omega\cos.^2L}{1+\omega\cos.^2\lambda}\right)$, et $p'=p''\left(\frac{1+\omega\cos.^2L}{1+\omega}\right)$; ou développant en série, négligeant les secondes puissances de ω, et faisant les réductions convenables, on aura les deux équations

$$p'=p\,[1+\omega\sin.(\lambda+L)\sin.(\lambda-L)]\ldots\ldots(9)$$

$$p'=p''(1-\omega\sin.^2L)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10).$$

Ainsi, connoissant la parallaxe horizontale équatoriale de la lune (éq. 10), ou pour un autre lieu quelconque de la terre (éq. 9), on trouvera aisément la parallaxe horizontale de ce satellite pour le lieu de l'observation.

Des équations (9) et (10), on tire celles

$$p'-p=p\omega\sin.(\lambda+L)\sin.(\lambda-L)\ldots\ldots(11)$$

$$p''-p'=p''\omega\sin.^2L\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12).$$

C'est par le moyen de la première de ces formules que M. Sorlin a calculé une table très-étendue de *la réduction de la parallaxe horizontale de la lune pour Paris, à celle qui convient à une autre latitude*, qui a été insérée dans la *Connoissance des temps* de 1805, pag. 591........ 597. La table V en est extraite, et est plus que suffisante pour l'usage des navigateurs.

NOTE DOUZIÈME.

(Supplément à l'article 120 du texte.) (Nouv. divis. du cercle.)

Sur les Réfractions atmosphériques.

1. Si la terre n'avoit pas d'atmosphère, il est clair que nous ne recevrions la lumière du soleil que directement. Ainsi, abstraction faite de la clarté que nous recevons des autres astres célestes, nous passerions subitement de l'obscurité à la clarté et réciproquement, à l'instant du vrai lever ou du vrai coucher du bord supérieur du soleil. Mais la terre étant le noyau d'une sphère d'air qui lui est concentrique, il est clair que le soleil étant au-dessous de l'horizon de l'ob-

servateur, d'une quantité assez petite pour que ses rayons coupent l'horizon entre la surface de la terre et celle de l'atmosphère, ils reviendront par réflexion éclairer l'observateur, en suivant la loi connue en optique, que l'angle de réflexion est égal à celui d'incidence. Donc, la première ou dernière clarté que recevra l'observateur, lui sera donnée par la réflexion des rayons du soleil qui seront tangens à la surface de la terre; cet instant est le commencement ou la fin du *crépuscule*, c'est-à-dire, du temps qui s'écoule respectivement depuis la première ou dernière pointe du jour, et le lever ou coucher réel du soleil. Il est aisé de trouver, avec une approximation suffisante, la quantité dont le soleil est dans cet instant au-dessous de l'horizon de l'observateur : car, ce dernier connoissant exactement la latitude du lieu de l'observation, ainsi que la déclinaison du soleil, et l'heure vraie dans l'instant où il observe la première ou dernière pointe du jour, pourra déterminer pour ce même instant la distance du soleil à son zénith, puisque dans le triangle sphérique formé par cette distance, celle du soleil au pôle élevé et le complément de sa latitude, il connoît les deux derniers côtés et l'angle compris, qui est l'angle horaire (*voy.* le ch. VI, livre II); donc il peut trouver le premier côté. C'est par un grand nombre d'observations et calculs semblables, que l'on a déterminé cette distance d'environ 108° (division sexagésimale), résultat qui se modifie dans différentes circonstances, telles que le plus ou moins de densité dans l'air, l'élévation de l'observateur au-dessus du niveau de la mer, qui le place dans un air plus rare, etc.

2. Mais partant de ce résultat, qui place le soleil à 18° au-dessous de l'horizon à la pointe du jour, on trouve que, représentant par 1 le rayon de la terre, l'épaisseur de l'atmosphère est égale à l'excès 0,0124651 de la sécante de 9° sur le rayon. En effet, soit C le centre de la terre BDK; K le lieu de l'observateur; KFL son horizon; S le soleil; SFL ou S'CA' l'angle 18° d'abaissement du soleil à la pointe du jour, ce qui rend le rayon lumineux SF tangent à la surface de la terre (art. 1). Donc, angl. DCK = angl. SFL = 18°. Mais l'angle d'incidence DFE = à celui de réflexion KFH; donc angl. DCF = angl. FCK, d'où angl. FCK = $\frac{1}{2}$ angl. DCK = 9°; et par conséquent CF = séc. 9° = 1,0124651, ce qui donne l'épaisseur MF de l'atmosphère terrestre = 0,0124651, ou, prenant pour longueur du rayon de la terre 6566197 mètres, qui est la moyenne (note XI, art. 3), on aura l'épaisseur de l'atmosphère = 79555 mètres, ou à peu près 17 lieues communes. Fig. 11.

3. D'après un grand nombre d'observations de la réfraction atmosphérique, on peut conclure la loi suivante, qui est sensiblement celle de la nature : *la*

réfraction est proportionnelle à la cotangente de la somme de la hauteur apparente de l'astre ajoutée au triple de la réfraction atmosphérique de hauteur. Ainsi, représentant par x la réfraction correspondante à une hauteur apparente h, et par a la réfraction horizontale $60',92$; on aura la proportion $\cot. 3a : \cot. (h+3x) :: a : x$; d'où $x \times \frac{\cot. 3a}{a} = \cot. (h+3x)$. Mais $\frac{\cot. 3a}{a} = \frac{\cot. 1°.8276}{0,6092} = 3639,15$. Donc, faisant pour abréger,

$$b = 3639,15,$$

on aura l'équation $bx = \cot. (h+3x) = \frac{1 - \tang. h \tang. 3x}{\tang. h + \tang. 3x}$,

d'où $bx \tang. h + (bx + \tang. h) \tang. 3x = 1$. Mais à cause que l'arc $3x$ est fort petit, on peut, sans commettre une erreur bien sensible, mettre $3x$ à la place de $\tang. 3x$, ce qui donnera l'équation $(b+3) \tang. h \times x + 3bx^2 = 1$, ou $x^2 + \frac{b+3}{3b} \tang. h \times x = \frac{1}{3b}$, et substituant la valeur numérique de $b (=3639,15)$, ce qui donne

$$\frac{b+3}{3b} = 0,3336081, \text{ et } \frac{1}{3b} = 0,0000916,$$

on aura l'équation $x^2 + c \tang. h \times x = e$, dans laquelle nous avons fait pour abréger $c = 0,3336081$ et $e = 0,0000916$.

Résolvant l'équation précédente du second degré, il vient

$$x = \frac{-c \tang. h + \sqrt{c^2 \tang.^2 h + 4e}}{2} = \frac{c \tang. h}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{4e}{c^2 \tang.^2 h}\right)} - 1 \right\};$$

et faisant

$$\tang. M = \frac{2\sqrt{e}}{c \tang. h} = 0,0573763 \cot. h \quad \ldots\ldots (1),$$

on aura

$$x = \frac{c \tang. h \sin.^2 \frac{1}{2} M}{\cos. M} = \frac{0,3336081 \tang. h \sin.^2 \frac{1}{2} M}{\cos. M};$$

et afin d'avoir x en parties de la circonférence du cercle, multipliant sa valeur par celle 63,661977 du rayon, on aura

$$x = \frac{212381'',5 \tang. h \sin.^2 \frac{1}{2} M}{\cos. M} \quad \ldots\ldots (2).$$

Pour faire une application de ces formules, proposons-nous de trouver la réfraction d'un astre, dont la hauteur apparente h est de dix degrés. Voici le calcul :

$h=10°$	log. cot.	0,8002875	
0,0573763	log.	8,7587327	
	Somme.	9,5590202	qui est le log. tang. de M.
M=22°,1260	com. ar. log. cos.	0,0267758	
½M=11°,0630	2 log. sin.	8,4756096	
$h=10°$	log. tang.	9,1997125	
212381″,5	log.	5,3271168	
	Somme.	3,0292147	qui est le log. de 1069″,6,

ou 10′69″,6. Ce résultat est le même que celui qui se trouve dans la table des réfractions de la *Connoissance des temps*, où l'on a, pour la hauteur apparente, 9° (ancienne division), la réfraction 5′46″,55 (ancienne division) : car 10° (nouv. div.) = 9° (anci. div.), et 10′69″,6 (nouv. div.) = 5′46″,55 (ancienne division).

4. D'ailleurs, la meilleure manière d'apprécier la plus grande erreur que l'on peut commettre en négligeant les puissances de $3x$ supérieures à la seconde dans le développement de tang. $3x$, ainsi que nous l'avons fait précédemment, c'est de faire dans l'équation $x=-\frac{c\,\text{tang.}\,h+\sqrt{c^2\,\text{tang.}^2\,h+4e}}{2}$, résultante de l'omission en question, $h=0$, ce qui donne $x=a$, et réduit l'équation précédente à celle $a=\sqrt{e}=\sqrt{0,0000916}=0,0095706$; et multipliant cette valeur par 63°,661977 pour avoir des parties de la circonférence, on aura $a=60,9283$. Ainsi le maximum d'erreur ne va pas à une seconde.

5. Mais, à cause que la réfraction atmosphérique est, si nous pouvons nous exprimer ainsi, une fonction de l'atmosphère, il suit qu'elle doit varier suivant la densité des couches de la masse ambiante que traversent les rayons de lumière. Or, ainsi qu'on le démontre en physique, la hauteur de la colonne de mercure des baromètres est en raison directe de la pesanteur de la colonne atmosphérique qui lui fait équilibre, c'est-à-dire, en raison directe de la densité de l'atmosphère, et par conséquent des réfractions atmosphériques. De même, la physique apprend que la colonne de mercure ou d'alkool des thermomètres est en raison inverse des densités de l'atmosphère, et par conséquent des réfractions. Donc, les variations des hauteurs des thermomètre et baromètre étant combinées dans leurs vrais rapports avec les densités de l'air atmosphérique, serviront à trouver les réfractions atmosphériques des astres pour toutes les hauteurs apparentes.

Les tables VII et VIII sont destinées à faire connoître les réfractions des astres

dont on a observé les hauteurs apparentes, et à leur appliquer les corrections dues aux variations des densités de l'air atmosphérique, lesquelles sont indiquées par les hauteurs du baromètre et du thermomètre.

Voici l'usage de ces tables :

Supposons que la hauteur du baromètre étant 0,738, et celle du thermomètre étant 21°,25, on a observé un astre à 30° de hauteur apparente, on cherchera dans la table VII la réfraction moyenne qui correspond à 30°, on trouvera qu'elle est 3',42 : on cherchera ensuite, dans la table VIII, le nombre qui correspond à la hauteur 0,738 du baromètre et à celle 21°,25 du thermomètre, ce nombre est 0,94 que l'on multipliera par la réfraction moyenne 3',42 : ce qui donnera pour vraie réfraction la quantité 3',215 que l'on retranchera de la hauteur apparente 30°, et la différence 29°,96785 sera la vraie hauteur de l'astre.

NOTE TREIZIÈME.

Sur le calcul de l'heure vraie par le moyen de l'angle horaire de tout autre astre que le soleil.

(Voyez les art. 127 et 128 du texte.)(Anc. div. du cercle.)

DIFFÉRENCIANT l'éq. 45 (art. 127), par rapport à ang. hor. ⊙ et asc. dr. ⊙, on a $\pm d$(ang. hor. ⊙) $= -d$ (asc. dr. ⊙). Mais de l'éq. (46) (art. 128), on tire d(asc. dr. ⊙) $= \frac{(\alpha' - \alpha'')\,dt}{24}$; donc

$$\pm d(\text{ang. hor.} \odot) = -\frac{(\alpha' - \alpha'')\,dt}{24} \quad \ldots \quad (1).$$

La plus grande valeur que puisse avoir $\alpha' - \alpha''$ est 1° 2' 30", ce qui a lieu vers les solstices; de plus, nous ne pouvons guère supposer à dt une valeur plus grande que 15 minutes de temps; on auroit donc dans ce cas, qui est un des plus défavorables, $\pm d$(ang. hor. ⊙) $= -\frac{3750''}{96} = -39''$, ce qui ne fait en temps qu'une erreur de 2ˢᵉᶜ·,6. D'ailleurs, si l'on veut avoir l'heure vraie avec une grande exactitude, on pourra se servir de la formule (1) pour faire cette correction.

NOTE QUATORZIÈME.

Correction des angles semi-diurnes des astres, lorsqu'on a égard à la variation de leurs déclinaisons, depuis l'instant de leur lever jusqu'à celui de leur coucher.

(Art. 135 du texte.) (Anc. div. du cercle.)

1. En supposant d'abord que la déclinaison varie uniformément dans le temps de la semi-présence, ainsi que cela a sensiblement lieu pour le soleil, nous différencierons l'équation $\cos. P = \frac{\cos. \Delta \mp \sin. L \sin. \delta}{\cos. L \cos. \delta}$ par rapport P et δ, ce qui donnera

$$\sin. P\, dP = \frac{(\pm \cos.^2 \delta \sin. L - \cos. \Delta \sin. \delta \pm \sin.^2 \delta \sin. L) d\delta}{\cos.^2 \delta \cos. L} = \frac{(\pm \sin. L - \cos. \Delta \sin. \delta) d\delta}{\cos.^2 \delta \cos. L};$$

et représentant par r la réfraction moins la parallaxe horizontale, ce qui donne $\cos. \Delta = \cos. (90^\circ + r) = -\sin. r$, on aura l'équation

$$dP = \frac{\pm \tang. L d\delta}{\cos.^2 \delta \sin. P} + \frac{\sin. r \tang. \delta\, d\delta}{\cos. \delta \cos. L \sin. P} \ldots\ldots (1),$$

ou plus simplement, et sans une erreur sensible

$$dP = \frac{\pm \tang. L d\delta}{\cos.^2 \delta \sin. P} \ldots\ldots (2),$$

puisque le second terme du second membre de l'équation (1) est égal au premier terme du même membre multiplié par $\frac{\sin. r \sin. \delta}{\sin. L}$, quantité fort petite tant que L est dans les limites prescrites à l'art. 129 du texte pour que l'astre se lève et se couche par rapport à l'observateur

Dans cette formule (2), comme dans celle (48) (art. 131 du texte), il faut prendre le signe + lorsque la déclinaison est de même dénomination que la latitude de l'observateur, le signe — dans le cas contraire. Mais pour le premier de ces deux cas, il faut observer que si la déclinaison va en augmentant, il faudra ajouter aux heures approchées déjà trouvées par la formule 48 (art. 131 du texte) la correction dP, puisque la déclinaison à l'instant du lever étant moins forte qu'à l'instant du passage au méridien, et celle du soir étant plus grande qu'au

même instant, le premier semi-angle diurne est trop grand, et le second est trop petit; donc, l'astre se lève plus tard et se couche plus tard. Si au contraire la déclinaison, toujours de même dénomination que la latitude de l'observateur, va en diminuant, la correction devra être retranchée de l'heure du lever et de celle du coucher, puisque le semi-angle diurne avant le passage au méridien est trop petit et l'autre trop grand. L'inverse a lieu lorsque la déclinaison est de dénomination différente de la latitude de l'observateur.

Faisons une application de cette formule (2) à la correction des heures déjà trouvées par approximation (art. 131 du texte) du lever et du coucher apparent du soleil pour Paris, le 19 août 1806.

Latitude de Paris	48° 50′ 15″	log. tang.	0,0583502
Variation de la déclin. ⊙ dans $7^h 4'$ de temps. . .	5′ 44″5 ou 344″5	log.	2,5371892
Semi-angle diurne ⊙	106° 8′ 10″	com. ar. log. sin.	0,0221303
Déclin. ⊙ à midi le 19 août.	12 . 57 6	com. ar. a log. cos.	0.0223832
		Somme.	2,6400529

qui est log. de 436″6. On a donc à moins d'une demi-seconde près $dP = 7'17''$, ou en temps $dP = 29^s,1$; et puisque la déclinaison est nord ainsi que la latitude de Paris, et qu'elle va en diminuant, nous aurons l'heure vraie du lever apparent $= 4^h\,55^m\,27^s - 29^s = 4^h\,54'\,58''$, et l'heure vraie du coucher apparent $= 7^h\,44^m\,33^s - 29^s = 7^h\,44^m\,4^s$.

En ne négligeant pas la quantité donnée par la formule $\frac{\sin. r \sin. \delta}{\sin. L} \times 437''$, on auroit en environ 1″ de plus, ce qui fait 4^{tier} en temps; et par conséquent peut se négliger sans une erreur sensible, puisqu'on ne pousse l'approximation que jusqu'aux secondes de temps.

NOTE QUINZIÈME.

(Supplément au chap. VII, liv. II.)

Sur les variations des mouvemens de la lune.

1. QUOIQUE la lune soit beaucoup plus près de la terre que du soleil, il n'est pas moins vrai que ses mouvemens sont troublés par ce dernier astre. Ainsi, tous les mouvemens de la lune doivent varier avec les différentes positions rela-

tives du soleil et de la terre, et de sa propre position avec chacun de ces deux astres pendant les révolutions annuelles et lunaires. De plus, d'une année à l'autre, les positions respectives du soleil et de la terre varient un peu par l'effet de la précession des équinoxes, de l'inclinaison de l'écliptique et de la nutation de l'axe qui ont pour cause l'action de la lune sur la terre, ce qui produit encore des variations à longs espaces de temps dans les mouvemens de la lune. On appelle ces dernières variations, dont le cours entier est de plusieurs siècles, *inégalités séculaires;* et on appelle *inégalités périodiques* celles dont les intervalles sont assez courts pour qu'il soit permis à la même génération de les observer plusieurs fois.

2. Parmi les variations séculaires, on distingue entr'autres celle qui accélère les mouvemens de la lune, et que la comparaison des observations des anciens avec ce qu'elles auroient dû être si les mouvemens avoient été uniformes, a fait connoître: par exemple, dans une éclipse de lune observée à Babylone par les Chaldéens, 721 ans avant l'ère chrétienne et rapportée par Ptolomée, laquelle eut lieu une heure environ après le lever du soleil, la longitude de ce dernier astre étoit la même que celle de la lune (*voyez* le mémoire de Lalande sur l'équation séculaire de la lune, imprimé parmi ceux de l'académie des sciences, année 1757). Mais, par le moyen des tables actuelles de la lune, on trouve que la longitude de ce dernier astre auroit dû être à cette époque moins avancée; la différence est de plus de 1° 26′, d'où il suit que le mouvement de la lune est accéléré; ceci a été confirmé par d'autres observations intermédiaires, telles que celles qui ont été faites au Caire par *Ibn-Junis*, astronome arabe du dixième siècle, lesquelles donnent des différences moindres que la précédente 1° 26′, ainsi que cela doit être, puisque les derniers temps dont nous venons de parler, sont plus près de celui où nous vivons que ceux des observations des Chaldéens à Babylone, d'environ 17 siècles.

Cette variation, dont l'analyse a su découvrir et expliquer la cause, s'appelle *équation séculaire du moyen mouvemement de la lune,* et est représentée dans les tables par la somme de deux termes respectivement proportionnels aux carré et cube des siècles écoulés.

3. La cause de cette équation a produit aussi des variations à longs espaces de temps qui affectent les mouvemens du périgée lunaire et celui des nœuds. La Place a trouvé que représentant respectivement par m, p et n les variations des moyens mouvemens de la lune, de son périgée et de ses nœuds, on avoit $m:p:n::250000:750130:183865$.

4. Il est évident que la révolution anomalistique, dépendant du mouvement de la lune et de celui de son périgée, devra aussi varier avec ces deux dernières quantités. Il en est de même des quantités qui sont fonctions des mouvemens des nœuds et du périgée.

5. Enfin, la théorie de l'attraction a encore fait voir à l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*, que la distance de la lune à la terre, l'excentricité et l'inclinaison de son orbite sont pareillement assujéties à des équations séculaires liées à celles du moyen mouvement. Mais ces découvertes, qui échappent presque à l'imperfection des observations des siècles passés, et que la plus subtile analyse a su démêler, ne seront sensibles que dans les siècles à venir, pendant lesquels ces variations s'accumulant, deviendront sensibles : d'ailleurs, elles sont calculées d'avance dans les nouvelles tables de la lune.

6. Passons maintenant aux inégalités périodiques, dont les principales, qui affectent la longitude elliptique de la lune pendant un court espace de temps, sont l'*évection*, la *variation* et l'*équation annuelle*. 1°. L'effet de la première de ces inégalités est constant, et tend à diminuer l'équation du centre dans les syzygies et à l'augmenter dans les quadratures. Il seroit aisé d'évaluer l'évection si ces augmentations et diminutions dépendoient seulement de la distance angulaire de la lune au soleil, puisqu'alors étant constantes elles seroient proportionnelles à cette dernière quantité. Mais sa valeur absolue variant aussi avec la distance de la lune au périgée de son orbite, on a cherché à la représenter par une formule variable : ce n'a été qu'après une longue suite d'essais et d'observations, qu'on est parvenu à l'exprimer très-exactement par la formule

$$1^\circ\, 20'\, 28'',248 \,\text{sin.}(\,2\ \text{dist.}\ \odot\ ☾ - \text{anom. moy.}\ ☾\,) \;.\,.\,.\,.\,.\; (1);$$

2.° La *variation* est une inégalité dans le mouvement lunaire, qui disparoît dans les syzygies et dans les quadratures, et qui atteint sa plus grande valeur lorsque la lune est dans les *octans*, c'est-à-dire, à égales distances de deux phases consécutives, ou à 45° de l'une d'elles. Cette inégalité, qui dépend de la distance angulaire de la lune au soleil, a pour expression

$$35'\, 40'',992 \,\text{sin.}\ 2\ \text{dist.}\ \odot\ ☾ \;.\,.\,.\,.\,.\; (2);$$

3°. L'*équation annuelle* est une inégalité qui dépend de la distance du soleil à la terre; elle a pour expression

$$10'\, 68'',736 \,\text{sin. anom. moy.}\ \odot \;.\,.\,.\,.\,.\; (3).$$

Ainsi elle est nulle à l'apogée et au périgée du soleil, et elle est à son *maximum* lorsque le soleil est à ses moyennes distances de ces deux points.

7. Nous allons tâcher de donner le plus simplement possible, une idée analytique des causes de ces variations.

Soit S le soleil, T la terre, L la lune; représentons respectivement par v, v' et v'' la distance SL du soleil à la lune, TL de la terre à la lune, et ST du soleil à la terre. De plus, représentons par S la masse du soleil, et par a la distance angulaire STL du soleil et de la lune, angle qui quelquefois s'appelle *élongation*, et est généralement l'angle apparent compris entre le soleil et une planète, et ayant son sommet à la terre. Fig. 12.

Supposons que la lune L est attirée vers le soleil avec une force que nous représenterons par Ld, et que, pour plus de facilité, l'orbe ALB de la lune est dans le plan du triangle SLT qui réunit les centres des trois astres que nous considérons; ce qui peut se supposer sans une erreur bien sensible, à cause du peu d'inclinaison de l'orbite de la lune sur le plan de l'écliptique.

La lune étant toujours à une très-petite distance de la terre relativement à celle à laquelle elle est du soleil, et la terre décrivant dans l'espace une ellipse dont le soleil occupe l'un des deux foyers, il est évident qu'on peut sensiblement considérer la lune comme décrivant autour du soleil une courbe sur les points de laquelle les effets d'attractions solaires sont les mêmes que ceux exercés sur les points d'une ellipse ayant un de ses foyers au centre du soleil. Donc la force Ld exercée par le soleil sur la lune est $=\frac{S}{v^2}$. Mais si par les points d et L nous menons les droites db, Lb respectivement parallèles aux droites TL et TS, et si nous formons le parallélogramme cb, nous aurons décomposé la force Ld en deux autres, Lc qui pousse la lune vers la terre, et Lb qui la tire dans le sens TS. Mais le triangle cLd étant semblable à celui TLS, on a Lc : cd : Ld :: v' : v'' : v; donc $Lc=\frac{v'\times Ld}{v}$, ou la force provenant du soleil qui pousse la lune vers la terre $=\frac{v'S}{v^3}$. De même, la suite de rapports géométriques égaux que nous venons de trouver, donne encore cd ou $Lb=\frac{v''\times Ld}{v}$, ou la force solaire qui tire la lune dans le sens $TS=\frac{Sv''}{v^3}$. Mais le soleil occupant le foyer de l'orbite elliptique de la terre, attire cette dernière avec une force $=\frac{S}{v''^2}$; donc ces deux forces $\frac{S}{v''^2}$ et $\frac{Sv''}{v^3}$ étant dans le sens TS, la perturbation du soleil sur la

Fig. 12. lune, ne sera que la différence de ces deux forces, c'est-à-dire, $\frac{S\nu''}{\nu^3}-\frac{S}{\nu''^2}$: soit représentée cette dernière force sur TS, ou sur la parallèle Lb, par Lq; et formons sur cette droite le parallélogramme rectangle nLmq, ce qui décompose la force Lq en deux rectangulaires Ln, Lm, la première qui tend à accélérer le mouvement de la lune sur son orbite LB, la seconde qui tend à éloigner la lune de la terre : mais Ln=Lq cos. nLq=Lq sin. STL; donc, représentant la force accélératrice par F, on aura

$$F=S\left(\frac{\nu''}{\nu^3}-\frac{1}{\nu''^2}\right)\sin. a \;.\;.\;.\;.\;.\; (4).$$

De même, on a Lm=Lq cos. qLm=Lq cos. STL$=S\left(\frac{\nu''}{\nu^3}-\frac{1}{\nu''^2}\right)\cos. a$. Mais les forces L$c$, L$m$ étant en sens opposé, il suit que la perturbation du soleil sur la lune dans le sens du rayon vecteur TL, est Lc—Lm; ainsi, en la représentant par φ, on aura

$$\varphi=S\left\{\frac{\nu'}{\nu^3}-\left(\frac{\nu''}{\nu^3}-\frac{1}{\nu''^2}\right)\cos. a\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; (5).$$

Il est bon d'observer que la force F, que nous avons appelée accélératrice, devient retardatrice lorsque la longitude de la lune est plus grande que celle du soleil, par exemple, lorsque ce dernier astre est en S', puisqu'alors le soleil, tirant la lune dans le sens S'L en-dessous de la ligne des centres TL de la terre et de la lune, auroit pour l'une des forces composantes de celle qu'il imprimeroit à notre satellite la quantité Ln' opposée à celle Ln.

D'ailleurs ce résultat nous est indiqué par la formule (4) qui, dans le cas où l'angle a, et par conséquent son sinus, est négatif, donne F négative, c'est-à-dire qu'alors la force perturbatrice est retardatrice.

Ces formules (4) et (5), que nous avons trouvées en supposant que les trois corps considérés dans notre système planétaire sont le soleil, la terre et la lune, peuvent également servir pour connoître les perturbations que chaque planète doit faire éprouver à une autre planète relativement aux mouvemens de cette dernière autour du soleil. En effet, la démonstration précédente resteroit la même en plaçant le soleil en T, la planète troublée en L, et la planète perturbatrice en S.

Mais nous continuerons à ne faire l'application de ces formules que pour notre planète, son satellite et le soleil; et dans ce cas-là nous pouvons les simplifier. En effet, si du point L nous abaissons la perpendiculaire LD sur ST, nous

aurons, à cause de la petitesse de TL relativement à ST ou SL, cette dernière quantité, qui sera sensiblement $=$ à SD; donc $v=v''-\text{TD}=v''-v'\cos.a$; d'où $\frac{1}{v^3}=\frac{1}{v''^3}+\frac{3v'\cos.a}{v''^4}$, en négligeant les termes suivans qui sont sensiblement nuls, puisque v'' est extrêmement plus grand que v'.

Substituant cette valeur de $\frac{1}{v^3}$ dans l'équation (4), on a $\text{F}=\frac{3\text{S}v'\cos.a\sin.a}{v''^3}$, ou

$$\text{F}=\frac{3\text{S}v'\sin.2a}{2v''^3}\ldots\ldots(6).$$

La substitution de la valeur de $\frac{1}{v^3}$ dans l'éq. (5), donne $\varphi=\text{S}\Big(\frac{v'}{v''^3}+\frac{3v'^2\cos a}{v''^4}-\frac{\cos.a}{v''^2}-\frac{3v'\cos.^2a}{v''^3}+\frac{\cos.a}{v''^2}\Big)$. Réduisant et supprimant le terme $\frac{3v'^2\cos.a}{v''^4}$ qui est sensiblement nul, il vient $\varphi=\frac{\text{S}v'}{v''^3}(1-3\cos.^2a)$; mais $\cos.^2a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos.2a$; donc définitivement

$$\varphi=-\frac{\text{S}v'}{2v''^3}(1+3\cos.2a)\ldots\ldots(7).$$

Faisant successivement l'angle d'élongation $a=0$, 90°, 180° et 270°, la formule (6) donne également pour ces quatre cas $\text{F}=0$, donc la vitesse du mouvement de la lune n'est altérée ni aux syzygies, ni aux quadratures par le soleil.

Mais les mêmes valeurs de a réduisent successivement la formule (7) à celles $\varphi=-\frac{2\text{S}v'}{v''^3}$, $\varphi=\frac{\text{S}v'}{v''^3}$, $\varphi=-\frac{2\text{S}v'}{v''^3}$ et $\varphi=\frac{\text{S}v'}{v''^3}$. Donc le maximum de diminution de l'attraction de la terre sur la lune a lieu aux syzygies; et le maximum de l'augmentation de cette attraction a lieu aux quadratures : ainsi la différence d'attraction de la terre sur son satellite depuis l'une des syzygies jusqu'à la quadrature suivante, est $\frac{3\text{S}v'}{v''^3}$.

Faisant successivement l'angle d'élongation $a=45°$, 135°, 225° et 315°, on a respectivement à ces valeurs l'équation (6) qui se réduit à celles $\text{F}=\frac{3\text{S}v'}{2v''^3}$, $\text{F}=-\frac{3\text{S}v'}{2v''^3}$, $\text{F}=\frac{3\text{S}v'}{2v''^3}$ et $\text{F}=-\frac{3\text{S}v'}{2v''^3}$; donc la force accélératrice imprimée par le soleil sur le mouvement de la lune, est à son maximum dans les premier et cinquième octans, et la force retardatrice du même mouvement est à son maximum aux troisième et septième octans.

Les mêmes valeurs successives de a réduisent l'équation (7) à celle $\varphi=$

$\frac{S\nu'}{2\nu''^3}$; donc aux quatre points de la révolution synodique de la lune, où celle-ci est dite à l'un de ces octans, la diminution de sa pesanteur sur la terre est $\frac{S\nu'}{2\nu''^3}$.

On trouve aisément le point où l'attraction de la lune vers la terre n'est pas altérée par celle du soleil, en faisant dans l'équation (7) $\varphi = 0$, ce qui donne cos. $2a = -\frac{1}{3}$, d'où $a = 54° 44' 8''$.

8. Quoique la lune faisant une rotation entière autour de son axe dans le temps d'une révolution synodique, nous présente toujours la même face, cependant, en observant les taches qui sont sur son disque, et particulièrement celles qui sont près du bord, l'on aperçoit quelques petites variations qui les font paroître changer un peu de positions, en les rapprochant et éloignant successivement du limbe; de manière que la lune paroît avoir dans le ciel un petit balancement que l'on appelle par cette raison *libration*, qui vient du mot latin *librare*. Mais ce phénomène n'a rien par lui-même de réel, et n'est que le résultat de plusieurs illusions optiques.

9. On distingue quatre sortes de librations : 1.° la libration *diurne* qui provient de ce que la lune présente toujours la même face au centre de la terre; au lieu que pour l'observateur placé sur la surface de cette dernière, l'angle formé par la ligne des centres et le rayon visuel lorsque la lune est à l'horizon, c'est-à-dire la parallaxe horizontale de ce satellite, empêche de voir le contour du sphéroïde lunaire, comme il seroit vu du centre de la terre; ainsi, l'observateur placé sur la surface de la terre, observe quelques parties de plus dans la partie supérieure, et la même quantité de moins dans la partie inférieure; mais à mesure que la lune s'élève au-dessus de l'horizon, la parallaxe diminue, et la face que voit l'observateur tend sans cesse à se rapprocher de celle vue du centre de la terre; ainsi certaines parties du bord supérieur disparoissent, et un même nombre de parties inférieures se découvrent, de manière que depuis le lever jusqu'à l'instant du passage de la lune au méridien, la lune semble se pencher un peu autour d'un axe horizontal d'occident en orient; et depuis cet instant jusqu'à celui du coucher, le même phénomène s'effectuant en sens inverse, la lune paroît se pencher encore d'une quantité sensiblement égale à la première d'occident en orient, de manière que cette demi-oscillation s'accomplit entièrement depuis le lever jusqu'au coucher de la lune : et à cause que le bord supérieur est au coucher de la lune celui qui étoit inférieur au lever, la différence des deux disques visibles, est la plus forte de l'un à l'autre de ces deux points. Mais au lever suivant, le disque de la lune reparoissant comme au lever précé-

dent, il s'ensuit que l'oscillation entière s'est accomplie dans l'espace d'un jour lunaire, c'est pourquoi on l'appelle diurne.

10. 2°. La libration en *longitude*, dont la cause dépend des variations qu'éprouve le mouvement de la lune dans sa révolution autour de la terre. En effet, la rotation de la lune autour de son axe, se fait sensiblement d'un mouvement uniforme, et sa durée est la même que celle d'une révolution synodique : donc, si le mouvement de révolution de la lune étoit uniforme, nous verrions toujours la même face, abstraction faite de la libration diurne ; mais ce mouvement étant variable, il suit que la rotation apparente qui en résulte, est quelquefois plus avancée, d'autrefois plus retardée que la réelle, ce qui cause un petit balancement apparent de part et d'autre de la ligne des centres de la terre et de la lune.

11. 3.° La libration en *latitude*, qui provient de l'inclinaison de l'axe de rotation de la lune sur son orbite ; car, suivant que cet axe nous présente sa plus grande ou sa plus petite obliquité, il doit nous découvrir successivement les deux pôles de rotation du sphéroïde lunaire. Nous devons donc apercevoir dans certains temps quelques-uns des points situés vers ces pôles, et les perdre ensuite de vue, lorsqu'ils se rapprochent du limbe apparent, ce qui donne un balancement dans le sens perpendiculaire à l'équateur lunaire.

12. 4.° La libration par *attraction*, qui provient de ce que la lune et la terre n'étant que des sphéroïdes, ne pèsent pas l'une sur l'autre d'une même manière dans leurs différentes positions, ce qui apporte quelques petits changemens dans l'aspect de la surface de l'hémisphère visible.

NOTE SEIZIÈME.

Des influences respectives du soleil et de la lune sur les marées.

1. SOIT ALBQ la terre, T son centre, S l'astre dont on veut déterminer l'influence sur les marées, v la distance de l'astre S au lieu L de l'observation, v'' la distance ST de l'astre au centre de la terre, et v' le rayon TL de cette dernière ; on trouvera, comme à l'article 7 de la note précédente, que la force de S en L dans la direction ST, est$=\frac{S\,v''}{v^3}$. Mais abaissant du point L la perpendiculaire LD, on a sensiblement SD$=$SL, quand même l'astre considéré S seroit la Fig. 12.

Fig. 12. lune; donc aussi on a sensiblement $v = v'' - TD = v'' - v' \cos. STH$; et représentant par z la distance angulaire STH de l'astre S au zénith H, on aura $v = v'' - v' \cos. z$. Donc, la force d'attraction de l'astre sur le point B $= \frac{S v''}{(v'' - v' \cos. z)^3}$, ou développant, et negligeant les termes affectés des puissances de v' au-dessus de la première, on aura la force exercée sur le point $B = \frac{S}{v''^2} + \frac{3 S v' \cos. z}{v''^3}$ (Alg. § LXIV). Mais la force d'attraction exercée sur toute la terre par l'astre S, est $\frac{S}{v''^2}$; donc celle qui élève la mer n'est que $\frac{3 S v' \cos. z}{v''^3}$: ainsi, représentant par (MS) l'effet du soleil sur les marées, par S sa masse, par Δ sa distance moyenne à la terre, par r le rayon de la terre, et par h l'angle de hauteur du soleil au-dessus de l'horizon de l'observateur, lorsqu'il passe au méridien élevé, ou l'angle d'abaissement au-dessous de l'horizon, lorsque le soleil passe au méridien abaissé, on aura

$$(MS) = \frac{3 S r \sin. h}{\Delta^3} \ldots\ldots (1).$$

Par la même raison, représentant par (ML) l'effet de la lune pour élever les eaux, par L sa masse, par δ sa distance moyenne à la terre et par h' l'angle de hauteur de la lune au-dessus de l'horizon de l'observateur, lorsqu'elle passe au méridien élevé, ou l'angle d'abaissement au-dessous de l'horizon, lorsque la lune passe au méridien abaissé, on aura

$$(ML) = \frac{3 L r \sin. h'}{\delta^3} \ldots\ldots (2).$$

Mais en représentant par (PS) la parallaxe horizontale du soleil dans ses moyennes distances à la terre, et par (PL) la parallaxe horizontale de la lune dans ses moyennes distances à la terre, nous avons vu à l'article 116 du texte que l'on avoit $(PS) = \frac{r}{\Delta}$ et $(PL) = \frac{r}{\delta}$, d'où $\Delta^3 = \frac{r^3}{(PS)^3}$, et $\delta^3 = \frac{r^3}{(PL)^3}$. Substituant ces valeurs dans les équations respectives (1 et 2), on a

$$(MS) = \frac{3 S (PS)^3 \sin. h}{r^2} \ldots\ldots (3),$$

$$(ML) = \frac{3 L (PL)^3 \sin. h'}{r^2} \ldots\ldots (4);$$

donc, à même position du soleil et de la lune relativement à l'horizon de l'observateur, ce qui donne $h = h'$, on aura la proportion

$$(MS):(ML)::S(PS)^3:L(PL)^3 \ldots\ldots (5),$$

d'où il suit que *les effets du soleil et de la lune sur les marées, sont entr'eux comme les produits des masses respectives de ces deux astres, par le cube de leurs parallaxes.*

Soit représentée par 1 la masse de la terre, et faisons, comme l'a trouvé M. de Laplace, par la théorie de la pesanteur universelle, $S = 329809$ et $L = \frac{1}{68,5}$ en supposant que l'on a $(PS) = 8'',8$, et $(PL) = 57'$. Substituant ces valeurs dans la proportion (5), il viendra

$$(MS):(ML) :: 329809 \times (0,0000426636)^3 : \frac{1}{68,5} \times (0,0165806279)^3 \, (^*) :: 1 : 2,6.$$

2. Il est évident qu'à l'équateur, et généralement abstraction faite de la hauteur méridienne h du soleil, la marée solaire doit varier dans le même sens que la parallaxe (PS) de cet astre (éq. 5); et qu'ainsi que nous l'avons dit dans le texte, les marées solaires d'hiver devroient être plus grandes que celles d'été; mais à cause que sin. h est aussi fonction de (MS), et que pour nous autres habitans de l'hémisphère septentrional, la quantité sin. h peut diminuer davantage en hiver que n'augmente (PS) dans la même saison, il s'ensuivra que pour certaines latitudes de l'hémisphère septentrional, les marées solaires d'été sont plus fortes que celles d'hiver. Par exemple, à Brest, dont la latitude est 48° 23', la hauteur méridienne du soleil, lorsque cet astre est périgée, n'est que de 18°9', et elle est de 65°5' lorsque le soleil est apogée; mais, dans le premier cas, la parallaxe du soleil est de 8'',95, et, dans le second, elle n'est que 8'',65 : on aura donc pour le port de Brest la proportion, la marée solaire vers les premiers jours de janvier est à cette marée vers les premiers jours du mois de juillet, comme $(\sin. 18°9')(8'',95)^3$ est à $(\sin. 65°5')(8'',65)^3 :: 1 : 2,6$.

Au reste, l'on pourra aisément trouver dans ce même hémisphère nord, la limite des latitudes qui ont les plus grandes marées solaires lorsque le soleil est à son apogée, et les plus petites dans le cas contraire. En effet, représentons par a le rapport $\frac{(8,95)^3}{(8,65)^3}$ ou 1,1077, par L la latitude du lieu de l'observation, et par δ la déclinaison du soleil à ses apsides, qui est à peu près de 23° 10', ce qui donne le sinus de la hauteur méridienne du soleil, lorsque celui-ci est apogée $= \cos.(L - \delta)$, et le sinus de la même hauteur lorsque le soleil est périgée $= \cos.(L + \delta)$ (**). On aura donc la proportion, la hauteur de la marée solaire lorsque le so-

(*) J'ai mis dans cette proportion les valeurs respectives de 8'',8 et 57' en parties du rayon.

(**) Nous verrons à l'article 196 du texte, que l'on a généralement $L = \pm[90° - (h \mp \delta)]$

leil est périgée, est à cette hauteur lorsque le soleil est apogée, comme a cos. $(L+\delta)$ est à cos. $(L-\delta)$; donc, pour que ces marées soient égales, il faut que l'on ait $a \cos.(L+\delta) = \cos.(L-\delta)$. Développant et divisant par cos. L, on a $a \cos.\delta - a \sin.\delta \operatorname{tang}.L = \cos.\delta + \sin.\delta \operatorname{tang}.L$; d'où $\operatorname{tang}.L = \frac{(a-1)\cot.\delta}{a+1}$; et substituant les valeurs numériques de a et de δ, on a $\operatorname{tang}.L = \frac{0{,}1077}{2{,}1077} \cot.\ 23°\ 10'$, ce qui donne pour la latitude du lieu où la marée solaire périgée est égale à l'apogée 6°48′35″. Donc, pour les latitudes septentrionales plus grandes que cette dernière, les marées solaires périgées seront plus petites que les apogées : c'est ce qui a lieu dans toute l'Europe; ce sera le contraire pour les latitudes septentrionales plus petites que 6°48′35″. Mais la ligne des apsides du soleil variant sans cesse de position, puisque la longitude des apsides augmente toutes les années de 61 à 62 secondes de degrés (*), les résultats précédens s'altéreront dans la suite des temps.

Quant aux habitans de l'hémisphère méridional, il est clair que les hauteurs méridiennes du soleil variant toujours dans le même sens que la parallaxe de cet astre, ils ont tous leur plus grande marée solaire pendant leur été, qui est notre hiver, et réciproquement.

3. Puisque le rayon r de la terre est fonction des intensités des marées solaires et lunaires (éq. 1 et 2), et que les rayons de notre sphéroïde vont en croissant à mesure que les latitudes diminuent, il suit que les marées varient en sens inverse des déclinaisons des astres qui les produisent. Ainsi, représentant par (MST) la marée solaire tropique, et par (MSE) la marée solaire équatoriale, on aura, abstraction faite de la position de l'observateur, la proportion

$$(MST):(MSE)::1+\alpha \cos.^2 23°\ 28':1+\alpha \text{ (éq. 9, note 1).}$$

4. Enfin, il est évident que la hauteur méridienne du soleil étant plus grande

lorsque la déclinaison est de même dénomination que la latitude de l'observateur, les signes supérieurs quand $L>\delta$, les signes inférieurs dans le cas contraire. On tire de cette équation $h = 90° \mp (L-\delta)$, ce qui donne toujours $\sin.h = \cos.(L-\delta)$.

(*) La comparaison des observations faites en 1690 par Flamsted, par Lacaille en 1750, et par Delambre en 1780, de la longitude de l'apogée du soleil, a donné pour augmentation annuelle de la longitude des absides 1′2″,2, et M. de Laplace a trouvé, par la théorie de l'attraction, (*Méc. céleste*, tom. III, pag. 109), que cette augmentation en longitude n'étoit que de 1′2″,05. Ainsi, la durée d'une révolution entière est d'environ 208807 ans. La longitude de l'apogée du soleil est, en 1807, de 99° 36′ 10″.

que l'abaissement méridien du même astre, lorsque sa déclinaison est de même dénomination que la latitude du lieu de l'observation, *la marée du matin*, c'est-à-dire, celle qui tient à l'influence du soleil à son passage au méridien élevé, sera plus grande que *la marée du soir*, c'est-à-dire, celle qui tient à l'influence du soleil au passage du méridien abaissé. Mais, lorsque la déclinaison du soleil est de dénomination différente de la latitude, alors la hauteur méridienne de cet astre étant plus petite que son abaissement lorsqu'il passe au méridien abaissé, la marée du matin est plus petite que celle du soir.

NOTE DIX-SEPTIÈME.

Théorie sur laquelle pose la construction de la table XIII, servant à corriger la distance observée de deux astres, de l'erreur provenant de l'inclinaison des faces du grand miroir.

(Voyez l'article 191 du texte.)

SOIT supposé que dans l'instant où l'observateur aperçoit dans le champ de la lunette le contact des disques S et L des deux astres observés, GM et *pm* représentent respectivement les grand et petit miroirs du cercle de réflexion, le premier de ces miroirs étant de figure prismatique. Fig. 13.

Cela posé, suivons la marche des rayons de l'astre S, observé par réflexion; et de la connoissance que nous aurons du cours de ces rayons dans l'hypothèse actuelle que les faces KM, GO du grand miroir ne sont pas parallèles, et forment un angle KBG déjà donné par l'observation (art. 191 du texte), nous chercherons à déduire la différence qu'il y a entre la distance observée et celle SAQ que nous aurions dû observer si les deux faces du grand miroir avoient été parallèles.

Le rayon SE passant de l'air libre dans le verre, se réfracte en se rapprochant suivant ED du *cathète*, c'est-à-dire, d'une droite perpendiculaire sur la face KM du miroir : ce rayon ED va frapper la face opposée GO du miroir, et se réfléchit suivant DI, formant, d'après la loi générale de catoptrique (art. 175 du texte), un angle de réflexion IDO égal à celui d'incidence EDG. Mais sortant en I du verre pour rentrer dans l'air libre, il s'éloigne suivant IQ du ca-

Fig. 13. thète à la surface KM, d'une quantité égale à ce qu'il s'en étoit rapproché dans le premier passage de l'air dans le verre. Enfin ce rayon IQ venant frapper le petit miroir en Q après une double réfraction, se réfléchit dans la direction de l'axe QA de la lunette, ou du rayon visuel LA du second astre observé, puisque, par hypothèse, l'observateur voit coïncider les deux points lumineux S et L, d'où nous supposons que partent respectivement les rayons lumineux SA, LA; donc, d'après le principe de catoptrique (art. 173 du texte), l'angle AQm est égal à celui IQp, puisque le premier de ces deux angles est celui de réflexion correspondant à l'angle d'incidence IQP(*).

Soient représentés par α l'angle de première incidence SEK, par ζ l'angle de première réfraction FEK (**), par δ l'angle de seconde incidence HIM, par ω l'angle de seconde réfraction QIC, par B l'angle KBG des deux faces du grand miroir, par b l'angle INQ formé par les deux miroirs, par c l'angle constant AQN formé par l'axe de la lunette et le petit miroir (***), par x l'angle LAS de distance entre les deux astres, enfin par r le rapport constant du cosinus de l'angle de réfraction FEK à celui de l'angle SEK d'incidence, rapport que l'on sait être $=\frac{20}{31}$ lorsque le rayon de lumière passe de l'air libre dans le verre, et qui, conséquemment, est de $\frac{31}{20}$ lorsque le rayon de lumière sort du verre pour entrer dans l'air libre.

Si les deux faces KM, GO du grand miroir étoient parallèles, on auroit évidemment l'angle de première incidence $\alpha =$ à celui de seconde réfraction ω, puisqu'alors on auroit eu l'angle FEK égal à celui FDG comme correspondans, et, par la même raison, l'angle HIB $=$ à celui HDB: mais, quelle que soit la po-

(*) Quelques auteurs comptent les angles d'incidence et de réflexion depuis le cathète; mais, ainsi que l'ont fait plusieurs géomètres, nous trouvons plus commode, lorsque le corps réfléchissant est un plan, de compter les angles en question depuis le plan même qui réfléchit, et du côté de ce plan vers lequel s'incline le rayon que nous considérons. Si le corps réfléchissant étoit de figure courbe, alors les angles d'incidence et de réflexion seroient comptés suivant la même loi, depuis le plan que contacteroit le corps réfléchissant au point où tomberoit le rayon de lumière.

(**) Ordinairement on apelle *angle de réfraction*, celui SEF formé par les rayons incidant SE et réfractant EF, et on appelle *angle brisé*, celui formé par le cathète et le rayon réfractant, c'est-à-dire, le complément de l'angle FEK, que nous appelons angle de réfraction, et qui n'est, à proprement dire, que la somme de l'angle de vraie réfraction et de celui que nous avons appelé angle d'incidence.

(***) Borda a fait cet angle de 80°.

sition relative des deux faces du miroir, on a toujours l'angle d'incidence FDG sur la face GB égal à l'angle de réflexion HDB; donc, on auroit eu l'angle FEK= à celui HIB ou $\alpha=\omega$, puisque FES=HIQ; mais $\cos.\alpha:\cos.\beta::\cos.\omega:\cos.\delta$; donc à cause de l'égalité de α et de ω, ou de $\cos.\alpha$ et de $\cos.\omega$; on aura de même $\cos.\beta=\cos.\delta$ ou $\beta=\delta$. Ainsi, dans le cas du parallélisme des faces du miroir, l'on auroit aussi eu l'angle de première réfraction égal à l'angle de seconde incidence; de même que l'angle de première incidence auroit été égal à celui de seconde réfraction. Mais à cause que le grand miroir est prismatique, l'on a $\alpha<\omega$ d'une quantité assez petite pour que nous négligions les secondes puissances de $\omega-\alpha$ ou $d\alpha$. De même, l'inclinaison des faces du grand miroir donne $\beta<\delta$, mais d'une quantité assez petite pour que nous négligions les secondes puissances de $\delta-\beta$ ou $d\beta$. Fig. 13.

Il est encore à propos d'observer que si les deux faces du grand miroir avoient été parallèles, nous aurions eu l'angle b formé par les deux miroirs égal au demi-angle des distances formées en A, c'est-à-dire, que nous aurions eu $b=\frac{1}{2}x$ (*). Mais à cause de la figure prismatique du grand miroir, il y a une petite différence entre ces deux quantités, que nous allons chercher à déterminer, afin d'avoir la vraie valeur de x.

Les deux triangles ACE, QCN ayant un angle opposé en C, on a la somme des deux angles CEA+CAE égale à celle CNQ+CQN; donc, $\alpha+x=c+b$; mais l'angle exterieur pQI au triangle IQN nous donne angle pQI ou $c=\omega+b$. Substituant cette valeur de c dans l'équation précédente, on a $\alpha+x=\omega+2b$. Mais $\omega-\alpha=d\alpha$, ou $\omega=\alpha+d\alpha$, donc

$$x=2b+d\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (a).$$

Or, nous avons $\cos.\beta=r\cos.\alpha$, et $\cos.\delta=r\cos.\omega$; donc $\cos.\beta-\cos.\delta=r(\cos.\alpha-\cos.\omega)$, ou $\sin.\frac{\beta+\delta}{2}\sin.\frac{\delta-\beta}{2}=r\sin.\frac{\omega+\alpha}{2}\sin.\frac{\omega-\alpha}{2}$; ou, à cause que δ et β diffèrent fort peu entr'eux, ainsi que α et ω, l'équation précédente se réduira à celle $\sin.\beta\, d\beta=r\sin.\alpha\, d\alpha$. Or, l'angle extérieur EDG au triangle EBD, ou son égal IDB = DEB + DBE; mais IDB = HIB − IBD= δ−B; DEB=β, et DBE=B; donc $\delta-B=\beta+B$, d'où $\delta-\beta$ ou $d\beta=2B$. De plus, CEA ou $\alpha=180^\circ-x-$ECA, et ECA$=180^\circ-c-b$; donc $\alpha=c+b-x$, ou, sans une erreur sensible, $\alpha=c-b$, puisque nous avons vu

(*) Voyez l'article 173 du texte, qui se rapporte également au cercle de réflexion.

que x diffère très-peu de $2b$: nous aurons donc $\cos. \zeta (= r\cos.\alpha) = r\cos.(c-b)$, Fig. 13, et $\sin. \zeta = \sqrt{1 - r^2 \cos.^2 (c-b)}$. Substituant ces valeurs dans l'équation $\sin. \zeta\, d\zeta = r \sin. \alpha\, d\alpha$, on a $d\alpha = \frac{2B\sqrt{1-r^2\cos.^2(c-b)}}{r\sin.(c-b)}$. Enfin, mettant cette valeur de $d\alpha$ dans l'équation (a), on aura $x = 2b + \frac{2B\sqrt{1-r^2\cos.^2(c-b)}}{r\sin.(c-b)} = 2b + 2B \times \sqrt{1 + \frac{1-r^2}{r^2\sin.^2(c-b)}}$; et mettant les valeurs numériques et constantes de $r = \frac{20}{21}$, et de $c = 80°$, on aura

$$x = 2\left(b + B\sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2(80° - b)}}\right):$$

ainsi l'erreur est

$$2B\sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2(80° - b)}} \ldots\ldots (b),$$

pour l'angle $2b$ marqué sur le cercle, et l'observation étant faite à droite, comme la représente la figure 12 du texte ; mais lorsque les deux miroirs sont parallèles, c'est-à-dire, lorsque $b = 0$, alors la formule (b) se réduit à celle

$$2B\sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2 80°}} \ldots\ldots (c).$$

Donc la vraie erreur dans l'observation, et dont il faudra corriger $2b$, ne sera plus que (b) — (c), c'est-à-dire qu'elle sera

$$2B\left(\sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2(80° - b)}} - \sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2 80°}}\right) \ldots\ldots (d).$$

Dans les observations à gauche, il est clair que l'arc $2b$ observé sur le limbe, et placé en delà du point où on le compte, est négatif, et qu'ainsi la correction est négative ; elle est donc alors

$$-2B\left(\sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2 80°}} - \sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2(80° + b)}}\right) \ldots\ldots (e).$$

Enfin, pour les observations croisées qui participent de celles à droite et à gauche, la correction ne sera plus que la moitié de la différence des deux précédentes, c'est-à-dire,

$$B\left(\sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2(80° - b)}} - \sqrt{1 + \frac{1.4025}{\sin.^2(80° + b)}}\right) \ldots\ldots (f),$$

et par conséquent sera beaucoup moindre que chacune des deux autres, c'est ce qui ajoute encore un nouveau titre au mérite du cercle de réflexion,

puisque ce n'est qu'avec cette espèce d'instrument que l'on peut faire des observations croisées. Fig. 15.

Faisant, pour abréger, tang. $M = \frac{\sqrt{1,4025}}{\sin.80^\circ}$; d'où $M = 50^\circ 15' 15''$, on aura $2B\sqrt{1+\frac{1,4025}{\sin.^2 80^\circ}} = \frac{2B}{\cos.50^\circ 15' 15''}$, et supposant que l'angle B d'inclinaison des deux faces du grand miroir est d'une minute, l'on aura $\frac{120''}{\cos.50^\circ 15' 15''} = 187'',7$; donc faisant

$$\text{tang. } X = \frac{\sqrt{1,4025}}{\sin.(80^\circ - b)} \ldots\ldots (g),$$

l'on aura

la correction (d) des observations à droite $= \frac{120''}{\cos. X} - 187''7, \ldots.. (h)$.

De même, faisant

$$\text{tang. } Y = \frac{\sqrt{1,4025}}{\sin.(80^\circ + b)} \ldots\ldots (i),$$

l'on aura

la correction (e) des observations à gauche $= -\left(187'',7 - \frac{120''}{\cos. Y}\right) \ldots.. (k)$.

Enfin, pour les observations croisées, la formule (f) devient $60''\left(\frac{1}{\cos. X} - \frac{1}{\cos. Y}\right)$; donc

la correction (f) pour les observations croisées $= \frac{120'' \sin\left(\frac{X+Y}{2}\right) \sin.\left(\frac{X-Y}{2}\right)}{\cos. X \cos. Y} \ldots. (l)$.

C'est par le moyen des formules (g) et (h) que l'on a calculé la première colonne de la table XIII. L'on s'est servi des formules (i) et (k) pour le calcul de la seconde colonne de la même table. Enfin la troisième colonne de cette table a été calculée en retranchant des résultats de la première colonne ceux qui leur correspondent dans la seconde. Il est aisé de voir que par le moyen de la table XIII, on pourra toujours calculer celle relative à une autre inclinaison des faces du grand miroir; car l'angle d'inclinaison des deux faces du grand miroir étant facteur général dans la formule qui donne la correction, les corrections relatives à des angles différens d'inclinaison des deux faces du grand miroir seront entr'elles comme ces inclinaisons; par conséquent on pourra aisément calculer une table relative à l'erreur du grand miroir du cercle de réflexion dont on se sert. Ainsi, dans l'exemple cité à l'article 191 du texte, il faudroit diminuer tous les nombres de la table XIII dans le rapport de 1' 38'' à 39'', ou prendre les 0,4 de tous les nombres de cette table.

NOTE DIX-HUITIÈME.

De la Déviation et de sa correction.

(Voyez l'article 193.)

Fig. 13. L'ASTRE L vu directement, et celui S vu par réflexion, étant observés en contact; il est évident que le second rayon de réflexion QA de l'astre S devra coïncider avec celui de vision directe LA de l'astre L, c'est-à-dire, avec l'axe de la lunette : donc, soit que le point de contact ait été observé en dehors du milieu des deux fils, c'est-à-dire, hors du plan de l'instrument, en supposant la lunette exactement parallèle avec ce dernier, soit que la lunette dévie de sa vraie position parallèle, le point de contact ayant été observé au milieu des deux fils, chacun des deux astres sera également éloigné du plan de l'instrument, puisque le rayon d'incidence IQ qui est le premier rayon réfléchi, étant dans le même plan que le rayon direct d'incidence SE ou plutôt SI, en supposant les faces du grand miroir parallèles entr'elles, le cathète QR et le second rayon de réflexion ou axe de la lunette QA doivent être dans le même plan. Mais, si par l'un des deux effets précédens, par exemple, celui de la déviation de la lunette qui représente également le premier effet, le point L est hors du plan de l'instrument alors le point d'incidence Q est aussi distant du plan de l'instrument que le point L; car le plan SEIQRLA passant par la droite RQ perpendiculaire sur le plan du miroir pm, est aussi perpendiculaire au plan de ce miroir; donc les droites LQ et RQ sont parallèles au plan de l'instrument. Or, l'on sait que lorsque l'on fait passer un plan par les deux côtés d'un angle parallèle à un autre plan, les deux plans sont parallèles; donc le plan SELQRLA est parallèle au plan de l'instrument; donc, encore, les deux astres S et L sont également distans du plan du cercle avec lequel on observe leurs distances respectives.

Fig. 14. Cela posé, soit AB l'arc du limbe qui mesure la distance observée; élevons des points B et A des arcs de grand cercle BD, AD perpendiculaires sur le plan de l'instrument; il est évident 1.° que ces deux arcs se rencontreront au pôle D de l'arc AB, et que conséquemment l'angle sphérique ADB a pour mesure l'arc

AB; 2.° que les deux astres S et L dont les distances au plan de l'instrument sont les mêmes, se trouveront placés sur les arcs de grands cercles DA, DB; car la déviation ne peut être que dans le sens perpendiculaire au plan de l'instrument, puisque l'axe de la lunette forme toujours un angle constant 80° avec le plan du petit miroir. Fig. 14.

Donc, représentant par a la distance observée AB, par y la distance réelle LS des deux astres, et par δ la déviation AS ou BL, on aura dans le triangle sphérique et isocèle LDS, l'équation cos. D, ou $\cos. a \left(= \frac{\cos. LS - \cos.^2 DS}{\sin.^2 DS}\right) = \frac{\cos. y - \sin.^2 \delta}{\cos.^2 \delta}$; d'où $\cos. y = \cos. a \cos.^2 \delta + \sin.^2 \delta$, ou $1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} y = \cos.^2 \delta - 2 \cos.^2 \delta \sin.^2 \frac{1}{2} a + \sin.^2 \delta$; d'où $\sin.^2 \frac{1}{2} y = \cos.^2 \delta \sin.^2 \frac{1}{2} a$, et par conséquent

$$\sin. \tfrac{1}{2} y = \cos. \delta \sin. \tfrac{1}{2} a \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Par le moyen de cette équation on a la valeur de la distance réelle y, et la retranchant de celle de a, on a l'erreur correspondante à la déviation δ.

L'on pourroit trouver directement cette erreur par une formule assez simple, mais en tant cependant que l'arc mesuré a n'est pas trop grand. En effet, de l'éq. (1) on tire $\sin. \frac{1}{2} y = \sin. \frac{1}{2} a - 2 \sin. \frac{1}{2} a \sin.^2 \frac{1}{2} \delta$; d'où $\sin. \frac{1}{2} a - \sin. \frac{1}{2} y$, ou $d \sin. \frac{1}{2} y = 2 \sin. \frac{1}{2} a \sin.^2 \frac{1}{2} \delta$: et effectuant la différenciation du premier membre, on aura $\frac{1}{2} \cos. \frac{1}{2} y \, dy$, ou $\frac{1}{2} \cos. \frac{1}{2} a \, dy = 2 \sin. \frac{1}{2} a \sin.^2 \frac{1}{2} \delta$; d'où $dy = 4 \,\text{tang.} \frac{1}{2} a \times \sin.^2 \frac{1}{2} \delta$, et sans une erreur sensible, $dy = \delta^2 \,\text{tang.} \frac{1}{2} a$, ou, pour plus de simplicité dans le calcul numérique,

$$dy = \text{tang.} \tfrac{1}{2} a \sin. \delta \times \delta \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

On peut se servir de cette formule jusqu'à une distance observée a de 160°, et 60′ de déviation, ce qui est plus que suffisant dans les observations en mer; car on n'y observe jamais de si grandes distances, et il n'est pas présumable que l'on puisse avoir un degré de déviation.

Pour les distances plus grandes que 160° la formule (2) deviendroit fautive, et même elle exprimeroit une absurdité dans le cas où la distance observée a seroit de 180°, puisqu'elle nous donneroit $dy = \infty$; au lieu que l'on a seulement dans ce cas-là, l'erreur $a - y$ égale au double de la déviation, ainsi qu'il est aisé de le voir par la formule rigoureuse (1) qui, dans le cas de $a = 180°$, donne $\sin. \frac{1}{2} y = \cos. \delta = \sin. (90° - \delta)$; d'où $\frac{1}{2} y = 90° - \delta$, ou $180° - y = 2\delta$.

NOTE DIX-NEUVIÈME.

(Servant de complément au chap. III, liv. III.)

Sur la méthode du calcul de la latitude par deux observations de la hauteur du soleil prises hors du méridien, et sur les corrections qu'il faut lui faire éprouver.

1. La déclinaison D du soleil, les deux hauteurs A et a de cet astre et le temps t écoulé entre les deux observations, étant d'abord considérés comme des quantités constantes, et supposant une petite erreur dl dans la latitude estimée, il est clair que l variant on aura H, h, et par conséquent M, qui varieront en même sens que l; car, en jetant un coup d'œil sur l'équation (56) du texte (article 208), on voit que si l augmente cos. l diminue, et par conséquent que M augmente, et réciproquement. Donc, t étant constant, ce qui donne $d\text{H}=dh=d\text{M}$, on aura par la différenciation de l'équation 58 (art. 208 du texte) par rapport à R, H et l, celle

$$\cos. \text{R}\, d\text{R} = \cos. \text{D}[\cos. l \sin. \text{H}\, d\text{H} - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\text{H} \sin l\, dl] \ldots\ldots (d).$$

Mais l'équation 56 (art. 208 du texte) étant différenciée par rapport à M et l donne, toutes réductions faites,

$$d\text{M} = \text{tang. M tang.}\, l\, dl,$$

ou à cause que $d\text{M}=d\text{H}$, on a

$$d\text{H} = \text{tang. M tang.}\, l\, dl;$$

et, substituant cette valeur de $d\text{H}$ dans l'équation (d), il vient

$$\cos. \text{R}\, d\text{R} = \cos. \text{D} \sin. l\, dl(\sin. \text{H tang. M} - 1 + \cos. \text{H}) \ldots\ldots (e).$$

Mais $\cos. \text{H} = \cos. (\text{M} + \tfrac{1}{2}t) = \cos. \text{M} \cos. \tfrac{1}{2}t - \sin. \text{M} \sin. \tfrac{1}{2}t$, et $\sin. \text{H} = \sin. (\text{M} + \tfrac{1}{2}t) = \sin. \text{M} \cos. \tfrac{1}{2}t + \cos. \text{M} \sin. \tfrac{1}{2}t$; donc, substituant ces valeurs dans l'équation (e), on aura, toutes réductions faites,

$$\cos. \text{R}\, d\text{R} = \cos. \text{D} \sin. l\, dl\left(\frac{\cos. \tfrac{1}{2}t - \cos. \text{M}}{\cos. \text{M}}\right) \ldots\ldots (f).$$

Opérant sur l'équation 59 du texte (art. 208) comme nous l'avons fait sur celle (58), nous trouverions la même équation (f).

2. Tachons maintenant de découvrir les circonstances les plus favorables pour que l'erreur dl en latitude estimée, produise dans le résultat la moindre erreur possible.

Nous avons $\cos\frac{1}{2}t - \cos. \mathrm{M} = 2 \sin.\frac{1}{2}(\frac{1}{2}t + \mathrm{M}) \sin.\frac{1}{2}(\mathrm{M} - \frac{1}{2}t)$, et substituant les valeurs de $\frac{1}{2}t + \mathrm{M} (= \mathrm{H})$ et $\mathrm{M} - \frac{1}{2}t (= h)$ (éq. 57 art. 208 du texte), on aura $\cos.\frac{1}{2}t - \cos. \mathrm{M} = 2 \sin.\frac{1}{2}\mathrm{H} \sin.\frac{1}{2}h$, donc l'éq. ($f$) devient

$$\cos. \mathrm{R}\, d\mathrm{R} = \frac{2\cos. \mathrm{D} \sin. l\, dl \sin.\frac{1}{2}\mathrm{H} \sin.\frac{1}{2}h}{\cos.\frac{1}{2}(\mathrm{H}+h)} \ldots\ldots (g).$$

Mais, représentant par L la latitude calculée, les équations 52 et 55 (art. 196 du texte) dans lesquelles nous représentions respectivement par h et δ la hauteur méridienne, et la déclinaison du soleil que nous représentons maintenant par R et D, nous donneront l'équation

$$\mathrm{R} = 90^\circ + \mathrm{D} - \mathrm{L} \ldots\ldots (h),$$

dans laquelle la déclinaison D devra être prise positive ou négative, suivant qu'elle est de même dénomination (éq. 52), ou de dénomination différente (éq. 55) que la latitude L.

De même l'équation 53 du texte qui suppose l'astre entre le zénith et le pôle, nous donne, en nous servant de la même notation que précédemment,

$$\mathrm{R} = 90^\circ + \mathrm{L} - \mathrm{D} \ldots\ldots (i).$$

Quant à l'équation 54 du texte, nous n'en ferons pas mention, puisqu'elle ne présente que le cas du passage inférieur d'un astre toujours visible au méridien, et qui conséquemment à son passage supérieur rentre dans les cas précédens.

Des équations h et i on tire $\cos. \mathrm{R} = \pm \sin.(\mathrm{L} - \mathrm{D})$, le signe $+$ pour la première, le signe $-$ pour la seconde; donc $\cos. \mathrm{R}\, d\mathrm{R} = \pm \sin.(\mathrm{L} - \mathrm{D})\, d\mathrm{R}$. Mais les équations ($h$) et ($i$) étant différenciées, on a $d\mathrm{R} = \mp d\mathrm{L}$, le signe supérieur pour la première et l'inférieur pour la seconde; donc, pour les deux cas indiqués par les équations (h) et (i), on a également

$$\cos. \mathrm{R}\, d\mathrm{R} = -\sin.(\mathrm{L} - \mathrm{D})\, d\mathrm{L} \ldots\ldots (k).$$

Egalant cette valeur de $\cos. \mathrm{R}\, d\mathrm{R}$ avec celle donnée par l'équation (g), on a

$$d\mathrm{L} = -\frac{2\cos. \mathrm{D} \sin. l \sin.\frac{1}{2}\mathrm{H} \sin.\frac{1}{2}h\, dl}{\sin.(\mathrm{L} - \mathrm{D}) \cos.\frac{1}{2}(\mathrm{H}+h)} \ldots\ldots (l)\ (*).$$

(*) Il ne faut pas perdre de vue que ce n'est que pour éviter l'ambiguité des signes que nous con-

Cette équation diffère assez essentiellement de celle que Mendoza a donnée dans son mémoire (pag. 293 de la *Connoissance des temps* de 1793), où ce géomètre met sin. H sin. h au lieu de sin. $\frac{1}{2}$ H sin. $\frac{1}{2}h$, ce qui au reste, ne peut être qu'une faute d'impression.

3. En examinant notre équation (l), nous en conclurons, 1.° que dL et dl sont de signes contraires lorsque les deux observations sont faites du même côté du méridien, et de même signes lorsque l'on observe des deux côtés du méridien, puisque dans ce dernier cas sin. $\frac{1}{2}h$ est négatif;

2.° Que l'erreur est moins forte lorsque les observations sont faites des deux côtés du méridien, puisque cos. $\frac{1}{2}(H-h)>$ cos. $\frac{1}{2}(H+h)$, et que conséquemment il convient, autant que cela est possible, de faire les observations à des heures qui soient également distantes du midi estimé, ou autrement dit, de tâcher d'observer le soleil l'après-midi à une même hauteur que le matin.

3.° Que l'erreur est nulle quand l'une des deux hauteurs a été observée dans le méridien, puisqu'alors on a sin. $\frac{1}{2}$ H ou sin. $\frac{1}{2}h=0$; et que conséquemment il convient de rapprocher le plus possible du méridien l'observation de la plus grande hauteur A.

4.° Qu'il convient de faire les deux observations près du méridien, puisque dL est en raison directe de sin. $\frac{1}{2}$ H sin. $\frac{1}{2}h$, et en raison inverse de cos. $\frac{1}{2}(H\pm h)$, h étant considéré comme postif et négatif.

5.° Que la circonstance la plus défavorable à la méthode est celle où le soleil est près du zénith de l'observateur, puisqu'alors sin. (L—D) est fort petit.

6.° Que la méthode est d'autant plus exacte, que la déclinaison du soleil est grande et que la latitude en diffère davantage, puisqu'alors cos. D diminue et que sin. (L—D) augmente. A plus forte raison la méthode est bonne lorsque la déclinaison est de dénomination différente de la latitude, et qu'elle est à peu près son complément, puisqu'alors le facteur sin. (L—D) du dénominateur devient sin. (L+D) et se rapproche de l'unité à mesure que L+D se rapproche de 90°;

7.° Que les petites latitudes sont favorables à la méthode lorsque la déclinai-

---

sidérons D et h comme positifs. Mais si D est de dénomination différente de la latitude de l'observateur, et si h n'est pas du même côté que H, ces quantités seront négatives, et alors il faudra changer les signes qui les précèdent, ou qui précèdent leur sinus et tangente; mais il ne faudra pas changer les signes qui précèdent les cosinus, puisque l'on sait que le cosinus d'un arc négatif est positif.

son est de dénomination différente, parce qu'alors le facteur $\frac{\sin.\frac{1}{2}l}{\sin.(L+D)}$ devient plus petit. Cet avantage n'auroit pas lieu, si la déclinaison D étoit de même dénomination que la latitude L (cinquième conclusion).

4. De l'équation (l) on tire la proportion $dL:dl::P:1$, en faisant

$$P=-\frac{2\cos.D\sin.l\sin.\frac{1}{2}H\sin.\frac{1}{2}h}{\sin.(L-D)\cos.\frac{1}{2}(H+h)}\ldots\ldots(m);$$

$$\text{donc } dl-dL:dL::1-P:P::\tfrac{1}{P}-1:1,$$

d'où

$$dL=\frac{dl-DL}{\frac{1}{P}-1}\ldots\ldots(n).$$

Or, remarquons qu'en représentant par L′ la latitude vraie du vaisseau, on a $L'-l=dl$; mais $L'=L+dL$, donc $L+dL=l+dl$, d'où $dl-dL=L-l$.

Substituant cette valeur de $dl-dL$ dans l'équation (n), on a

$$dL=\frac{L-l}{\frac{1}{P}-1}\ldots\ldots(o).$$

5. Supposant maintenant l, H et h variables, mais M constant; on aura évidemment l'intervalle de temps t variable (éq. 57). Donc, différenciant l'éq. (56) (art. 208 du texte), par rapport à l et t, ce qui donne

$$d\tfrac{1}{2}t=dl\,\text{tang.}\,l\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}t,$$

et substituant à la place de $d\frac{1}{2}t$ sa valeur dH (première équation du groupe 57), on aura

$$dH=dl\,\text{tang.}\,l\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}t,$$

et mettant cette valeur de dH dans l'équation (d) (art 1 de cette note), qui est la même dans cette nouvelle hypothèse, puisqu'elle est indépendante de M et de t, et que l'on a dans l'une et l'autre hypothèse H et l variables, on aura

$$\cos.R\,dR=\cos.D\sin.l[\sin.H\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}t-1+\cos.H].$$

Substituant dans cette dernière équation les valeurs de $\sin.H=\sin.M\cos.\frac{1}{2}t+\cos.M\sin.\frac{1}{2}t$, et $\cos.H=\cos.M\cos.\frac{1}{2}t-\sin.M\sin.\frac{1}{2}t$, il vient, toutes réductions faites,

$$\cos.R\,dR=\cos.D\sin.l\,dl\left(\frac{\cos.M-\cos.\frac{1}{2}t}{\cos.\frac{1}{2}t}\right).\ \ldots\ldots(p).$$

Mais $\cos. M - \cos. \tfrac{1}{2} t = -2 \sin. \tfrac{1}{2}(M + \tfrac{1}{2} t) \sin. \tfrac{1}{2}(M - \tfrac{1}{2} t) = -2 \sin. \tfrac{1}{2} H \sin \tfrac{1}{2} h$, et $\tfrac{1}{2} t = \frac{H-h}{2}$; donc

$$\cos. R\, dR = \frac{-2 \cos. D \sin. l \sin. \tfrac{1}{2} H \sin. \tfrac{1}{2} h\, dl}{\cos. \tfrac{1}{2}(H-h)}:$$

égalant cette valeur de $\cos. R\, dR$ avec celle donnée par l'équation (k), il vient

$$dL = \frac{2 \cos. D \sin l \sin. \tfrac{1}{2} H \sin. \tfrac{1}{2} h\, dl}{\sin. (L-D) \cos. \tfrac{1}{2}(H-h)} \;.\;.\;.\;.\;.\; (q).$$

6. Comparant cette dernière équation avec celle (l) (art. 2), l'on voit que l'erreur dl influe en sens inverse lorsqu'on suppose M constante, ce qui donne t variable, de ce qu'elle faisoit lorsqu'on supposoit t constant, ce qui donnoit M variable.

7. Dans le dernier cas que nous venons d'examiner, et qui a donné lieu à l'équation (q), l'erreur est moins forte que dans le premier, d'où est résultée l'équation (l), lorsque les observations sont faites du même côté du méridien: mais c'est le contraire lorsque les deux observations sont faites l'une avant et l'autre après midi.

8. Puisqu'en se servant de la méthode de Douwes pour déterminer la latitude, on mesure avec beaucoup d'attention, sur une bonne montre, l'intervalle de temps écoulé entre les deux observations, et que cet intervalle n'est pas bien long; il est à présumer qu'on ne commet qu'une erreur insensible dans la mesure de l'intervalle, et que celles commises dans les angles horaires influent presque entièrement sur l'angle horaire moyen M. Ainsi, c'est de la seule équation (l) dont on doit se servir dans la correction de la latitude calculée.

9. Cependant, nous allons examiner l'effet d'une petite erreur dans l'intervalle de temps écoulé entro les deux observations.

En différenciant l'équation (56) par rapport à M et t, on a

$$2 \cos. M\, dM \sin. \tfrac{1}{2} t = -\cos. \tfrac{1}{2} t \sin. M\, dt.$$

Mais de la seconde des deux équations (57), on tire $dM = dh + \tfrac{1}{2} dt$, donc substituant cette valeur dans l'équation précédente, il viendra $2 \cos. M\, dh \sin. \tfrac{1}{2} t + \cos. M\, dt \sin. \tfrac{1}{2} t = -\cos. \tfrac{1}{2} t \sin. M\, dt$, ou $dh = \frac{-dt \sin. (\tfrac{1}{2} t + M)}{2 \cos. M \sin. \tfrac{1}{2} t}$; mais $\tfrac{1}{2} t + M = H$, $M = \tfrac{1}{2} H + \tfrac{1}{2} h$ et $\tfrac{1}{2} t = \tfrac{1}{2} H - \tfrac{1}{2} h$; donc $dh = \frac{-dt \sin. H}{2 \cos. (\tfrac{1}{2} H + \tfrac{1}{2} h) \sin. (\tfrac{1}{2} H - \tfrac{1}{2} h)}$; ou

$$dh = \frac{-dt \sin. H}{\sin. H - \sin. h} \;.\;.\;.\;.\;.\; (r).$$

Actuellement, différenciant l'équation 59 du texte (art. 208) par rapport à R et h, on a $\cos. R\,dR = \cos. D \sin. h \cos. l\,dh$, et mettant dans cette dernière équation la valeur $-\sin. (L-D)dL$ de $\cos. R\,dR$ (éq. k art. 2), et celle de dh (éq. r), on a

$$dL = \frac{\cos. D \cos. l \sin. h \sin. H\,dt}{\sin. (L-D)(\sin. H - \sin. h)},$$

ou développant $\sin. (L-D)$, et divisant haut et bas par $\cos. D \cos. L$, en considérant $\cos. L$ comme étant égal à $\cos. l$, ce qui peut se faire sans une erreur sensible, lorsqu'il ne s'agit que de trouver la valeur d'une correction dL, on aura

$$dL = \frac{\sin. H \sin. h\,dt}{(\text{tang}. L - \text{tang}. D)(\sin. H - \sin. h)} \quad \ldots \quad (s).$$

De cette équation nous tirerons les conclusions suivantes :

1.° Que l'influence de l'erreur dans l'intervalle t du temps est opposée à celle de la latitude estimée.

2.° Que l'erreur est moins forte lorsque les deux observations sont faites des deux côtés du méridien, puisque $(\sin. H + \sin. h) > (\sin. H - \sin. h)$, ce qui est conforme à la seconde conclusion de l'article 3.

3.° Même conclusion que la troisième de l'article 3.

4.° Qu'il convient de mettre beaucoup d'intervalle entre les deux observations, afin de rendre d'autant plus grand $\sin. H - \sin. h$, ce qui est une conclusion à peu près opposée à la quatrième de l'article 3.

5.° Même conclusion que la cinquième de l'article 3.

6°. Que l'influence de l'errenr dans l'intervalle de temps est d'autant moins forte, que la latitude est grande, et que la déclinaison est petite, lorsque les observations sont faites du même côté du méridien, ou que la déclinaison est grande, lorsque l'une des observations est faite avant midi et l'antre après.

Opérant sur l'équation 58, comme nous l'avons fait sur celle 59, on retrouvera l'équation (s).

10. Proposons-nous maintenant de trouver l'influence des erreurs dans les hauteurs de l'astre.

Puisque là hauteur d'un astre dans un instant quelconque, est fonction de son angle horaire pour le même instant ; il est clair que nous ne pouvons supposer une erreur dans l'une des deux hanteurs A, sans qu'en même temps nous ne considérions l'angle horaire correspondant h comme variable : donc t étant constant, M variera. Cela posé, différenciant l'équation 56 (art. 208 du texte),

par rapport aux variables M et A, on aura $dM = \frac{\cos. A\, dA}{2 \cos. M \sin. \frac{1}{2} t \cos. D \cos. l}$. Mais $dM = dh$ (seconde des deux éq. 57, art. 208 du texte), et $2 \sin. \frac{1}{2} t \cos. M = 2 \sin. \left(\frac{H-h}{2}\right) \cos. \left(\frac{H+h}{2}\right) = \sin. H - \sin. h$, donc

$$dM = \frac{\cos. A\, dA}{(\sin. H - \sin. h) \cos. D \cos. l} \ldots\ldots (t).$$

Différenciant l'équation (59) par rapport à R, A et h, on a $\cos. R\, dR = \cos. A\, dA + \cos. D \cos. l \sin. h\, dh$. Substituant dans cette équation la valeur de $\cos. R\, dR = - dL \sin. (L - D)$ (éq. k, art. 2), et celle de dh donnée par l'éq. (t), on a, toutes réductions faites,

$$dL = \frac{-\sin. H \cos. A\, dA}{\sin. (L-D) (\sin. H - \sin. h)} \ldots\ldots (u).$$

Différenciant l'équation (56) (art. 208 du texte), par rapport à M et a, il vient $dM = \frac{-\cos. a\, da}{2 \cos. M \sin. \frac{1}{2} t \cos. D \cos. l}$, ou $dh = \frac{-\cos\, a\, da}{(\sin. H - \sin. h) \cos. D \cos. l}$; mais l'équation 59 différenciée par rapport à R et h, donne $\cos. R\, dR = \cos. D \cos. l \times \sin. h\, dh$; et faisant dans cette dernière équation, les substitutions de la valeur de $\cos. R dR = - dL \sin. (L - D)$, et de celle de dh trouvée précédemment, on a

$$dL = \frac{\sin. h \cos. a\, da}{\sin. (L-D) (\sin\, H - \sin. h)} \ldots\ldots (v).$$

Les deux équations (u) et (v) nous apprennent que les effets des erreurs commises dans les observations des deux hauteurs A et a, sont en sens contraires lorsqu'on les fait du même côté du méridien; et en même sens lorsque l'on observe avant et après midi.

Voyons maintenant ce que nous donnera l'équation 58 du texte.

Différenciant l'équation (56) par rapport à M et A, et mettant à la place de dM et de $\cos. M \sin. \frac{1}{2} t$, les valeurs respectives dH et $\frac{1}{2} (\sin. H - \sin h)$ de ces quantités déduites des équations 57 du texte, on a

$$dH = \frac{\cos. A\, dA}{\cos. D \cos. l (\sin. H - \sin. h)} \ldots\ldots (x).$$

Mais l'équation 58 du texte étant différenciée par rapport à R et à H, donne, après toutes les substitutions convenables, $dL = \frac{-\cos. D \cos. l \sin. H\, dH}{\sin. (L-D)}$; donc substituant la valeur trouvée ci-dessus à dH (éq. x), on retrouvera l'équation (u).

Différenciant l'équation 56 par rapport à M et à a, et substituant à la place de

dM et de $\cos. M \sin. \frac{1}{2} t$ les valeurs respectives dH et $\frac{1}{2}$ $(\sin. H - \sin. h)$ de ces quantités, on a $dH = \frac{-\cos. a\, da}{\cos. D \cos. l (\sin. H - \sin. h)}$. Or, l'équation 58 du texte différenciée par rapport à R, a et H donne $dL \sin. (L - D) = -\cos. a\, da - \cos. D \times \cos. l \sin. H\, dH$; donc $dL \sin. (L - D) = -\cos. a\, da + \frac{\sin. H \cos. a\, da}{\sin. H - \sin. h}$, d'où on déduit l'équation (ν).

De ce que nous venons de démontrer, nous conclurons avec le docteur Pemberton, et contre l'opinion de Mendoza, qu'il est, géométriquement parlant, égal pour l'exactitude de la méthode de se servir de l'équation 58 ou de l'équation 59.

11. (*) « La déclinaison du soleil pouvant varier assez considérablement dans » l'intervalle de temps entre les deux observations, il est à propos d'avoir égard » à cette variation; pour cela, les mêmes suppositions de la figure 36 du texte » existant pour la fig. 15 des notes, et supposant de plus que le parallèle de (Fig. 15.) » l'astre en A soit éloigné du premier en a d'une quantité fort petite Am; » menons AS perpendiculaire à PQ, prolongeons $A'a$ et Fa, et prenons $A'n =$ » AF, ce qui donne $Aa : A'a :: \cos. l : \cos. (l \mp Aam)$, le signe supérieur quand » le soleil s'approche du pôle élevé, le signe inférieur dans le cas contraire; » ou à cause que l'angle Aam est très-petit, on aura $Aa : A'a :: \cos. l : \cos. l \pm$ » $Aam \sin. l$, d'où $A'a = Aa \pm Aa . Aam \operatorname{tang}. l$; mais $Aam = \frac{Am}{Aa}$; donc $A'a$ » $= Aa + Am \operatorname{tang}. l$. Représentant par D' la déclinaison en A, on aura $ma =$ » $Aa = AS - as = \cos. h \cos. D' - \cos. H \cos. D$; et comme $D = D' \mp dD$ (le » signe supérieur lorsque la déclinaison augmente, et le signe inférieur dans le » cas contraire), on aura $Aa = \cos. D' (\cos. h - \cos. H) \mp dD \sin. D' \cos. H =$ » $2 \cos. D' \sin. M \sin. \frac{1}{2} t \mp dD \sin. D' \cos. H$; et substituant dans l'équation ci- » dessus $A'a = \frac{\sin. A - \sin. a}{\cos. l} = 2 \cos. D' \sin. M \sin. \frac{1}{2} t \pm Am \operatorname{tang} l \mp dD \sin. D' \times$ » $\cos. H$, d'où il résulte $\sin. M = \frac{\sin. A - \sin. a}{2 \cos. l \cos. D' \sin. \frac{1}{2} t} \mp \frac{Am \operatorname{tang}. l}{2 \cos. D' \sin \frac{1}{2} t} \pm \frac{dD \sin. D' \cos. H}{2 \cos. D' \sin. \frac{1}{2} t}$. » Et, substituant l'expression de $Am = dD \cos. D$, on aura $\frac{1}{2} dD (\mp \operatorname{tang}. l \operatorname{cos\acute{e}c}. \frac{1}{2} t$ » $\pm \operatorname{tang}. D' \cos. H \operatorname{cos\acute{e}c}. \frac{1}{2} t)$ pour la correction à faire à la valeur de sin. M » trouvée par le calcul ordinaire ».

Donc, représentant par $d \sin. M$ la différence de sin. M trouvée par le calcul

(*) Tout ce qui est indiqué par des guillemets est tiré du mémoire de Mendoza.

au vrai sin. M, on aura d sin. $M = \mp \frac{dD}{2 \sin. \frac{1}{2} t}$ (tang. l — tang. D' cos. H), ou

$$dM = \mp \frac{dD \tan. l}{2 \cos. M \sin. \frac{1}{2} t} \left(1 - \frac{\tan. D' \cos. H}{\tan. l}\right).$$

12. Or, il est évident que tant que D' ne sera pas plus grand que l, ce qui aura toujours lieu lorsqu'on naviguera hors de la zone torride, on aura l'inégalité $\frac{\tan. D' \cos. H}{\tan. l} < 1$; donc faisant

$$\cos. K = \sqrt{[\tan. D' \cos. H \cot. l]} \ldots\ldots (y),$$

on aura, pour corriger l'angle horaire moyen M, la formule

$$dM = \mp \frac{dD \sin.^2 K}{2 \cos. M \cot. l \sin. \frac{1}{2} t} \ldots\ldots (z).$$

13. Si tang. D cos. H cot. l est > 1, ce qui n'a jamais lieu hors de la zone torride, et même est extrêmement rare lorsqu'on navigue entre les tropiques, on fera

$$\cos. K = \frac{1}{\sqrt{[\tan. D' \cos. H \cot. l]}} \ldots\ldots (a'),$$

et on aura

$$dM = \frac{\pm dt \tan.^2 K}{2 \cos. M \sin. \frac{1}{2} t \cot. l} \ldots\ldots (b').$$

14. Ayant M, on aura l'angle horaire moyen corrigé de l'erreur résultante du changement en déclinaison, que je représente par M', par le moyen de l'équation

$$M' = M \pm dM \ldots\ldots (c');$$

et représentant par M'' le vrai angle moyen, on aura

$$\sin. M'' = \frac{\sin. M' \cos. l}{\cos. L'} \ldots\ldots (d');$$

d'où, représentant par h' le vrai petit angle horaire, on conclura l'équation

$$h' = M'' - \tfrac{1}{2} t \ldots\ldots (e'),$$

qui servira à connoître l'heure vraie du vaisseau à l'instant de l'observation de la plus grande hauteur du soleil.

NOTE VINGTIÈME.

(Complément au chap. IV, liv. III.)

Fig. 37 du texte.

1. LES côtés PE et PE′ ou D et D′ du triangle sphérique PE′E étant constans, on a $\frac{dEE'}{dA} = \sin. D \sin. PEE' = \frac{\sin. D \sin. D' \sin. A}{\sin. EE'}$; et à cause que D et D′ diffèrent fort peu dans le petit intervalle de temps A, nous pourrons considérer, sans une erreur sensible pour le calcul des variations des parties variables du triangle PE′E, ce dernier triangle comme étant isocèle, c'est ce que nous ferons dans toute cette note, et qui nous donnera

$$\frac{dEE'}{dA} = \frac{\sin. A \sin.^2 D}{\sin. EE'} \; \ldots\ldots (a).$$

Mais dans le triangle PEE′, considéré comme isocèle, on a

$$\cos. EE' = \cos.^2 D + \sin.^2 D \cos. A = 1 - 2 \sin.^2 D \sin.^2 \tfrac{1}{2} A\text{; d'où } \sin. EE' = \sqrt{4 \sin.^2 D \sin.^2 \tfrac{1}{2} A - 4 \sin.^4 D \sin.^4 \tfrac{1}{2} A} = 2 \sin. D \sin. \tfrac{1}{2} A \sqrt{1 - \sin.^2 D \sin.^2 \tfrac{1}{2} A}$$
$$= 2 \sin. D \sin. \tfrac{1}{2} A \left[1 - \tfrac{1}{2} \sin.^2 D \sin.^2 \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{8} \sin.^4 D \sin.^4 \tfrac{1}{2} A - \text{etc.}\right];$$

ou en négligeant les termes affectés des puissances de $\sin. D \sin. \frac{1}{2} A$ supérieures à la seconde, ce qui ne peut causer une erreur sensible dans l'espèce de calcul dont nous nous occupons, puisque A n'excède pas ordinairement 2 heures ou 30° (*), on aura

$$\sin. EE' = 2 \sin. D \sin. \tfrac{1}{2} A \; \ldots\ldots (b).$$

(*) En supposant, pour le cas le plus désavantageux, $A = 30°$ et $D = 90°$, l'équation (b) deviendra $\sin. EE' = 2 \sin. 15°$; et si l'on n'avoit pas négligé la troisième puissance de $\sin. \frac{1}{2} A$, on auroit eu $\sin. EE' = 2 \sin. 15° - \sin.^3 15°$; donc, pour le premier cas, l'équation (a) devient $dEE' = \cos. 15° dA$; et pour le second on a $dEE' = \frac{2 \sin. 15° \cos. 15° dA}{2 \sin. 15° - \sin.^3 15°} = \frac{\cos. 15° dA}{1 - \frac{1}{2} \sin.^2 15°} = \frac{\cos. 15° dA}{1 - \frac{1 - \cos. 30°}{4}}$ $= \frac{4 \cos. 15° dA}{3 + \cos. 30°}$; donc la différence entre ces deux valeurs de dEE' est $\frac{(4 \cos. 15° - 3 \cos. 15° - \cos. 15° \cos. 30°) dA}{3 + \cos. 30°} = \frac{\cos. 15° (1 - \cos. 30°) dA}{3 + \cos. 30°} = \frac{2 \sin.^2 15° \cos. 15° dA}{3 + \cos. 30°}$

Fig. 57 du texte.

Substituant cette valeur dans l'équation (*a*), on aura $\frac{d\text{EE}'}{d\text{A}} = \frac{\sin.\text{A}\sin.\text{D}}{2\sin.\frac{1}{2}\text{A}}$, ou

$$\frac{d\text{EE}'}{d\text{A}} = \cos.\tfrac{1}{2}\text{A}\sin.\text{D} \ldots\ldots (c).$$

Les formules différentielles trigonométriques donnent l'équation $\frac{d\text{PE}'\text{E}}{d\text{A}} = -\frac{\sin.\text{PE}'\text{E}\cos.\text{PEE}'}{\sin.\text{A}}$; ou, à cause que nous considérons le triangle PEE' comme isocèle, nous aurons

$$d\text{PE}'\text{E} = \frac{\sin.2\text{PE}'\text{E}d\text{A}}{2\sin.\text{A}}.$$

Mais $\sin.\text{PE}'\text{E} = \frac{\sin.\text{D}\sin.\text{A}}{\sin.\text{EE}'} = \frac{\sin.\text{A}}{2\sin.\frac{1}{2}\text{A}} = \cos.\frac{1}{2}\text{A}$, d'où $\cos.\text{PE}'\text{E} = \sin.\frac{1}{2}\text{A}$, et

$$d\text{PE}'\text{E} = -\tfrac{1}{2}d\text{A} \ldots\ldots (d).$$

Chassant le dénominateur de l'éq. *d* (art. 216 du texte), et substituant à la place de cos. EE' et de sin. EE' les valeurs respectives $1 - 2\sin.^2\text{D}\sin.^2\frac{1}{2}\text{A}$ et $2\sin.\text{D}\sin.\frac{1}{2}\text{A}$ de ces quantités, nous aurons l'équation $2\cos.\text{E}'\sin.\text{D}\sin.\frac{1}{2}\text{A}\cos.\text{ZE}'\text{E} = 2\sin.\text{E}'\sin.^2\text{D}\sin.^2\frac{1}{2}\text{A} + \sin.\text{E} - \sin.\text{E}'$; laquelle étant différenciée par rapport à ZE'E et A, nous donnera $\cos.\text{E}'\sin.\text{D}\cos.\text{ZE}'\text{E}\cos.\frac{1}{2}\text{A}d\text{A} - 2\cos.\text{E}'\sin.\text{D}\sin.\frac{1}{2}\text{A}\sin.\text{ZE}'\text{E}d\text{ZE}'\text{E} = 2\sin.\text{E}'\sin.^2\text{D}\sin.\frac{1}{2}\text{A}\cos.\frac{1}{2}\text{A}d\text{A}$, d'où

$$d\text{ZE}'\text{E} = \left(\tfrac{1}{2}\cot.\text{ZE}'\text{E}\cot.\tfrac{1}{2}\text{A} - \frac{\text{tang.E}'\sin.\text{D}\cos.\frac{1}{2}\text{A}}{\sin.\text{ZE}'\text{E}}\right)d\text{A} \ldots\ldots (e).$$

Mais l'équation (*s*) (art. 216 du texte) étant aussi différenciée par rapport à L, ZE'E et PE'E, donne

$$d\text{L} = -\frac{\cos.\text{E}'\sin.\text{D}'\sin.\text{ZE}'\text{P}[d\text{ZE}'\text{E} - d\text{PE}'\text{E}]}{\cos.\text{L}}.$$

Or, représentant par H' l'angle horaire ZPE' de l'astre E' lorsqu'il est le plus près du méridien, on a $\sin.\text{ZE}'\text{P} = \frac{\sin.\text{H}'\cos.\text{L}}{\cos.\text{E}'}$; de plus, on a

$$d\text{ZE}'\text{E} - d\text{PE}'\text{E} = \tfrac{1}{2}\left(\cot.\text{ZE}'\text{E}\cot.\tfrac{1}{2}\text{A} + 1 - \frac{2\,\text{tang.E}'\sin.\text{D}\cos.\frac{1}{2}\text{A}}{\sin.\text{ZE}'\text{E}}\right)d\text{A};$$

$= \frac{\sin.30°\sin.15°d\text{A}}{3+\cos.30°} = \frac{\sin.15°d\text{A}}{6+\sqrt{3}} = 0{,}0335d\text{A}$. Ainsi, en supposant $d\text{A}$ de 10 secondes de temps, ou de 150" de degrés, ce qui ne peut guère arriver lorsqu'on mesure l'intervalle de temps sur une bonne montre, on auroit pour $d\text{EE}'$ une erreur d'environ 5", ce qui ne peut produire une erreur bien sensible dans les calculs où nous emploîrons $d\text{EE}'$. D'ailleurs, toutes ces suppositions sont exagérées, et pour se rapprocher davantage de ce qui peut arriver ordinairement, si on ne supposoit pas D = 90°, et qu'on fît DA d'environ 4" de temps, on ne trouveroit pas 2 secondes de degré d'erreur.

donc

$$dL = \frac{1}{2}\sin.D'\sin.H'\left(\frac{\text{tang}.E'\sin.D\sin.A - \cos.ZE'E\cos.\frac{1}{2}A}{\sin.ZE'E\sin.\frac{1}{2}A} - 1\right)dA \ldots\ldots (f).$$ Fig. 37 du texte.

D'où nous conclurons que lorsqu'on emploie dans la méthode que nous examinons, les observations de deux hauteurs du soleil, il faut 1.° que la plus grande hauteur E' soit observée le plus près possible du méridien, afin de diminuer sin. H';

2.° Que les grandes déclinaisons sont favorables, puisque cela rend le facteur sin. D' plus petit;

3.° Qu'il est à propos que l'angle ZE'E diffère peu d'un angle droit, lorsque cet angle est obtus, ce qui arrive le plus souvent; car, alors le numérateur tang. E' sin. D sin. A + sin. (ZE'E — 90°) cos. $\frac{1}{2}$A devient plus petit, et le dénominateur sin. (180 — ZE'E) sin. $\frac{1}{2}$A devient plus grand. Ainsi, il faut faire en sorte que dans l'éq. δ de l'art. 216 du texte, la quantité sin. E' cos. EE', ou sin. E' — 2 sin. E' sin.$^2 \frac{1}{2}$A sin.^{2}D diffère peu de sin. E, ou plus simplement, que la quantité sin. $\frac{1}{2}$(E' — E) ne diffère guère de celle tang. E' sin.$^2 \frac{1}{2}$A sin.^{2}D. Ceci n'a lieu qu'en tant que la quantité fractionnaire est > 1; ce seroit le contraire si la quantité fractionnaire étoit < 1.

2. Cette erreur dA n'est à craindre que lorsque l'on se sert de deux hauteurs du soleil. Mais elle ne peut avoir sensiblement lieu lorsque l'on observe simultanément les hauteurs de deux étoiles; il est vrai qu'alors on a à craindre une plus grande erreur dans les hauteurs des astres, puisque les observations des hauteurs des étoiles sont plus difficiles que celle du soleil. Voyons donc quelle est l'influence de l'erreur dans l'une des deux hauteurs, par exemple celle E dans le calcul de la latitude.

Les quantités EE' et PE'E étant indépendantes de la hauteur des astres, nous les regarderons comme constantes, et passant à l'équation (δ) de l'article 216 du texte, nous la différencierons par rapport à ZE'E et E, ce qui donne

$$dZE'E = \frac{-\cos.EdE}{\sin.ZE'E\cos.E'\sin.EE'} = \frac{-\cos.EdE}{2\cos.E'\sin.ZE'E\sin.D\sin.\frac{1}{2}A} \ldots\ldots (g)$$

Différenciant maintenant l'équation (ι) de l'article 216 du texte par rapport à L et ZE'E, on a $dL = \frac{-\cos.E'\sin.D'\sin.(ZE'E - PE'E)dZE'E}{\cos.L}$; mais sin. (ZE'E — PE'E) ou sin. ZE'P $= \frac{\sin.H'\cos.L}{\cos.E'}$ (art. 1); donc $dL = -\sin.H'\sin D'dZE'E$; et en substituant la valeur de $dZE'E$, on aura

$$dL = \frac{\sin.H'\cos.EdE}{2\cos.E'\sin.ZE'E\sin.\frac{1}{2}A} \ldots\ldots (h).$$

D'où l'on voit que, pour rendre cette influence la plus petite possible, il faut 1.° que l'étoile E' soit peu éloignée du méridien, afin de rendre sin. H' plus petit;

Fig. 37 du texte.

2.° Que l'étoile E la plus éloignée du méridien soit aussi la plus haute, afin de rendre $\frac{\cos. E}{\cos. E'} < 1$;

3.° Que l'angle ZE'E diffère le moins possible d'un angle droit, comme à l'article 1;

4.° Que la différence A d'ascension droite entre les deux astres soit grande, afin d'augmenter sin. $\frac{1}{2}$A.

Remarque. Il est clair que, pour le soleil, la seconde condition $\frac{\cos. E}{\cos. E'} < 1$, ne peut exister. Ainsi, une erreur dans la première hauteur du soleil est plus à craindre, lorsque l'on se sert dans la méthode de ce dernier astre, que la même erreur dans la hauteur de l'étoile la plus éloignée du méridien, lorsque l'on emploie les hauteurs de deux étoiles.

3. La méthode enseignée au chapitre IV du livre III, et que nous examinons dans cette note, offroit deux manières de calculer, soit, en calculant dans le triangle EPE' le côté EE' et l'angle PE'E; dans le triangle E'ZE l'angle ZE'E; enfin dans le triangle E'ZP, le côté ZP, comme nous l'avons fait au chapitre IV cité précédemment; soit en calculant dans le triangle E'PE le côté EE' et l'angle PEE'; dans le triangle E'ZE l'angle ZEE'; et enfin dans le triangle EZP, où l'on connoîtra les côtés ZE, PE et l'angle ZEP = PEE' — ZEE', le côté ZP. Il est aisé de voir que ces deux calculs sont également bons, et doivent mener aux mêmes résultats. Les équations de ce second calcul seront, non comprise l'équation (α) de l'article 216 du texte qui reste la même,

$$\cot. PEE' = \frac{\cot. D' \sin. D - \cos. A \cos. D}{\sin. A} \quad \ldots\ldots (\gamma')$$

$$\cos. ZEE' = \frac{\sin. E' - \sin. E \cos. EE'}{\cos. E \sin. EE'} \quad \ldots\ldots (\delta')$$

$$\sin. L = \sin. E \cos. D + \cos. E \sin. D \cos. (PEE' - ZEE') \quad \ldots\ldots (\varepsilon').$$

Différenciant l'équation (δ') par rapport à ZEE' et E', on a

$$dZEE' = \frac{-\cos. E' dE'}{2 \cos. E \sin. ZEE' \sin. D \sin. \frac{1}{2}A}.$$

Mais dans le triangle ZE'E on a $\sin. ZEE' = \frac{\cos. E' \sin. ZE'E}{\cos. E}$; donc

$$dZEE' = \frac{-dE'}{2 \sin. ZE'E \sin. D \sin. \frac{1}{2}A}.$$

Actuellement, différenciant l'équation (i') par rapport à L et ZEE', on a $dL = \frac{\cos.E\sin.D\sin.ZEPdZEE'}{\cos.L}$; mais dans le triangle ZEP on a sin. $ZEP = \frac{\sin.H\cos.L}{\cos.E}$, en représentant par H l'angle horaire ZPE de l'étoile la plus éloignée du méridien; donc $DL = \sin.D\sin.HdZEE'$; et substituant enfin la valeur de $dZEE'$, on a

$$dL = \frac{-\sin.HdE'}{2\sin.ZE'E\sin.\frac{1}{2}A} \ldots\ldots (i)$$

D'où nous conclurons, 1.° que les erreurs dans les hauteurs des deux astres influent en sens inverse sur la latitude; 2.° que l'erreur dE' dans la hauteur de l'étoile la plus près du méridien influe davantage sur la latitude que celle dE de l'étoile la plus éloignée, puisque $\sin.H > \sin.H'$; donc c'est cette observation qu'il faudra faire avec le plus de soin, surtout lorsque l'étoile la plus voisine du méridien est moins haute que l'autre.

Si l'on vouloit avoir dL en fonctions des mêmes quantités qui entrent dans l'équation (h): alors on remarqueroit que $H = H' + A$; d'où $\sin.H = \sin.H' \times \cos.A + \cos.H'\sin.A$, et l'on substitueroit cette valeur dans l'équation (i); mais cela compliqueroit assez mal à propos cette équation.

NOTE VINGT-UNIÈME.

Examen de la Méthode enseignée à l'article 227 du texte, pour trouver la latitude du Vaisseau par l'observation du temps que le disque du Soleil reste à s'élever au-dessus, ou à s'abaisser au-dessous de l'horizon.

1. VOYONS d'abord quelle est l'influence du résulsat de la méthode d'une petite erreur dans l'observation de l'intervalle de temps entre les deux contacts de l'horizon, et les bords opposés du disque du soleil.

L'équation (86) du texte étant mise sous la forme

$$(\cos.^2\delta - \sin.^2L)\sin.^2\tfrac{1}{2}\omega = \sin.^2\tfrac{1}{2}\lambda \ldots\ldots (m);$$

et la différenciant par rapport à l'intervalle de temps ω et la latitude L, on a

$(\cos.^2 \delta - \sin.^2 L) \sin. \frac{1}{2}\omega \cos. \frac{1}{2}\omega \, d\omega - \sin. 2L \sin.^2 \frac{1}{2}\omega \, dL = 0$; ou substituant à la place de $\cos.^2 \delta - \sin.^2 L$ sa valeur $\frac{\sin.^2 \frac{1}{2}\lambda}{\sin.^2 \frac{1}{2}\omega}$, on aura $\sin.^2 \frac{1}{2}\lambda \cot. \frac{1}{2}\omega \, d\omega = \sin. 2L \sin.^2 \frac{1}{2}\omega \, dL$; d'où l'on tire

$$dL = \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}\lambda \cot. \frac{1}{2}\omega \, d\omega}{\sin. 2L \sin.^2 \frac{1}{2}\omega} \ldots\ldots (1).$$

L'on peut, sans une erreur sensible, et à cause de la petitesse des arcs $\frac{1}{2}\lambda$ et $\frac{1}{2}\omega$, faire $\sin.^2 \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{4}\lambda^2$, $\frac{\cot. \frac{1}{2}\omega}{\sin.^2 \frac{1}{2}\omega} = \frac{1}{\sin.^3 \frac{1}{2}\omega} = \frac{8}{\omega^3}$, ce qui donnera

$$dL = \frac{2\lambda^2 d\omega}{\sin. 2L \, \omega^3 \sin. 1''} \ldots\ldots (2).$$

Mais il est plus simple ponr le calcul, de se servir de la formnle (1) dans laquelle seulement, on pourra se permettre, à cause de la petitesse de $\frac{1}{2}\omega$, de faire $\frac{\cot. \frac{1}{2}\omega}{\sin.^2 \frac{1}{2}\omega} = \frac{1}{\sin.^3 \frac{1}{2}\omega}$, ce qui réduit la formule (1) à celle.

$$dL = \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}\lambda \, d\omega}{\sin. 2L \sin.^3 \frac{1}{2}\omega} \ldots\ldots (3).$$

Pour faire une application de cette formule à l'exemple de l'article 227 du texte, supposons que dans l'observation on a commis une erreur de deux secondes de temps ou 30″ de degrés; cela posé, voici le calcul :

$\frac{1}{2}\lambda =$	15′ 50″	2 log. sin.	5,32659
$d\omega =$	30″	log.	1,47712
$2L = 86°$	1′ 40″	com. ar. log. sin.	0,00105
$\frac{1}{2}\omega =$	23′	com. ar. 3 log. sin.	6,52365
		Somme.	3,32841 qui est le log. de 2130″:

donc l'erreur en la latitude seroit de 35′ 30″, ce qui est assez considérable, mais pas assez cependant pour rejeter absolument la méthode; car, si nous supposons des malheureux navigateurs dont le vaisseau a péri en mer, soit par le feu, soit par une voie d'eau que l'on n'a pu étancher, et qui n'ont eu que le temps de s'embarquer avec quelques vivres dans la chaloupe : ces infortunés ne se trouveront-ils pas beaucoup moins malheureux de pouvoir déterminer à un demi-degré près, la latitude du lieu de l'observation?

2. Une petite erreur dans la déclinaison δ, laquelle ne peut guère excéder une minute, n'en donne qu'une très-petite pour la latitude. En effet, différenciant l'équation (*m*) de l'article précédent par rapport à L et δ, on a

$$dL = \frac{-\sin. 2\delta}{\sin. 2L} d\delta \ldots\ldots (4).$$

Ainsi, tant que la latitude est plus grande que la déclinaison, l'erreur en latitude est plus petite que celle en déclinaison.

3. Lorsque la latitude du vaisseau n'excède pas 45 degrés, on peut, à cause de la petitesse de l'arc $\frac{1}{2}\lambda$ qui a toujours lieu, quelle que soit la latitude, et de $\frac{1}{2}\omega$ lorsque la latitude n'est pas trop grande, faire $\sin.\frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}\lambda$, et $\sin.\frac{1}{2}\omega=\frac{1}{2}\omega$, ce qui réduit respectivement les formules (87), (88) et (89) du texte à celles

$$\sin. L=\cos.\delta\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\omega\cos.\delta}\right)^2} \ldots\ldots (5),$$

$$\cos. P=\frac{\lambda}{\omega\cos.\delta} \ldots\ldots (6),$$

$$\sin. L=\sin. P\cos.\delta \ldots\ldots (7).$$

Mais lorsque la latitude du vaisseau est grande, ces formules donneroient une erreur assez considérable : d'ailleurs, le calcul numérique des formules (87) et (88) est pour le moins aussi simple que celui des formules (5) et (6) de cette note; donc il vaut toujours mieux pour l'exactitude, et même pour la brièveté du calcul, se servir des premières que des secondes.

NOTE VINGT-DEUXIÈME.

(Servant de complément au chapitre VII, livre III).

1. SUPPOSANT qu'on a commis une petite erreur dE dans la hauteur vraie de l'astre, on aura l'équation 43 (art. 127 et répétée à l'art. 241) qui, différenciée par rapport à A et E, donne

$$\frac{dA}{dE}=\frac{-\cos. E}{\sin. D\cos. L\sin. A} \ldots\ldots (1),$$

ou, représentant par Z l'angle azimutal de l'astre dans l'instant de l'observation, on aura

$$\frac{dA}{dE}=-\operatorname{cosec.} Z\operatorname{séc.} L \ldots\ldots (2).$$

De l'équation (1), nous conclurons 1.° que l'erreur commise dans l'observation de l'astre influe assez considérablement sur le résultat de l'angle horaire calculé;

2.° Que plus la hauteur de l'astre observé est grande, moins aussi est forte

l'influence de l'erreur commise dans l'observation. Mais si, d'un autre côté, l'on fait attention que les observations des grandes hauteurs sont plus susceptibles d'erreurs que celles des petites, on regardera comme moins avantageuses à la méthode, les grandes hauteurs;

3.° Qu'une des circonstances favorables à la méthode, est celle où le soleil se trouve voisin des équinoxes;

4.° Qu'une autre circonstance favorable, est celle où le lieu de l'observation est voisin de l'équateur;

5.° Qu'on ne peut jamais avoir l'erreur dA de l'angle horaire plus petit que celle dE commise dans la hauteur, ce qui est évident, d'après l'équation (2), dans laquelle le second membre ne peut être < 1;

6.° Que l'effet dA résultant de l'erreur dE, est en sens contraire de cette dernière;

7.° Qu'à cause de la forte influence de l'erreur dans la hauteur sur le résultat du calcul, on doit préférablement calculer l'heure vraie du vaisseau par l'observation de la hauteur du soleil; car il est fort difficile, comme nous l'avons déjà dit, de prendre de bonnes hauteurs la nuit; et la déclinaison de la lune, sa parallaxe de hauteur, son demi-diamètre étant plus susceptibles de variations et d'erreurs que les mêmes choses relativement aux mouvemens apparens du soleil, la hauteur de ce dernier astre est sûrement plus exacte que celle de notre satellite. D'ailleurs le calcul de l'angle horaire du soleil donne tout de suite et directement l'heure vraie du vaisseau, au lieu que pour déduire cette heure de l'angle horaire de tout autre astre que celui du soleil, il faut encore faire entrer dans le calcul, des élémens qui sont plus ou moins susceptibles de petites erreurs.

2. Supposant maintenant une petite erreur dans la latitude du vaisseau, et différenciant en conséquence l'équation (43) du texte (art. 127 et 241), on aura celle

$$\frac{dA}{dL} = \frac{\cos. D - \sin. E \sin. L}{\sin. A \cos.^2 L \sin. D} \; \ldots\ldots (3),$$

qui nous démontre qu'il faut, autant que c'est possible, observer la hauteur de l'astre lorsqu'il passe au premier vertical, puisqu'alors on a $\cos. D - \sin. E \sin. L = 0$ ou

$$\sin. E = \frac{\cos. D}{\sin. L} \; \ldots\ldots (4).$$

En effet, le premier vertical formant avec l'équateur un angle égal à celui L de la latitude, puisqu'il est le complément de l'angle formé par l'équateur et

l'horizon, on aura dans le triangle rectangle, dont les trois côtés sont la hauteur vraie de l'astre supposé au premier vertical, sa déclinaison et la distance du point où le cercle horaire coupe l'équateur au vrai point d'*est* ou d'*ouest*, la proportion sin. L : sin. déclinaison, ou cos. D :: 1 : sin. E, d'où on tire l'équation (4). Mais il est facile de remarquer que pour observer une astre au premier vertical, il faut que sa déclinaison soit de même dénomination que la latitude de l'observateur, et plus petite que cette dernière. Ainsi, il y a beaucoup d'occasions où il faudroit se contenter d'observer l'astre le plus près possible du premier vertical : cependant il ne faut pas que quelqu'une de ces considérations fasse observer l'astre à moins de quatre ou cinq degrés de hauteur apparente, parce que les réfractions qui ont lieu auprès de l'horizon sont sujettes à des variations accidentelles assez considérables, et qu'on ne rend pas toujours nulles par les corrections relatives au baromètre et thermomètre enseignées à l'article 120, chap. v, livre II du texte.

Au reste, la table XVIII calculée par le moyen de la formule(4) de cette note, servira à trouver, sans peine, les hauteurs auxquelles on doit à peu près observer la hauteur du soleil, pour déterminer le plus exactement possible l'angle horaire de cet astre (*voy.* l'art. 243 du texte pour l'usage de cette table).

3. Pour rendre le calcul de la formule (3) beaucoup plus simple, surtout lorsqu'on opère par logarithmes, nous substituerons dans cette formule, la valeur de sin. E tirée de l'équation 43 du texte, ce qui nous donnera, toutes réductions faites,

$$\frac{dA}{dL}=\frac{\text{cot. D}-\text{tang. L cos. A}}{\text{sin. A}} \;\ldots\ldots\; (\delta).$$

Soit fait, pour n'opérer que par logarithmes,

$$\text{tang. M}=\frac{\text{tang. L cos. A}}{\text{cot. D}} \;\ldots\ldots\; (5),$$

ce qui réduira l'équation (δ) à la forme $\frac{dA}{dL}=\frac{\text{cot. D}}{\text{sin. A}}(1-\text{tang. M})=\frac{\text{cot. D}}{\text{sin. A}}\times$ (tang. 45°— tang. M); ou enfin

$$\frac{dA}{dL}=\frac{\text{cot. D sin.}(45^\circ-\text{M})\sqrt{2}}{\text{sin. A cos. M}} \;\ldots\ldots\; (6).$$

Nous allons faire l'application de ces formules à l'exemple de l'article 243 du texte.

Nous avions, dans cet exemple, la distance polaire du soleil $=67^\circ$, la hau-

teur vraie du même astre de 26°34′, la latitude du vaisseau $=28°\,19'$, et le calcul de l'angle horaire du soleil nous a donné cet angle de 71°9′. Cela posé, voici le calcul de la formule (1) de cette note :

Dist. pol. du ⊙	67°	0′	. . . .	log. sin. 9,964
Lat. du vaisseau	28	19	. . . .	log. cos. 9,945
Ang. hor. ⊙	71	9	. . . .	log. sin. 9,976
Haut. vr. ⊙	26	34	. . . . c. ar.	log. cos. 0,048
			Somme.	9,933
			Comp. ar.	0,067 log. de 1,17.

Donc, $dA = -1{,}17\,dE$; et si nous supposons que, soit dans l'observation de la hauteur du soleil, soit dans les corrections qu'on a faites à cette hauteur pour avoir la vraie du centre, on a commis une erreur $dE = 2'$, on aura $dA = -2'20''$ de degrés, ou 9ˢ 20ᵗⁱᵉʳ en temps.

Passons maintenant au calcul des formules (5) et (6) de cette note :

Lat. du vaisseau . .	28° 19′		log. tang. 9,7314			
Ang. hor. du soleil.	71 9		log. cos. 9,5093	. . . .	com. log. sin.	0,0239
Dist. pol. du soleil.	67 0	com. ar.	log. cot. 0,3721	. . . .	log. cot.	9,6279
			Somme. 9,6128	log. tang. de M = 22° 17′ 40″	com. log. cos.	0,0337
				45		
				Diff. 22 42 20	log. sin.	9,5866
				2 . . .	demi-log.	0,1505
					Somme	9,4226 qui

est le logarithme de 0,265. Donc, si on suppose une erreur de 10′ dans la latitude estimée du vaisseau (ce qui peut fort bien arriver lorsqu'il y a seulement deux jours qu'on ne l'a observée), on aura $dA = 0{,}265 \times 10' = 2'39''$ de degrés $= 10^s{,}6$ en temps, ce qui est une erreur assez considérable, pour qu'on doive chercher à la prévenir par le procédé enseigné à l'article 242 du texte, lorsque c'est possible.

4. On ne peut guère supposer une erreur sensible dans la déclinaison de l'astre observé ; mais lorsqu'on veut déterminer par des hauteurs correspondantes du soleil (art. 244 du texte) l'heure juste que marquoit une montre à l'instant où cet astre passoit au méridien, il est nécessaire d'avoir égard au changement en déclinaison pendant le demi-intervalle de temps écoulé entre les heures marquées sur la montre, lorsque le soleil s'est trouvé de part et d'autre du méridien à des hauteurs égales au-dessus de l'horizon.

Soit donc différenciée l'équation (43) (art. 127 et 241 du texte), par rapport à D et A, ce qui donnera

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\sin. E \cos. D - \sin. L}{\sin.^2 D \cos. L \sin. A} \;\ldots\ldots\; (\omega),$$

d'où l'on voit que si on observe les hauteurs correspondantes, de manière qu'on ait sensiblement, et autant que cela se pourra

$$\sin. E = \frac{\sin. L}{\cos. D} \;\ldots\ldots\; (7),$$

on sera dispensé du calcul de la variation en déclinaison, et le demi-intervalle de temps écoulé entre les deux observations ajouté à l'heure de la première, donnera l'heure vraie de la montre à l'instant du passage du soleil au méridien du lieu de la première observation. Mais il est évident que l'équation (7) ne peut avoir lieu que dans le cas où la latitude de l'observateur est de même dénomination, et plus petite que la déclinaison du soleil.

5. Afin de simplifier l'expression précédente de $\frac{dA}{dD}$ (éq. ω), substituons-y la valeur de sin. E tirée de l'équation 43 (art. 127 et 141 du texte), ce qui nous donnera la formule

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\cot. D \cos. A - \text{tang}. L}{\sin. A} \;\ldots\ldots\; (\chi).$$

Mais si l'on veut opérer par le seul calcul logarithmique, on fera

$$\text{tang}. N = \cos. A \cot. D \cot. L \;\ldots\ldots\; (8),$$

ce qui donnera $\frac{dA}{dD} = \frac{\text{tang}. L (\text{tang}. N - \text{tang}. 45^\circ)}{\sin. A} = \frac{\text{tang}. L \sin. (N - 45^\circ) \sqrt{2}}{\sin. A \cos. N}$; mais à cause que ce n'est que pour l'heure du midi qu'on doit avoir égard à la variation de la distance, c'est-à-dire, pour la moitié du temps de l'intervalle, il faudra diviser le second membre par 2, ce qui donne définitivement l'équation

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\text{tang}. L \sin. (N - 45^\circ)}{\sin. A \cos. N \sqrt{2}} \;\ldots\ldots\; (9).$$

6. Le vaisseau changeant de place dans l'intervalle de temps qui s'écoule entre les deux observations, on se servira des deux formules (5) et (6), dans lesquelles nous considérions à l'article 3, dL comme erreur en latitude; mais que, dans le cas présent, nous devons considérer comme différence en latitude assez petite pour que nous la traitions, sans une erreur sensible, comme une quan-

tité différentielle. Mais nous observerons, pour simplifier le calcul, qu'en multipliant l'équation (5) par celle (8), on aura tang. M tang. N $=$ cos.² A ; donc

$$\text{tang.}\,M = \frac{\cos.^2 A}{\text{tang.}\,N} \;\ldots\ldots\; (10).$$

C'est des formules (8), (9), (10) et (6) qu'est déduite la règle enseignée à l'article 244 du texte. On trouve dans ce même article une application numérique de cette méthode.

NOTE VINGT-TROISIÈME.

(*Servant de complément au chapitre* VIII, *livre* III).

1. METTANT l'équation (51) (art. 135 et 248) sous la forme

$$\sin.\,M \cos.\,L = \sin.\,\delta \;\ldots\ldots\; (a),$$

et la différenciant par rapport à M et L, on a

$$\cos.\,M \cos.\,L\,dM - \sin.\,M \sin.\,L\,dL = 0,$$

d'où

$$dM = \text{tang.}\,M\,\text{tang.}\,L\,dL \;\ldots\ldots\; (1);$$

équation qui prouve que l'influence de l'erreur dans l'estime de la latitude sur le calcul de l'amplitude, est d'autant plus petite que la latitude est moindre, ou que le temps de l'observation se rapproche plus des temps équinoxiaux, c'est-à-dire, lorsque l'observation se fait vers la fin du mois de mars ou de septembre.

Différenciant la même équation (a) par rapport à M et δ, il vient $dM \cos.\,M \cos.\,L = \cos.\,\delta\, d\delta$, d'où $dM = \frac{\cos.\,\delta\, d\delta}{\cos.\,M \cos.\,L}$; mais cos. $L = \frac{\sin.\,\delta}{\sin.\,M}$ (éq. a) ; donc

$$dM = \text{tang.}\,M \cot.\,\delta\, d\delta \;\ldots\ldots\; (2).$$

Pour faire connoître l'usage de ces formules, appliquons-les au premier exemple de l'article 248 du texte, en supposant d'abord une erreur de 10′ dans la latitude, ensuite une erreur d'une minute dans la déclinaison.

Calcul de la formule (1) *de cette note.*

Amp. ☉	= 12° 25′ 40″	log. tang. 9,3432
Lat. du vaisseau =	42 35 0	log. tang. 9,9633
Erreur en lat.	= 0 10 0	log. 1,0000

Somme. 0,3065 qui est le logarithme de 2′;

donc, l'amplitude vraie corrigée de l'erreur résultante de celle commise dans la latitude est de 12°27′40″.

Calcul de la formule (2) *de cette note.*

Ampl. ☉	= 12° 25′ 40″	log. tang. 9,3432
Décl. ☉	= 9 7 0	log. cot. 0,7946
Err. dans la décl. ☉ =	60	log. 1.7781

Somme. 1,9159 log. de 82″ ou 1′ 22″;

donc, l'amplitude corrigée des erreurs résultantes de celles commises en latitude et déclinaison du soleil, est de 12°29′2″.

Cette différence 3′22″ entre l'amplitude calculée à l'article 248 et la corrigée, est sensiblement nulle dans la recherche de la variation du compas, du moins dans l'usage qu'en font les navigateurs.

2. Examinons maintenant quelles sont, sur le résultat du calcul de l'angle azimutal, les influences respectives des petites erreurs commises dans la latitude du vaisseau, la déclinaison de l'astre et sa hauteur.

Et commençant par celle en latitude, différencions l'équation 49 (art. 134 et 251) par rapport à Z et L; ce qui donne

$$\frac{dZ}{dL} = -\frac{(\text{tang.}E + \cos.Z\,\text{tang.}L)}{\sin.Z} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Donc, autant que cela se pourra, il faudra observer la hauteur du soleil à six heures du matin ou du soir; car, pour avoir — tang. E — cos. Z tang. L = o, il est évident que l'angle horaire doit être droit. En effet, Z qui représente toujours l'angle HZA formé par le vertical ZA de l'astre et le méridien élevé ZH (art. 134 du texte) est = 200° — AZP; donc cos. Z = — cos. AZP, ce qui réduit l'équation — tang. E — cos. Z tang. L = o, à celle cos. AZP tang. L — tang. E = o, ou cos. AZP tang. AZ — tang. ZP = o, équation qui ne peut avoir lieu qu'en tant que l'on a dans le triangle AZP, l'angle horaire ZPA droit. Mais, lorsque la déclinaison de l'astre est de dénomination différente de Fig. 15 du texte.

la latitude, il faudra observer la hauteur du soleil dès qu'il se sera dégagé des nuages qui bordent très-souvent l'horizon, afin d'avoir Z le plus grand possible.

Pour réduire le calcul de la formule 3 à celui purement logarithmique, on fera

$$\text{tang. P} = \text{cos. Z tang. L} \ldots\ldots (4),$$

ce qui donne

$$\frac{d\,Z}{d\,L} = \frac{-\text{sin.}(E+P)}{\text{sin. Z cos. E cos. P}} \ldots\ldots (5).$$

Fig. 15 du texte. 3. Passons à l'examen de l'influence de l'erreur que l'on peut commettre dans la hauteur vraie E; et, pour cela, différencions l'équation (49) (art. 134 et 251 du texte), par rapport à Z et E, ce qui nous donnera

$$\frac{d\,Z}{d\,E} = -\frac{\text{tang. L} + \text{cos. Z tang. E}}{\text{sin. Z}} \ldots\ldots (6).$$

Donc, afin que l'effet produit sur le résultat de l'angle azimutal, par l'influence d'une petite erreur dE dans la hauteur de l'astre fût nulle, il faudroit faire l'observation du soleil, lorsque la hauteur E de cet astre satisfait à l'équation tang. L + cos. Z tang. E = o, c'est-à-dire, lorsque l'angle parallactique de l'astre est droit, puisque, comme nous l'avons dit dans l'article précédent, cos. Z = − cos. ZAP, ce qui réduit l'équation précédente à celle tang. L = tang. E cos. AZP, ou tang. ZA = tang. ZP cos. AZP, qui ne peut avoir lieu qu'en tant que l'angle parallactique ZAP est droit. Mais observons que le triangle ZPA étant rectangle en A, l'on a l'équation $\text{cos. AZ} = \frac{\text{cos. ZP}}{\text{cos. AP}}$ ou

$$\text{sin. E} = \frac{\text{sin. L}}{\text{cos. D}} \ldots\ldots (m),$$

équation qui ne peut avoir lieu qu'en tant 1.° que la déclinaison du soleil est de même dénomination que la latitude du vaisseau : car, dans le cas contraire, cos. D étant négatif on auroit aussi E négatif, et par conséquent l'astre seroit encore sous l'horizon lorsque l'équation (m) est satisfaite; 2.° qu'il faut que le vaisseau se trouvant dans la zône torride, sa latitude soit plus petite que la déclinaison du soleil : car l'on doit avoir sin. L < cos. D, ou sin. L < sin.(90° − D), ou L < 90° − D, c'est-à-dire, L < δ, en représentant par δ la déclinaison du soleil.

Mais, dans tous les cas, les équations (5) et (6) nous indiquent également que, pour diminuer les influences des erreurs en latitude du vaisseau et hauteur

de l'astre sur le résultat du calcul, il faut observer le soleil lorsqu'il est fort peu élevé au-dessus de l'horizon; d'autant que, comme nous l'avons dit à l'art. 250, les relèvemens au compas de variation se font bien plus exactement lorsque les objets que l'on relève ne sont pas fort haut.

Faisant, pour plus de facilité dans le calcul logarithmique de la formule (6),

$$\text{tang. } Q = \text{cos. } Z \text{ tang. } E \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

on a

$$\frac{dZ}{dE} = -\frac{\text{sin.}(L+Q)}{\text{sin. } Z \text{ cos. } L \text{ cos. } Q} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

4. Examinons enfin l'influence d'une erreur $d\delta$ dans la déclinaison, et différencions en conséquence l'équation (49) (art. 134 et 251 du texte), ce qui nous donnera

$$\frac{dZ}{d\delta} = \frac{\text{sin. } D}{\text{cos. } E \text{ cos. } L \text{ sin. } Z} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

De cette dernière équation, nous conclurons 1°. que l'on doit calculer très-scrupuleusement la déclinaison de l'astre observé pour l'instant de l'observation, et que conséquemment on ne doit pas chercher à déterminer la variation du compas par le calcul de l'angle azimutal de la lune, puisque ce dernier astre est celui dont il est le plus difficile de déterminer avec exactitude la déclinaison dans un instant quelconque; 2.° que de même que dans les deux articles précédens, on doit, pour diminuer l'effet de l'erreur dans la déclinaison de l'astre, observer celui-ci lorsqu'il est peu élevé au-dessus de l'horizon; 3.° que les petites latitudes sont favorables à la diminution de l'effet produit par l'erreur en question.

Appliquons ces formules au premier exemple de l'article 251.

Calcul des formules (4) *et* (5).

Ang. azimutal = 112° 3′ 40″ log. cos. 9,5747 . . . . c. a. log. sin. 0,0333
Lat. du vaisseau 30 43 0 log. tang. 9,7739

Somme. 9,3486 log. tang. P = 167° 25′ 10″ c. a. log. cos. 0,0105
haut. vr. ☉ = 7 43 0 c. a. log. cos. 0,0040

Somme. 175 8 10 log. sin. 8,9283
Soit l'erreur en latitude de − 10′ . . . . log. 1,0000

Somme. 9,9761

qui est le logarithme de — 0',95 ou — 57″ (*); donc l'azimut vrai corrigé de l'erreur en latitude est de 112° 3′ 40″—57″=112° 2′ 43″.

Calcul des formules (7) *et* (8).

Ang. azimutal=112° 3′ 40″ log. cos. 9.5747 . . . . c. ar. log. sin. 0,0333
Haut. vr. ☉ = 7 43 0 log. tang. 9,1319

Somme. 8,7066 log. tang. Q=177° 5′ 10″ c. ar. log. cos. 0.0005
Lat. du vaisseau 30 43 0 c. ar. log. cos. 0,0657

Somme. 207 48 10 log. sin. 9 6688
Soit supposé l'erreur dans la hauteur, de 2′ log. 0.3010

Somme. 0,0693

qui est le logarithme de —1′,17 ou — 1′ 10″ (**); donc l'azimut vrai du soleil corrigé des erreurs en latitude et hauteur du soleil, est 112° 2′ 43″—1′ 10″= 112° 1′ 33″.

Calcul de la formule (9).

Haut. vr. ☉	7°	43′	0	com. ar. log. cos.	0.0040
Latitude du vaisseau . . .	30	43	0	com. ar. log. cos.	0,0657
Angle azimutal	112	3	40	com. ar. log. sin.	0.0333
Dist. polaire ☉	67	8	0	log. sin.	9,9645
Soit l'erreur en décl. ☉ =	—	60		log.	1,7782
				Somme.	1,8457

qui est le logarithme de 70″ ou 1′ 10″; donc l'erreur de — 1′, dans la déclinaison du soleil, en donne une de — 1′ 10″ dans l'angle azimutal qui, conséquemment, étant corrigé de toutes les erreurs que nous avons supposées, n'est que 112° 0′ 23″.

(*) Cette quantité est négative, parce que le facteur de dL affecté du signe négatif est divisé par cos. 167° 25′ 10″ qui est aussi négatif, ce qui le rend positif; donc le produit de ce facteur positif par dL, qui est négatif, doit être de même signe.

(**) Ce résultat est négatif, parce que le facteur de dE ayant son numérateur affecté de la quantité négative sin. 207° 48′ 10″, et son dénominateur affecté de la quantité négative cos. 177° 5′ 10″, conserve son signe négatif; et puisque $dE=2'$ est positif, le résultat doit être négatif.

NOTE VINGT-QUATRIÈME.

Examen de la méthode des observations des distances angulaires des astres pour obtenir la longitude en mer.

(Voyez le chap. X, liv III.)

Nous allons dans cette note examiner jusqu'où doit aller la confiance du navigateur dans la méthode enseignée au chapitre X, et quelles sont les précautions qu'il doit prendre dans l'observation et le calcul, pour avoir la longitude du vaisseau avec le plus d'exactitude possible.

1. Commençons par supposer une petite erreur dD dans la distance apparente D des deux astres observés, et, en conséquence, différencions la formule 112 de l'article 260 du texte par rapport à x, D et S qui est fonction de D, ce qui donnera $2 \sin. \frac{1}{2} x \cos. \frac{1}{2} x \, d \frac{1}{2} x$ ou $\frac{1}{2} \sin. x \, dx = \frac{[\frac{1}{2} \cos(\frac{1}{2}S - D) \sin. \frac{1}{2} S dS + \cos. \frac{1}{2} S \sin. (\frac{1}{2}S - D) d(\frac{1}{2}S - D)] \cos. \alpha \cos. \beta}{\cos. a \cos. b}$: mais $S = a + b + D$, et $\frac{1}{2}S - D = \frac{a+b-D}{2}$, d'où $dS = dD$, et $d(\frac{1}{2}S - D) = -\frac{1}{2}dD$; donc, substituant ces valeurs, et multipliant l'équation par 2, on a $\sin. x \, dx = \frac{[\cos. (\frac{1}{2}S - D) \sin. \frac{1}{2} S - \cos. \frac{1}{2} S \sin. (\frac{1}{2}S - D)] \cos. \alpha \cos. \beta \, dD}{\cos. a \cos. b} = \frac{\sin. D \cos. \alpha \cos. \beta \, dD}{\cos. a \cos. b}$; d'où

$$\frac{dx}{dD} = \frac{\sin. D \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. x \cos. a \cos. b} \ldots \ldots (1);$$

équation qui nous apprend que dx est sensiblement égal à dD; ainsi, on peut, soit pour plus de facilité dans le calcul, soit pour toute autre raison, ajouter ou retrancher un petit nombre de secondes de degrés de la distance apparente D, pour ensuite le retrancher ou l'ajouter au résultat x du calcul de cette distance réduite; ce qui, comme nous venons de le voir, ne pourra causer une erreur sensible.

2. L'équation 115 du texte étant différenciée par rapport aux deux quantités t et x susceptibles d'erreurs, donne

$$dt = \frac{45^\circ dx}{q - p} \ldots \ldots (2).$$

Or, la valeur moyenne de $q-p$ est d'environ $1^\circ\frac{1}{2}$; donc à cause que dD est sensiblement égal à dx (art. 1 de cette note), nous en conclurons que généralement on a $dt = 30\,dD$. Ainsi, on ne sauroit trop recommander aux marins 1.° de ne faire l'observation des distances qu'avec le cercle de réflexion de Borda, qui est le meilleur instrument connu pour ces sortes d'opérations; 2.° de prendre toutes les précautions enseignées à l'article 187 et suivans (chap. I, liv. III), pour que l'observation soit faite de la manière la plus exacte possible.

3. Continuons notre examen en supposant une petite erreur dans l'observation de la hauteur b du soleil, ou de l'étoile dont on veut déterminer la distance angulaire à la lune; et, pour connoître par le calcul le plus simple l'influence de l'erreur db sur la distance vraie x, commençons par égaler les deux expressions de cos. Z en fonctions des quantités apparentes a, b et D, et en fonctions des quantités vraies α, β et x, lesquelles sont respectivement $\frac{\cos. D - \sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b}$ et $\frac{\cos. x - \sin. \alpha \sin. \beta}{\cos. \alpha \cos. \beta}$ (art. 260 du texte); donc,

$$\cos. a \cos. b \cos. x = \cos. a \cos. b \sin. \alpha \sin. \beta + \cos. D \cos. \alpha \cos. \beta - \sin. a \sin. b \cos. \alpha \cos. \beta \quad \ldots \; (Q).$$

Différenciant cette équation par rapport à x, b et β, et faisant attention que considérant $b-\beta$ (= *réfraction* — *parallaxe*, pour le soleil, = *réfraction* pour une étoile) comme une quantité constante, on a $db = d\beta$, on aura, toutes réductions faites,

$$\frac{dx}{db} = \frac{\cos. D \cos. \alpha \sin. \beta - \sin. (\alpha - a) \cos. (b+\beta)}{\cos. a \cos. b \sin. x} - \cot. x \,\text{tang}. b. \; \ldots \; (R),$$

ou, ce qui peut se faire sans une erreur sensible, négligeant la très-petite quantité $\sin. (\alpha - a) \cos. (b+\beta)$, et faisant $\frac{\sin. \beta}{\cos. b} = \text{tang}. b$, on aura l'équation

$$\frac{dx}{db} = \text{tang}. b \left(\frac{\cos. D \cos. \alpha}{\sin. x \cos. a} - \cot. x \right). \; \ldots \; (3),$$

qui nous apprend 1.° que l'effet produit sur le résultat du calcul de l'heure vraie de Paris par l'influence d'une petite erreur dans l'observation de la hauteur du soleil ou de l'étoile, est fort peu de chose; mais, à cause que c'est cette même hauteur qui sert à calculer l'heure vraie du vaisseau à l'instant de l'observation, et que l'erreur en question influe assez considérablement sur le résultat de ce dernier calcul (art. 1, note XXII), il est clair que pour obtenir avec une exactitude suffisante la longitude du vaisseau, l'observation de la hauteur de l'astre dont on calcule la distance au centre de la lune, doit être faite avec beaucoup de

soin; 2.° que moins la hauteur du soleil ou de l'étoile observée est grande, moins aussi est considérable l'influence d'une petite erreur commise dans l'observation de la hauteur de cet astre.

4. Pour soumettre le calcul de la formule précédente à celui logarithmique, faisons

$$\cot.H = \frac{\cos.D\cos.\alpha}{\sin.x\cos.a} \ldots\ldots (4),$$

ce qui donnera

$$\frac{dx}{db} = \frac{\tan g.b\sin.(x \pm H)}{\sin.x\sin.H},$$

ou, substituant à la place de dx sa valeur $\frac{(q-p)dt}{45^\circ}$ (éq. 2), on a

$$\frac{dt}{db} = \frac{45^\circ}{q-p}\,\frac{\tan g.b\sin.(x \pm H)}{\sin.x\sin.H} \ldots\ldots (5),$$

le signe supérieur si D et x sont de même affection, le signe inférieur dans le cas contraire.

5. Supposant maintenant une petite erreur dans l'observation de la hauteur de la lune; il est clair qu'à cause que les lettres α et a sont symétriques à celles $\mathcal{C}$ et b dans l'équation (Q) de l'article 3, on trouvera tout de suite, sans se donner la peine de différencier cette équation (Q) par rapport à x, a et α, celle

$$\frac{dx}{da} = \frac{\cos.\mathcal{C}\sin.\alpha\cos.D + \sin.(b-\mathcal{C})\cos.(\alpha+a)}{\cos.a\cos.b\sin.x} - \cot.x\tan g.a \ldots\ldots (S),$$

qui, devant être symétrique à l'équation (R), s'obtient en substituant dans cette dernière α, a et da à la place des quantités respectives $\mathcal{C}$, b et db, et réciproquement. Or, l'on peut, sans erreur sensible, négliger dans l'équation (S) la très-petite quantité $\sin.(b-\mathcal{C})\cos.(\alpha+a)$, et faire $\frac{\cos.\mathcal{C}}{\cos.b} = 1$, ce qui réduira l'éq. (S) à celle

$$\frac{dx}{da} = \frac{\sin.\alpha\cos.D}{\cos.a\sin.x} - \cot.x\tan g.a:$$

et substituant cette valeur de dx dans l'équation (2), on a

$$\frac{dt}{da} = \frac{45^\circ}{q-p}\left(\frac{\cos.D\sin.\alpha - \cos x\sin.a}{\cos.a\sin.x}\right) \ldots\ldots (6);$$

d'où nous conclurons 1.° que l'influence d'une petite erreur commise dans l'observation de la hauteur de la lune affecte très-légèrement le calcul de l'heure

vraie de Paris, puisque $\cos. D \sin. \alpha$ diffère peu de $\cos. x \sin. a$; 2.° que d'après la comparaison de l'équation (3), qui peut être mise sous la forme

$$\frac{dt}{db} = \frac{45° \operatorname{tang}. b}{q-p} \left(\frac{\cos. D \cos. \alpha - \cos. x \cos. a}{\sin. x \cos. a} \right),$$

avec celle (6), l'observation de l'étoile ou du soleil doit être faite avec plus de soin que celle de la lune, lorsque la hauteur apparente du soleil ou de l'étoile est plus grande que 45°, puisqu'alors $\operatorname{tang}. b > 1$: et que c'est le contraire, lorsque cette hauteur est moindre que 45°.

6. Pour soumettre la formule (6) au calcul purement logarithmique, mettons-la d'abord sous la forme

$$\frac{dt}{da} = \frac{45°}{q-p} \operatorname{tang}. a \left(\frac{\cos. D \sin. \alpha}{\sin. x \sin. a} - \cot. x \right).$$

donc faisant

$$\cot. K = \frac{\cos. D \sin. \alpha}{\sin. x \sin. a} \ldots\ldots (7),$$

on aura

$$\frac{dt}{da} = \frac{45°}{q-p} \frac{\operatorname{tang}. a \sin. (x-K)}{\sin. x \sin. K} \ldots\ldots (8).$$

7. Si on a commis une petite erreur dans la parallaxe de la hauteur de la lune, ou dans l'estime de la réfraction, et enfin généralement dans l'estime de la valeur de $\alpha - a$, voici un moyen bien simple pour corriger la distance vraie x, sans être obligé de refaire le calcul de cette distance.

Différenciant l'équation (Q) de l'article 3 par rapport aux variables x et α, on a

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{-\sin. \zeta \cos. \alpha}{\sin. x} + \frac{\cos. \zeta \cos. D \sin. \alpha}{\cos. b \sin. x \cos. a} - \frac{\sin. a \sin. b \cos. \zeta \sin. \alpha}{\cos. b \sin. x \cos. a};$$

ou, ce qui est sensiblement la même chose,

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{-\sin. \zeta \cos. \alpha}{\sin. x} \left(1 - \frac{\cos. D \operatorname{tang}. \alpha}{\sin. \zeta \cos. a} + \operatorname{tang}. a \operatorname{tang}. \alpha \right).$$

Mais

$$1 + \operatorname{tang}. a \operatorname{tang}. \alpha = \frac{\cos. (\alpha - a)}{\cos. \alpha \cos. a} = \frac{\cos. (\text{parall. haut. ☾} - \text{réfract.})}{\cos. \alpha \cos. a};$$

donc

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{-\sin. \zeta \cos. \alpha}{\sin. x} \left(\frac{\cos. (\text{parall. haut. ☾} - \text{réfract.})}{\cos. \alpha \cos. a} - \frac{\cos. D \operatorname{tang}. \alpha}{\sin. \zeta \cos. a} \right);$$

ou faisant attention que sans erreur sensensible, on peut faire cos. (parall. haut. ☾ — réfract.) = 1, on a

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{-\sin. \zeta}{\sin. x \cos. a} \left(1 - \frac{\cos. D \sin. \alpha}{\sin. \zeta} \right) \ldots\ldots (9).$$

8. Afin de soumettre le calcul de cette formule à celui purement logarithmique, faisons

$$\text{tang.}\,F = \frac{\cos.D \sin.\alpha}{\sin.\zeta} \; \ldots\ldots \; (10),$$

d'où

$$dx = -\frac{\sin.\zeta\, d\alpha \sin.(45^\circ - F)\sqrt{2}}{\sin.x \cos.a \cos.F} \; \ldots\ldots \; (11).$$

Ainsi, sans être obligé de refaire le calcul de l'article 263 du texte, lorsque dans l'article 264 nous avons eu égard à la différence 5″ de la parallaxe horizontale de la lune à Paris, à celle par 16° 10′ de latitude, ce qui donne $d\alpha = 5''$; nous aurions pu corriger le résultat de l'article 263 par le moyen des seules formules (10) et (11); en voici le calcul.

Dist. app. ⊙ ☾	116° 39′ 40″	log. cos.	9,65197			
Haut. vraie ☾	45 6 30	log. sin.	9,85030	$d\alpha = 5''$	log.	0,69897
Haut. vraie ⊙	10 50 0	c. ar. log. sin.	0,49092	. . . .	log. sin.	9,50908
		Somme.	9,99319	log. tang. F = 134° 33′	c. log. cos.	0,15395
				45	c. log. sin.	0,15051
				Différence. 89 33 0″	log. sin.	9,99999
				Haut. appar. ☾ 44 26 50	c. log. cos.	0,14637
				Dist. vraie ⊙ ☾ 116 2 30	c. log. sin.	0,04649
					Somme.	0,70536

qui est le logarithme de 5,07, ou simplement 5″; donc $dx = -5''$ (*), ce qui donne, pour vraie distance corrigée des deux astres, 116° 2′ 28″ − 5″ = 116° 2′ 23″, quantité qui ne diffère du résultat trouvé dans le tableau de l'art. 264 du texte que de 1″.

9. Au reste, la formule 9 de l'art. 7 de cette note nous enseigne qu'il est essentiel de conserver entre la hauteur vraie α de la lune et sa hauteur apparente a, la même différence $\alpha - a$, lorsque, pour faciliter le calcul, on ajoute ou retranche quelques secondes à a, ce qui est de peu d'importance (art. 5 de cette note): car, une erreur $d(\alpha - a)$, dans la parallaxe moins la réfraction de la lune en donne une $d\alpha$, dont l'influence sur la distance vraie peut être considérable (éq. 9). Il en est de même pour la différence $b - \zeta$ des hauteurs appa-

(*) Cette valeur de dx est négative, parce qu'on a sin.(45° − F) = sin.(− 89° 33′) qui est négatif au numérateur de l'équation (11), et que dans la même équation, le dénominateur de la fraction est affecté du facteur négatif cos. 134° 33′; donc la valeur de dx doit rester négative.

rente et vraie du soleil ou de l'étoile. C'est par cette raison que dans le calcul des art. 263 et 264 du texte, après avoir retranché $2''$ à la hauteur apparente du soleil, et augmenté d'une seconde celle de la lune, afin de simplifier le calcul de la réduction des distances, je ne me suis pas permis de faire des changemens semblables aux hauteurs vraies $18° 50' 2''$ du soleil et $45° 6' 37''$ de la lune que j'aurois, sans cette raison, réduites aux quantités respectives $18° 50' 0''$ et $45° 6' 40''$.

10. La substitution que nous avons faite dans le calcul de la longitude (art. 264 du texte), de la parallaxe horizontale de la lune pour le lieu de l'observation, au lieu de celle pour Paris, ne donne pas, rigoureusement parlant, la correction complète qu'exige la figure du sphéroïde terrestre. Borda enseigne, dans son ouvrage sur le cercle de réflexion, une méthode bien ingénieuse et bien digne de ce grand géomètre pour avoir égard à ces corrections; mais cette méthode exige, dans le calcul de la longitude, la substitution d'une parallaxe horizontale $=p(1+\alpha\sin.^2\lambda+\alpha\sin.^2L)$ qui, comme on le voit, n'est pas celle du lieu de l'observation (éq. 11, note XI); ce qui oblige à un second calcul pour avoir le résultat demandé avec une exactitude suffisante; au lieu que de la manière dont nous nous y prendrons, le second calcul dont nous allons parler n'est pas obligé; d'ailleurs, nous aurons l'avantage de parvenir à notre but sans le secours d'une figure et par la simple analyse. Enfin, cette dernière correction étant sensiblement inutile dans la pratique, c'est un simple objet d'exactitude géométrique que nous allons examiner.

Puisque, sur la surface du sphéroïde terrestre considéré comme sensiblement de figure ellipsoïde, le vrai zénith de l'observateur est plus éloigné de l'équateur que celui avec lequel il se confondroit si la terre étoit sphérique d'une quantité CA'L, que nous avons appelée angle de la verticale (note I), et dont la tangente est sensiblement égale à $\alpha\sin. 2L$ (éq. 47 art. 8 de la note I), il est clair que les deux triangles sphériques résultans de l'observation et qui ont leur sommet commun au zénith, doivent avoir leurs côtés verticaux $90°-a$, $90°-b$ (triangle apparent), et $90°-\alpha$, $90°-\beta$ (triangle vrai) un peu différens de ce qu'ils seroient si les deux triangles avoient leur sommet commun sur le prolongement du rayon de la terre, qui passe par le lieu de l'observation: donc, des deux triangles en question, il n'y a que la distance apparente D qui soit constante; car, quelle que soit la figure de notre planète, il est évident que la distance des deux astres mesurée avec le cercle de réflexion, et par conséquent la distance apparente D, doit être la même. Cela posé, nous rappelant que pour le triangle

Fig. 1.

sphérique apparent on a $\cos. Z = \frac{\cos. D - \sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b}$; et que pour le triangle sphérique réel, on a $\cos. Z = \frac{\cos. x - \sin. \alpha \sin. \beta}{\cos. \alpha \cos. \beta}$ (article 260 du texte), on aura $\frac{\cos. x - \sin. \alpha \sin. \beta}{\cos. \alpha \cos. \beta} = \frac{\cos. D - \sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b}$; mais $\sin. \alpha \sin. \beta = \cos. (\alpha - \beta) - \cos. \alpha \cos. \beta$, et $\sin. a \sin. b = \cos. (a - b) - \cos. a \cos. b$, donc $\frac{\cos. x - \cos. (\alpha - \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta} = \frac{\cos. D - \cos. (a - b)}{\cos. a \cos. b}$, d'où l'on tire

$$\cos. a \cos. b [\cos. x - \cos. (\alpha - \beta)] = \cos. \alpha \cos. \beta [\cos. D - \cos. (a - b)].$$

Différenciant cette équation par rapport aux variables a, b, α, β et x; de plus, faisant $d\alpha = da$, et $d\beta = db$ (puisque la réfraction moins la parallaxe de hauteur pour le soleil, ou la réfraction seulement pour les étoiles, est regardée comme constante, et que nous étant servis, dans le calcul de la longitude, de la parallaxe de hauteur de la lune qui convient au lieu de l'observation, on a la parallaxe de hauteur de la ☾ moins la réfraction qui est une quantité constante), nous aurons l'équation différentielle

$[\cos. (\alpha - \beta) - \cos. x] (\cos. a \sin. b\, db + \cos. b \sin. a\, da) + \cos. a \cos. b [\sin. (\alpha - \beta)(da - db) - \sin. x\, dx] = [\cos. (a - b) - \cos. D] (\cos. \alpha \sin. \beta\, db + \cos. \beta \sin. \alpha\, da) + \cos. \alpha \cos. \beta [\sin. (a - b)(da - db)]$: ou, divisant par $\cos. a \cos. b$, et faisant $\frac{\cos. \alpha \cos. \beta}{\cos. a \cos. b} = 1$, ce qui ne peut donner une erreur sensible pour la valeur de dx, on aura, toutes réductions faites,

$$dx = \frac{2}{\sin. x} \left\{ \sin. \left(\frac{(\alpha - a) + (b - \beta)}{2}\right) \cos \left(\frac{(\alpha + a) - (b + \beta)}{2}\right) (da - db) - (\text{tang.}\, a\, da + \text{tang.}\, b\, db) \left(\sin. \left(\frac{(\alpha + a) - (b + \beta)}{2}\right) \sin. \left(\frac{(\alpha - a) + (b - \beta)}{2}\right) + \sin. \left(\frac{D + x}{2}\right) \sin. \left(\frac{D - x}{2}\right) \right) \right\} \ldots (12);$$

il reste maintenant à trouver les valeurs de da et de db.

Si par le point de la surface de la terre où est l'observateur, nous faisons passer deux plans, l'un tangent au sphéroïde à ce point qui, évidemment, est le vrai horizon, l'autre perpendiculaire au rayon de la terre, que je nomme *faux horizon ;* il est clair que ces deux plans, se coupant suivant la ligne *est-et-ouest*, formeront un angle égal à celui de la verticale; enfin, on voit évidemment que du côté de l'équateur élevé, le vrai horizon sera élevé au-dessus du faux, de la quantité angulaire en question dont la tangente est $\alpha \sin. 2L$, et que ce sera le contraire du côté du pôle élevé : donc, l'astre observé ayant sa déclinaison de dénomination différente de la latitude de l'observateur, ou étant < que cette dernière, c'est-à-dire, l'observateur étant tourné dans l'instant de l'observa-

tion du côté de la partie élevée de l'équateur, les hauteurs de l'astre sur le vrai horizon seront plus petites que celles sur le faux horizon, d'une quantité égale à l'arc du vertical de l'astre compris entre les deux horizons à l'instant de l'observation; et ce sera le contraire si l'observateur est tourné vers le pôle élevé lorsqu'il observe la hauteur de l'astre, c'est-à dire, si la déclinaison de ce dernier est de même dénomination et > que la latitude de l'observateur. Or, si on suppose qu'à une des extrémités de la ligne de section des deux horizons, on tire une tangente à chacun de ces deux plans, il est visible que ces deux droites formeront un angle ayant pour sommet le vrai point d'*est* ou d'*ouest*, et égal à celui de la verticale; mais les arcs des verticaux de l'astre compris entre les deux horizons sont si petits, qu'on peut les considérer comme des lignes droites égales à celles qui leur correspondent entre les deux tangentes, c'est-à-dire, égales aux petites droites élevées perpendiculairement sur la tangente de l'horizon vrai aux points où elle est rencontrée par les sinus prolongés des angles azimutaux et compris entre les deux tangentes. Or, il est clair que chacune de ces petites droites est égale à la tangente de l'angle de la verticale multipliée par le cosinus de l'angle azimutal à l'instant de l'observation. Car, si à une distance du sommet *est* ou *ouest* de l'angle des tangentes aux deux horizons, égale au rayon, on élève une perpendiculaire, la partie de cette dernière comprise entre les deux tangentes, sera évidemment la tangente trigonométrique de l'angle des deux tangentes ou de la verticale, c'est-à-dire qu'elle sera égale à ω sin. 2 L. Mais, dans le triangle rectiligne rectangle que nous venons de considérer, chaque parallèle à la base ω sin. 2 L est égale à cette dernière ligne multipliée par la distance de son pied au sommet, et divisée par la base du triangle. Or, la distance du pied de chacune des perpendiculaires au sommet *est* ou *ouest* de l'angle des deux tangentes, est évidemment le cosinus de l'angle azimutal de l'astre au moment où on observe sa hauteur, et nous supposons le rayon égal à l'unité; donc, représentant par M l'angle azimutal de la lune à l'instant où on observe sa hauteur, et par N celui du soleil ou de l'étoile qu'on observe en même temps, on aura

$$da = \omega \sin. 2\,L \cos. M \;.\;.\;.\;.\;.\; (13),$$

$$db = \omega \sin. 2\,L \cos. N \;.\;.\;.\;.\;.\; (14)\;(*).$$

(*) Nous faisions précéder, dans l'*Art du calcul astronomique des Navigateurs*, les expressions de da et db du double signe $\pm$, parce que nous comptions l'azimut d'un astre à partir du quart du méridien le plus voisin du vertical de l'astre, ce qui donnoit toujours l'angle azimutal < 90;

Substituant ces valeurs de da et de db dans l'équation (12), mettant à la place de ω la valeur numérique $\frac{1}{327}$ que nous lui supposons, représentant par φ et ξ les différences constantes $\alpha - a$ et $b - \beta$; enfin, multipliant la valeur de dx par $206264'',8$ qui est la valeur approchée du rayon du cercle en secondes, afin d'avoir aussi celle de dx en secondes, on aura, toutes réductions faites,

$$dx = \frac{1254'' \sin. 2L}{\sin. x} \Big\{ 2 \sin. \tfrac{1}{2}(N+M) \sin. \tfrac{1}{2}(N \backsim M) \sin. \tfrac{1}{2}(\varphi + \xi) \cos. \tfrac{1}{2}[(\alpha + a) \backsim (\beta + b)] + (\text{tang.}\, b \cos. N + \text{tang.}\, a \cos. M) [\sin. \tfrac{1}{2}[(\alpha + a) \backsim (\beta + b)] \sin. \tfrac{1}{2}(\varphi + \xi) + \sin. \tfrac{1}{2}(D + x) \sin. \tfrac{1}{2}(D \backsim x)] \Big\} \ldots\ldots (15).$$

Il est aisé de voir que cette formule ne peut donner qu'une valeur de dx assez petite pour être négligée sans une erreur sensible; car tous ses termes sont multipliés par l'une des deux très-petites quantités $\sin. \left(\frac{\varphi + \xi}{2}\right)$ et $\sin. \left(\frac{D \quad x}{2}\right)$. Il est donc inutile que nous remplissions ces pages de nouvelles formules pour réduire celle (15) au calcul purement logarithmique. D'ailleurs, ce calcul est si simple, que tous nos lecteurs pourront, s'ils le veulent, effectuer cette réduction qui change dans les différentes circonstances relatives aux valeurs des angles azimutaux M et N qui peuvent être de même ou de différente affection. Au reste, nous allons faire une application de cette formule (15) à l'exemple de l'article 264 du texte, et supposant que dans l'instant de l'observation on a relevé le soleil à l'O$\frac{1}{4}$SO 1° 59′ O, et la lune à l'E$\frac{1}{4}$NE 4° 24′ E, ce qui donne M = 96° 51′, et N = 80° 44′.

Donc, reprenant les données de l'exemple de l'article 264, nous aurons $2L = 32° 20'$, $x = 116° 2' 20''$, $\frac{1}{2}(N + M) = 88° 47' 30''$, $\frac{1}{2}(N \backsim M) = 8° 3' 30''$, $\frac{1}{2}(\varphi + \xi) = 21' 8''$, $\frac{1}{2}[(\alpha + a) \backsim (\beta + b)] = 25° 55' 30''$, $b = 18° 52' 30''$, $a = 44° 26' 50''$, $M = 96° 51'$, $N = 80° 44'$, $\frac{1}{2}(D + x) = 116° 21'$, $\frac{1}{2}(D \backsim x) = 18' 40''$. Substituant ces valeurs dans l'équation (15), et faisant attention que $\sin. 116° 2' 20'' = \sin. 63° 57' 40''$; $\cos. 96° 51' = -\cos. 83° 9'$; $\sin. 116° 21' = \sin. 63° 39'$; on aura

$$dx = \frac{1254'' \sin. 32° 20'}{\sin. 63° 57' 40''} \Big\{ 2 \sin. 88° 47' 30'' \sin. 8° 3' 30'' \sin. 21' 8'' \cos. 25° 55' 30'' +$$

---

mais en comptant toujours l'azimut depuis le méridien élevé, comme nous le faisons dans cet ouvrage, nous évitons l'ambiguïté des signes, et les valeurs de da et db deviennent négatives dans les mêmes cas que ceux énoncés à la page 63 de l'*Art du calcul astronomique*, parce qu'alors M et N devenant $> 90°$, leur cosinus est négatif.

$(\text{tang.}\,18^\circ 52' 30'' \cos.\,80^\circ 44' - \text{tang.}\,44^\circ 26' 50'' \cos.\,83^\circ 9')\,(\sin.\,25^\circ 55' 30'' \times \sin.\,21' 8'' + \sin.\,63^\circ 39' \sin.\,18' 40'')\big\} \ldots\ldots (a)$.

Soit fait, pour soumettre cette formule au calcul logarithmique,

$$\text{tang.}\,A = \sqrt{\frac{\sin.\,63^\circ 39' \sin.\,18' 40''}{\sin.\,25^\circ 55' 30'' \sin.\,21' 8''}};\ \text{d'où } A = 53^\circ 22' 50'',$$

$$\text{tang.}\,B = \frac{\text{tang.}\,44^\circ 26' 50'' \cos.\,83^\circ 9'}{\text{tang.}\,18^\circ 22' 50'' \cos.\,80^\circ 44'};\ \text{d'où } B = 65^\circ 25' 40'';$$

donc

$$dx = \frac{1254'' \sin.\,32^\circ 20'}{\sin.\,63^\circ 57' 40''}\Big\{2 \sin.\,88^\circ 47' 30'' \sin.\,8^\circ 3' 30'' \sin.\,21' 8'' \cos.\,25^\circ 55' 30'' + \text{tang.}\,18^\circ 52' 30'' \cos.\,80^\circ 44' \sin.\,25^\circ 55' 30'' \sin.\,21' 8'' (1 - \text{tang.}\,B)(1 + \text{tang.}^2 A)\Big\}.$$

Mais $1 - \text{tang.}\,B = \text{tang.}\,45^\circ - \text{tang.}\,B = \frac{\sin.(45^\circ - B)\sqrt{2}}{\cos.\,B.} = -\frac{\sin.\,20^\circ 25' 40'' \sqrt{2}}{\cos.\,65^\circ 25' 40''}$, et $1 + \text{tang.}^2 A = \frac{1}{\cos.^2 A} = \frac{1}{\cos.^2 53^\circ 22' 50''}$; donc faisant

$$\cos.\,E = \frac{1}{\cos.\,53^\circ 22' 50''}\sqrt{\frac{\text{tang.}\,18^\circ 52' 30'' \cos.\,80^\circ 44' \text{ tang.}\,25^\circ 55' 50'' \sin.\,20^\circ 25' 40''}{\sin.\,88^\circ 47' 30'' \sin.\,8^\circ 3' 30'' \cos.\,65^\circ 25' 40'' \sqrt{2}}};$$

d'où $E = 55^\circ 39' 40''$; on aura définitivement

$$dx = \frac{2508'' \sin.\,32^\circ 20' \sin.\,88^\circ 47' 30'' \sin.\,8^\circ 3' 30'' \sin.\,21' 8'' \cos\,25^\circ 55' 30'' \sin.^2 55^\circ 39' 40''}{\sin.\,63^\circ 57' 40''},$$

d'où $dx = 0'',79$, ce qui ne donne d'erreur en longitude que $24''$ (for. 2), et par conséquent peut se négliger.

NOTE VINGT-CINQUIÈME.

Examen de l'influence des petites erreurs commises dans les angles horaires de la Lune et de l'Etoile, lorsqu'on calcule la longitude du Vaisseau par la méthode enseignée à l'article 269 du texte.

1. DIFFÉRENCIANT l'équation,

$\sin.\,\alpha = \sin.\,L \cos.\,\Delta + \cos.\,A \sin.\,\Delta \cos.\,L \ldots\ldots$ (éq. 116 du texte art. 269)

par rapport à α et A, et mettant da à la place de $d\alpha$ (car représentant toujours par a la hauteur apparente de la lune, on a $da = d\alpha$), il viendra

$$da = \frac{-\cos. L \sin. \Delta \sin. A\, dA}{\cos. \alpha};$$

et substituant cette valeur dans l'équation (6) de la note XXIV, on aura

$$\frac{dt}{dA} = \frac{45^\circ \cos. L \sin. \Delta \sin. A}{q-p}\left(\frac{\cot. x \,\mathrm{tang}. a}{\cos. \alpha} - \frac{\cos. D\, \mathrm{tang}. \alpha}{\cos. a \sin. x}\right) \ldots\ldots (1);$$

or, il est évident que la quantité comprise entre parenthèses est très-petite, puisque D et a différant fort peu des quantités respectives x et α, on a de même les quantités $\cot. x$ et $\frac{\mathrm{tang}. a}{\cos. \alpha}$ qui diffèrent fort peu des respectives $\frac{\cos. D}{\sin. x}$ et $\frac{\mathrm{tang}. \alpha}{\cos. a}$; donc, comme nous l'avons déjà annoncé à l'article 269 du texte, une petite erreur commise dans l'angle horaire A de la lune, a une influence presqu'insensible sur l'heure vraie de Paris à l'instant de l'observation, surtout lorsque la latitude du vaisseau est grande ainsi que la déclinaison, et que l'angle horaire est petit, puisque toutes ces circonstances tendent à diminuer le facteur $\cos. L \sin. \Delta \times \sin. A$.

2. Représentant par β la hauteur vraie de l'étoile; par Δ' sa distance polaire; par A' l'angle horaire de cet astre, et par b sa hauteur apparente, on aura d'abord

$$\sin. \beta = \sin. L \cos. \Delta' + \cos. A' \sin. \Delta' \cos. L;$$

et différenciant cette équation par rapport à β et A', en faisant $d\beta = db$, puisque $b - \beta$ est une quantité constante, on aura $db = -\frac{\sin. \Delta' \cos. L \sin. A' dA'}{\cos. \beta}$; et substituant cette valeur dans l'équation (3) (art. 3, note XXIV), ou plutôt dans celle

$$dt = \frac{45^\circ \,\mathrm{tang}. b}{q-p}\left(\frac{\cos. D \cos. \alpha}{\sin. x \cos. a} - \cot. x\right) db,$$

on aura l'équation

$$\frac{dt}{dA'} = \frac{45^\circ \,\mathrm{tang}. b \cos. L \sin. \Delta' \sin. A'}{(q-p)\cos. \beta}\left(\cot. x - \frac{\cos. D \cos. \alpha}{\sin. x \cos. a}\right) \ldots\ldots (2),$$

d'où l'on tirera relativement à l'étoile observée, les mêmes conclusions que celles tirées de l'équation (1) relativement à la lune, ce qui vient toujours à l'appui de ce que nous avons annoncé à la fin de l'article 269 du texte.

NOTE VINGT-SIXIÈME.

De l'expression de la différence entre la distance vraie et la distance apparente de deux astres obtenue par le simple calcul différentiel.

(Voyez l'article 275 du texte.)

DIFFÉRENCIANT l'équation

$$\cos. a \cos. b \cos. Z = \cos. D - \sin. a \sin. b \ldots\ldots \text{(A)}$$

par rapport à a, b et D, l'on a

$$\cos. a \sin. b \cos Z db + \sin. a \cos. b \cos. Z da = \sin. a \cos. b db + \cos. a \sin. b da + \sin. D dD \ldots \text{(M)}.$$

Mais la hauteur apparente a de la lune est plus petite que la vraie α de la quantité p, et la hauteur apparente b du soleil est plus grande que la vraie β de la quantité q; donc $da = p$ et $db = -q$: de plus, $dD = y$, ce qui réduit l'équation (M) à celle

$$p \sin. a \cos. b \cos. Z - q \cos. a \sin. b \cos. Z = p \cos. a \sin. b - q \sin. a \cos. b + y \sin. D.$$

Substituant dans cette dernière équation la valeur de cos. Z $\left(= \frac{\cos. D - \sin a \sin. b}{\cos. a \cos. b}\right)$, il vient

$$\frac{p \sin. a \cos. D}{\cos. a} - \frac{p \sin.^2 a \sin. b}{\cos. a} - \frac{q \sin. b \cos. D}{\cos. b} + \frac{q \sin.^2 b \sin. a}{\cos. b} = p \cos. a \sin. b - q \sin. a \cos. b + y \sin. D;$$

d'où $y = q \left(\frac{\sin. a - \sin. b \cos. D}{\cos. b \sin. D}\right) - p \left(\frac{\sin. b - \sin. a \cos. D}{\cos. a \sin. D}\right)$; et à cause que les facteurs de q et de p sont respectivement les expressions de cos. S et de cos. L, on retrouve l'équation

$$y = q \cos. S - p \cos. L,$$

qui est la 126.ième du texte.

NOTE VINGT-SEPTIÈME.

Démonstration de l'équation (A) *de l'article* 280 *du texte.*

SOIT $y^{(x)}$ une fonction de la variable x, et considérons dans ce moment cette dernière, comme déterminant le nombre de termes qui précèdent $y^{(x)}$ dans la série croissante ou décroissante

$$y, y', y'', y''' \ldots\ldots y^{(x)},$$

dont nous supposons que les différences de tous les ordres sont variables; nous aurons donc

$$\left.\begin{array}{l} y' - y = \pm\Delta y \\ y'' - y' = \pm\Delta y' \\ y''' - y'' = \pm\Delta y'' \\ y^{iv} - y''' = \pm\Delta y''' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(x)} - y^{(x-1)} = \pm\Delta y^{(x-1)} \end{array}\right\}\ldots\ldots(C),\quad \text{d'où}\left\{\begin{array}{l} y' = y\pm\Delta y \\ y'' = y'\pm\Delta y' \\ y''' = y''\pm\Delta y'' \\ y^{iv} = y'''\pm\Delta y''' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(x)} = y^{(x-1)}\pm\Delta y^{(x-1)} \end{array}\right\}\ldots\ldots(D),$$

et prenant la différence des équations (D), on aura

$$\begin{array}{l} \Delta y' = \Delta y \pm \Delta\Delta y \\ \Delta y'' = \Delta y' \pm \Delta\Delta y' \\ \Delta y''' = \Delta y'' \pm \Delta\Delta y'' \\ \Delta y^{iv} = \Delta y''' \pm \Delta\Delta y''' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta y^{(x)} = \Delta y^{(x-1)} \pm \Delta\Delta y^{(x-1)} \end{array}$$

Substituant la valeur de $\Delta y'$, première équation du groupe précédent, dans celle de $\Delta y''$, seconde équation du même groupe; substituant de même cette valeur de $\Delta y''$ dans la troisième équation, et ainsi de suite, on aura la suite d'équations:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y' = \Delta y \pm \Delta\Delta y \\ \Delta y'' = \Delta y \pm 2\Delta\Delta y + \Delta^3 y \\ \Delta y''' = \Delta y \pm 3\Delta\Delta y + 3\Delta^3 y \pm \Delta^4 y \\ \Delta y^{iv} = \Delta y \pm 4\Delta\Delta y + 6\Delta^3 y \pm 4\Delta^4 y + \Delta^5 y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta y^{(x-1)} = \Delta y \pm (x-1)\Delta\Delta y + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\Delta^3 y \pm \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3}\Delta^4 y \ldots \pm \Delta^x y \end{array}\right\}\ldots(E).$$

Substituant la valeur de y' que donne la première équation du groupe (D) dans la seconde équation du même groupe, et continuant successivement ces substitutions jusqu'à la dernière équation, l'on a

$$y^{(x)}=y\pm\Delta y\pm\Delta y'\pm\Delta y''\pm\Delta y'''\pm\Delta y^{iv}\ \ldots\ldots\ \pm\Delta y^{(x-1)}.$$

Enfin, en substituant, dans cette équation, les valeurs de $\Delta y'$, $\Delta y''$, $\Delta y'''$. . . . . . . $\Delta y^{(x-1)}$ que donnent les équations du groupe (E), on a celle

$$y^{(x)}=y\pm x\Delta y+\frac{x(x-1)}{2}\Delta\Delta y\pm\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\Delta^3 y+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3.4}\Delta^4 y\pm,\ \text{etc.}\ldots(F).$$

Or, il est évident que $y^{(x)}$ est le terme général de la suite

$$y, y', y'', y'''\ \ldots\ldots\ y^{(x)}.$$

Donc, si, dans une série donnée, on peut parveuir à des différences d'un ordre quelconque $n+1$ qui soient nulles, la formule générale (F) qui, dans ce cas-là, se réduit à l'équation (A) de l'article 280, en donnera tout de suite le terme général, et par conséquent servira à trouver un terme quelconque compris entre ceux connus y, y', etc. supposés espacés également, en faisant x égal au nombre entier d'espaces égaux compris depuis le premier terme y, plus une fraction de l'espace égale à l'espace compris entre le terme que l'on veut intercaler, et celui qui le précède immédiatement.

FIN DES NOTES.

Figur

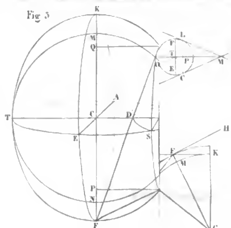
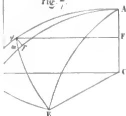
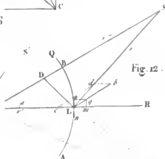
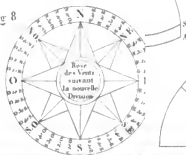
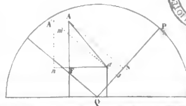

Fig. 5


Fig. 10.


Fig. 7.


Fig. 6
Fig. 12.


Fig. 8
Rose
des Vents
suivant
la nouvelle
Division


Fig. 15.


NAPOLI

TABLES.

TABLE I. ***De la différence des latitudes vraies et corrigées, en supposant que le rapport des axes de la terre est*** $= \frac{321}{320}$ (voyez la note IV, art. 4).

Latitudes.	Différences.		Latitudes.	Différences.		Latitudes.	Différences.		Latitudes.	Différences.	
D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.
0	0	0	23	3	51,1	46	5	22,0	69	3	35,1
1	0	11,1	24	3	58,9	47	5	21,2	70	3	26,6
2	0	22,3	25	4	6,3	48	5	20,0	71	3	17,9
3	0	33,5	26	4	13,3	49	5	18,6	72	3	8,9
4	0	44,7	27	4	20,1	50	5	17,0	73	2	59,7
5	0	55,8	28	4	26,5	51	5	14,8	74	2	50,3
6	1	6,8	29	4	32,7	52	5	12,0	75	2	40,7
7	1	17,7	30	4	38,6	53	5	9,2	76	2	30,9
8	1	28,5	31	4	43,9	54	5	6,0	77	2	20,9
9	1	39,2	32	4	49,0	55	5	2,2	78	2	10,7
10	1	49,8	33	4	53,8	56	4	58,2	79	2	0,4
11	2	0,4	34	4	58,2	57	4	53,8	80	1	49,8
12	2	10,7	35	5	2,2	58	4	49,0	81	1	39,2
13	2	20,9	36	5	6,0	59	4	43,9	82	1	28,5
14	2	30,9	37	5	9,2	60	4	38,6	83	1	17,7
15	2	40,7	38	5	12,0	61	4	32,7	84	1	6,8
16	2	50,3	39	5	14,8	62	4	26,5	85	0	55,8
17	2	59,7	40	5	17,0	63	4	20,1	86	0	44,7
18	3	8,9	41	5	18,6	64	4	13,3	87	0	33,5
19	3	17,9	42	5	20,0	65	4	6,3	88	0	22,3
20	3	26,6	43	5	21,2	66	3	58,9	89	0	11,1
21	3	35,1	44	5	22,0	67	3	51,1	90	0	0
22	3	43,2	45	5	22,0	68	3	43,2			
23	3	51,1	46	5	22,0	69	3	35,1			

TABLE II. *Des latitudes croissantes, en supposant que la figure de la terre est celle d'un ellipsoïde, et que le rapport de ses axes est* $= \frac{321}{320}$ (voy. la note IV, art. 4).

Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.
D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.
0	0	0,	00	9.94	4	0	238,	70	9.97	8	0	478,	59	10,04
	10	9,	94	9.94		10	248,	67	9.96		10	488,	63	10,04
	20	19,	88	9.93		20	258,	63	9.97		20	498,	67	10,05
	30	29,	81	9.94		30	268,	60	9.97		30	508,	72	10,05
	40	39,	75	9.94		40	278,	57	9.97		40	518,	77	10,06
	50	49,	69	9.94		50	288,	54	9.98		50	528,	83	10,06
1	0	59,	63	9.94	5	0	298,	52	9.98	9	0	538,	89	10,06
	10	69,	57	9.94		10	308,	50	9.98		10	548,	95	10,07
	20	79,	51	9.94		20	318,	48	9.98		20	559,	02	10,08
	30	89,	45	9.94		30	328,	46	9.98		30	569,	10	10,08
	40	99,	39	9.95		40	338,	44	9.99		40	579,	18	10,08
	50	109,	34	9.94		50	348,	43	9.99		50	589,	26	10,09
2	0	119,	28	9.94	6	0	358,	42	10,00	10	0	599,	35	10,10
	10	129,	22	9.95		10	368,	42	10,00		10	609,	45	10,10
	20	139,	17	9.95		20	378,	42	10,00		20	619,	55	10,11
	30	149,	12	9.94		30	388,	42	10,00		30	629,	66	10,11
	40	159,	06	9.95		40	398,	42	10,01		40	639,	77	10,12
	50	169,	01	9.95		50	408,	43	10,01		50	649,	89	10,12
3	0	178,	96	9.96	7	0	418,	44	10,02	11	0	660,	01	10,13
	10	188,	92	9.95		10	428,	46	10,02		10	670,	14	10,13
	20	198,	87	9.96		20	438,	48	10,02		20	680,	27	10,14
	30	208,	83	9.95		30	448,	50	10,03		30	690,	41	10,15
	40	218,	78	9.96		40	458,	53	10,03		40	700,	56	10,15
	50	228,	74	9.96		50	468,	56	10,03		50	710,	71	10,16
4	0	238,	70		8	0	478,	59		12	0	720,	87	

Suite de la TABLE *des latitudes croissantes sur l'ellipsoïde.*

Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.
D.	M.	Min.	Cent.	Min.Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min.Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min.Cent.
12	0	720,	87	10, 17	16	0	966,	83	10, 35	20	0	1217,	82	10, 59
	10	731,	04	10, 17		10	977,	18	10, 35		10	1228,	41	10, 60
	20	741,	21	10, 18		20	987,	53	10, 37		20	1239,	01	10, 61
	30	751,	39	10, 19		30	997,	90	10, 37		30	1249,	62	10, 62
	40	761,	58	10, 19		40	1008,	27	10, 39		40	1260,	24	10, 64
	50	771,	77	10, 20		50	1018,	66	10, 39		50	1270,	88	10, 65
13	0	781,	97	10, 20	17	0	1029,	05	10, 40	21	0	1281,	53	10, 66
	10	792,	17	10, 21		10	1039,	45	10, 41		10	1292,	19	10, 67
	20	802,	38	10, 22		20	1049,	86	10, 42		20	1302,	86	10, 68
	30	812,	60	10, 23		30	1060,	28	10, 44		30	1313,	54	10, 70
	40	822,	83	10, 24		40	1070,	72	10, 44		40	1324,	24	10, 71
	50	833,	07	10, 24		50	1081,	16	10, 45		50	1334,	95	10, 72
14	0	843,	31	10, 25	18	0	1091,	61	10, 46	22	0	1345,	67	10, 73
	10	853,	56	10, 26		10	1102,	07	10, 47		10	1356,	40	10, 75
	20	863,	82	10, 27		20	1112,	54	10, 48		20	1367,	15	10, 76
	30	874,	09	10, 27		30	1123,	02	10, 49		30	1377,	91	10, 77
	40	884,	36	10, 28		40	1133,	51	10, 50		40	1388,	68	10, 79
	50	894,	64	10, 28		50	1144,	01	10, 51		50	1399,	47	10, 80
15	0	904,	92	10, 30	19	0	1154,	52	10, 53	23	0	1410,	27	10, 81
	10	915,	22	10, 31		10	1165,	05	10, 53		10	1421,	08	10, 83
	20	925,	53	10, 31		20	1175,	58	10, 54		20	1431,	91	10, 84
	30	935,	84	10, 32		30	1186,	12	10, 56		30	1442,	75	10, 85
	40	946,	16	10, 33		40	1196,	68	10, 56		40	1453,	60	10, 87
	50	956,	49	10, 34		50	1207,	24	10, 58		50	1464,	47	10, 89
16	0	966,	83		20	0	1217,	82		24	0	1475,	36	

Suite de la TABLE *des latitudes croissantes sur l'ellipsoïde.*

Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.
D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.
24	0	1475,	36	10, 89	28	0	1741,	12	11, 28	32	0	2017,	04	11, 75
	10	1486,	25	10, 91		10	1752,	40	11, 30		10	2028,	79	11, 77
	20	1497,	16	10, 93		20	1763,	70	11, 31		20	2040,	66	11, 79
	30	1508,	09	10, 94		30	1775,	01	11, 33		30	2052,	35	11, 82
	40	1519,	03	10, 95		40	1786,	34	11, 35		40	2064,	17	11, 84
	50	1529,	98	10, 97		50	1797,	69	11, 37		50	2076,	01	11, 86
25	0	1540,	95	10, 99	29	0	1809,	06	11, 39	33	0	2087,	87	11, 88
	10	1551,	94	11, 00		10	1820,	45	11, 41		10	2099,	75	11, 91
	20	1562,	94	11, 01		20	1831,	86	11, 43		20	2111,	66	11, 93
	30	1573,	95	11, 03		30	1843,	29	11, 44		30	2123,	59	11, 95
	40	1584,	98	11, 05		40	1854,	73	11, 46		40	2135,	54	11, 98
	50	1596,	03	11, 06		50	1866,	19	11, 48		50	2147,	52	12, 00
26	0	1607,	09	11, 08	30	0	1877,	67	11, 51	34	0	2159,	52	12, 02
	10	1618,	17	11, 10		10	1889,	18	11, 52		10	2171,	54	12, 04
	20	1629,	27	11, 11		20	1900,	70	11, 54		20	2183,	58	12, 07
	30	1640,	38	11, 13		30	1912,	24	11, 56		30	2195,	65	12, 10
	40	1651,	51	11, 14		40	1923,	80	11, 58		40	2207,	75	12, 12
	50	1662,	65	11, 16		50	1935,	38	11, 60		50	2219,	87	12, 14
27	0	1673,	81	11, 17	31	0	1946,	98	11, 63	35	0	2232,	01	12, 17
	10	1684,	98	11, 19		10	1958,	61	11, 65		10	2244,	18	12, 20
	20	1696,	17	11, 21		20	1970,	26	11, 67		20	2256,	38	12, 22
	30	1707,	38	11, 23		30	1981,	93	11, 68		30	2268,	60	12, 24
	40	1718,	61	11, 25		40	1993,	61	11, 70		40	2280,	84	12, 27
	50	1729,	86	11, 26		50	2005,	31	11, 73		50	2293,	11	12, 30
28	0	1741,	12		32	0	2017,	04		36	0	2305,	41	

Suite de la TABLE *des latitudes croissantes sur l'ellipsoïde.*

Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.
D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.
36	0	2305,	41	12, 32	40	0	2608,	93	13, 02	44	0	2930,	94	13, 88
	10	2317,	73	12, 35		10	2621,	95	13, 06		10	2944,	82	13, 92
	20	2330,	08	12, 38		20	2635,	01	13, 09		20	2958,	74	13, 95
	30	2342,	46	12, 40		30	2648,	10	13, 12		30	2972,	69	14, 00
	40	2354,	86	12, 43		40	2661,	22	13, 15		40	2986,	69	14, 03
	50	2367,	29	12, 46		50	2674,	37	13, 19		50	3000,	72	14, 08
37	0	2379,	75	12, 49	41	0	2687,	56	13, 22	45	0	3014,	80	14, 12
	10	2392,	24	12, 51		10	2700,	78	13, 25		10	3028,	92	14, 16
	20	2404,	75	12, 54		20	2714,	03	13, 29		20	3043,	08	14, 20
	30	2417,	29	12, 57		30	2727,	32	13, 32		30	3057,	28	14, 25
	40	2429,	86	12, 60		40	2740,	64	13, 36		40	3071,	53	14, 39
	50	2442,	46	12, 63		50	2754,	00	13, 39		50	3085,	82	14, 33
38	0	2455,	09	12, 65	42	0	2767,	39	13, 43	46	0	3100,	15	14, 37
	10	2467,	74	12, 68		10	2780,	82	13 46		10	3114,	52	14, 42
	20	2480,	42	12, 71		20	2794,	28	13, 50		20	3128,	94	14, 46
	30	2493,	13	12, 75		30	2807,	78	13, 54		30	3143,	40	14, 51
	40	2505,	88	12, 78		40	2821,	32	13, 57		40	3157,	91	14, 55
	50	2518,	66	12, 80		50	2834,	89	13, 61		50	3172,	46	14, 60
39	0	2531,	46	12, 84	43	0	2848,	50	13, 64	47	0	3187,	06	14, 64
	10	2544,	30	12, 86		10	2862,	14	13, 68		10	3201,	70	14, 69
	20	2557,	16	12, 90		20	2875,	82	13, 73		20	3216,	39	14, 74
	30	2570,	06	12, 92		30	2889,	55	13, 76		30	3231,	15	14, 78
	40	2582,	98	12, 96		40	2903,	31	13, 80		40	3245,	91	14, 83
	50	2595,	94	12, 99		50	2917,	11	13, 83		50	3260,	74	14, 88
40	0	2608,	93		44	0	2930,	94		48	0	3275,	62	

Suite de la TABLE *des latitudes croissantes sur l'ellipsoïde.*

Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Diffé-rences.
D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.
48	0	3275,	62		52	0	3648,	32		56	0	4056,	15	
	10	3290,	55	14, 93		10	3664,	56	16, 24		10	4074,	04	17, 89
	20	3305,	53	14, 98		20	3680,	85	16, 29		20	4092,	00	17, 96
	30	3320,	55	15, 02		30	3697,	21	16, 36		30	4110,	05	18, 05
	40	3335,	62	15, 07		40	3713,	63	16, 42		40	4128,	17	18, 12
	50	3350,	74	15, 12		50	3730,	11	16, 48		50	4146,	37	18, 20
49	0	3365,	92	15, 18	53	0	3746,	66	16, 55	57	0	4164,	66	18, 29
	10	3381,	15	15, 23		10	3763,	27	16, 61		10	4183,	03	18, 37
	20	3396,	43	15, 28		20	3779,	95	16, 68		20	4201,	48	18, 45
	30	3411,	76	15, 33		30	3796,	69	16, 74		30	4220,	01	18, 53
	40	3427,	14	15, 38		40	3813,	50	16, 81		40	4238,	63	18, 62
	50	3442,	58	15, 44		50	3830,	37	16, 87		50	4257,	34	18, 71
50	0	3458,	07	15, 49	54	0	3847,	31	16, 94	58	0	4276,	14	18, 80
	10	3473,	62	15, 55		10	3864,	32	17, 01		10	4295,	02	18, 88
	20	3489,	22	15, 60		20	3881,	40	17, 08		20	4313,	99	18, 97
	30	3504,	87	15, 65		30	3898,	55	17, 15		30	4333,	05	19, 06
	40	3520,	58	15, 71		40	3915,	77	17, 22		40	4352,	20	19, 15
	50	3536,	34	15, 76		50	3933,	06	17, 29		50	4371,	45	19, 25
51	0	3552,	17	15, 83	55	0	3950,	42	17, 36	59	0	4390,	78	19, 33
	10	3568,	05	15, 88		10	3967,	86	17, 44		10	4410,	21	19, 43
	20	3583,	98	15, 93		20	3985,	37	17, 51		20	4429,	74	19, 53
	30	3599,	98	16, 00		30	4002,	95	17, 58		30	4449,	36	19, 62
	40	3616,	03	16, 05		40	4020,	61	17, 66		40	4469,	08	19, 72
	50	3632,	15	16, 12		50	4038,	34	17, 73		50	4488,	90	19, 82
52	0	3648,	32	16, 17	56	0	4056,	15	17, 81	60	0	4508,	82	19, 92

Suite de la TABLE *des latitudes croissantes sur l'ellipsoïde.*

Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.
D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.
60	0	4508,	82	20, 02	64	0	5020,	17	22, 85	68	0	5610,	96	26, 77
	10	4528,	84	20, 12		10	5043,	02	22, 99		10	5637,	73	26, 96
	20	4548,	96	20, 23		20	5066,	01	23, 13		20	5664,	69	26, 16
	30	4569,	19	20, 33		30	5089,	14	23, 27		30	5691,	85	27, 36
	40	4589,	52	20, 43		40	5112,	41	23, 42		40	5719,	21	27, 57
	50	4609,	95	20, 54		50	5135,	83	23, 56		50	5746,	78	27, 78
61	0	4630,	49	20, 65	65	0	5159,	39	23, 71	69	0	5774,	56	27, 99
	10	4651,	14	20, 76		10	5183,	10	23, 86		10	5802,	55	28, 20
	20	4671,	90	20, 87		20	5206,	96	24, 01		20	5830,	75	28, 42
	30	4692,	77	20, 99		30	5230,	97	24, 17		30	5859,	17	28, 64
	40	4713,	76	21, 10		40	5255,	14	24, 32		40	5887,	81	28, 87
	50	4734,	86	21, 21		50	5279,	46	24, 48		50	5916,	68	29, 10
62	0	4756,	07	21, 33	66	0	5303,	94	24, 64	70	0	5945,	78	29, 34
	10	4777,	40	21, 45		10	5328,	58	24, 81		10	5975,	12	29, 57
	20	4798,	85	21, 57		20	5353,	39	24, 97		20	6004,	69	29, 81
	30	4820,	42	21, 69		30	5378,	36	25, 14		30	6034,	50	30, 06
	40	4842,	11	21, 81		40	5403,	50	25, 31		40	6064,	56	30, 31
	50	4863,	92	21, 93		50	5428,	81	25, 48		50	6094,	87	30, 57
63	0	4885,	85	22, 06	67	0	5454,	29	25, 65	71	0	6125,	44	30, 83
	10	4907,	91	22, 19		10	5479,	94	25, 83		10	6156,	27	31, 09
	20	4930,	10	22, 32		20	5505,	77	26, 02		20	6187,	36	31, 36
	30	4952,	42	22, 45		30	5531,	79	26, 20		30	6218,	72	31, 63
	40	4974,	87	22, 58		40	5557,	99	26, 39		40	6250,	35	31, 91
	50	4997,	45	22, 72		50	5584,	38	26, 58		50	6282,	26	32, 20
64	0	5020,	17		68	0	5610,	96		72	0	6314,	46	

Suite de la TABLE *des latitudes croissantes sur l'ellipsoïde.*

Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.	Latitudes vraies.		Latitudes croissantes.		Différences.
D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.	D.	M.	Min.	Cent.	Min. Cent.
72	0	6314,	46	32, 49	76	0	7189,	28	41, 56	80	0	8354,	09	58, 06
	10	6346,	95	32, 78		10	7230,	84	42, 06		10	8412,	15	59, 04
	20	6379,	73	33, 09		20	7272,	90	42, 57		20	8471,	19	60, 06
	30	6412,	82	33, 39		30	7315,	47	43, 08		30	8531,	25	61, 11
	40	6446,	21	33, 70		40	7358,	55	43, 61		40	8592,	36	62, 20
	50	6479,	91	34, 02		50	7402,	16	44, 16		50	8654,	56	63, 34
73	0	6513,	93	34, 35	77	0	7446,	32	44, 73	81	0	8717,	90	64, 51
	10	6548,	28	34, 68		10	7491,	05	45, 30		10	8782,	41	65, 73
	20	6582,	96	35, 02		20	7536,	35	45, 89		20	8848,	14	66, 99
	30	6617,	98	35, 37		30	7582,	24	46, 49		30	8915,	13	68, 31
	40	6653,	35	35, 72		40	7628,	73	47, 12		40	8983,	44	69, 69
	50	6689,	07	36, 08		50	7675,	85	47, 76		50	9053,	13	71, 11
74	0	6725,	15	36, 44	78	0	7723,	61	48, 42	82	0	9124,	24	72, 60
	10	6761,	59	36, 82		10	7772,	03	49, 09		10	9196,	84	74, 15
	20	6798,	41	37, 21		20	7821,	12	49, 79		20	9270,	99	75, 77
	30	6835,	62	37, 61		30	7870,	91	50, 51		30	9346,	76	77, 46
	40	6873,	23	38, 00		40	7921,	42	51, 25		40	9424,	22	79, 24
	50	6911,	23	38, 41		50	7972,	67	52, 00		50	9503,	46	81, 09
75	0	6949,	64	38, 83	79	0	8024,	67	52, 79	83	0	9584,	55	83, 03
	10	6988,	47	39, 27		10	8077,	46	53, 61		10	9667,	58	85, 08
	20	7027,	74	39, 70		20	8131,	07	54, 43		20	9752,	66	87, 22
	30	7067,	44	40, 15		30	8185,	50	55, 30		30	9839,	88	89, 48
	40	7107,	59	40, 61		40	8240,	80	56, 19		40	9929,	36	91, 85
	50	7148,	20	41, 08		50	8296,	99	57, 10		50	10021,	21	94, 36
76	0	7189,	28		80	0	8354,	09		84	0	10115,	57	

Suite de la TABLE *des latitudes croissantes sur l'ellipsoïde.*

Latitudes vraies.	Latitudes croissantes.	Différences.	Latitudes vraies.	Latitudes croissantes.	Différences.	Latitudes vraies.	Latitudes croissantes.	Différences.
D. M.	Min. Cent.	Min. Cent.	D. M.	Min. Cent.	Min. Cent.	D. M.	Min. Cent.	Min. Cent.
84 0	10115, 57	97, 01	86 0	11511, 14	146, 42	88 0	13895, 01	299, 18
10	10212, 58	99, 82	10	11657, 56	152, 92	10	14194, 19	327, 70
20	10312, 40	102, 78	20	11810, 48	160, 02	20	14521, 89	362, 25
30	10415, 18	105, 94	30	11970, 50	167, 83	30	14884, 14	404, 95
40	10521, 12	109, 29	40	12138, 33	176, 42	40	15289, 09	459, 08
50	10630, 41	112, 86	50	12314, 75	185, 96	50	15748, 17	529, 96
85 0	10743, 27	116, 69	87 0	12500, 71	196, 58	89 0	16278, 13	626, 80
10	10859, 96	120, 76	10	12697, 29	208, 48	10	16904, 93	767, 13
20	10980, 72	125, 16	20	12905, 77	221, 94	20	17672, 06	989, 00
30	11105, 88	129, 86	30	13127, 71	237, 25	30	18661, 06	1393, 90
40	11235, 74	134, 95	40	13364, 96	254, 83	40	20054, 96	2382, 87
50	11370, 69	140, 45	50	13619, 79	275, 22	50	22437, 83	∞
86 0	11511, 14		88 0	13895, 01		90 0	∞	

TABLE III. *Des différences entre les arcs de l'équateur du sphéroïde elliptique et les arcs correspondans de l'équateur de la sphère inscrite, en supposant que le rapport des axes est* $=\frac{321}{320}$ (note VII, art. 1).

	DIFFÉRENCES.			DIFFÉRENCES.		DIFFÉRENCES.
Degrés.	Minutes.	Secondes.	Minutes.	Secondes.	Secondes.	Décim. de secondes.
1		11, 25	1	0, 1875	1	0, 003125
2		22, 5	2	0, 375	2	0, 00625
3		33, 75	3	0, 5625	3	0, 009375
4		45	4	0, 75	4	0, 0125
5		56, 25	5	0, 9375	5	0, 015625
6	1	7, 5	6	1, 125	6	0, 01875
7	1	18, 75	7	1, 3125	7	0, 021875
8	1	30	8	1, 5	8	0, 025
9	1	41, 25	9	1, 6875	9	0, 028125
10	1	52, 5	10	1, 875	10	0, 03125
20	3	45	20	3, 75	20	0, 0625
30	5	37, 5	30	5, 625	30	0, 09375
40	7	30	40	7, 5	40	0, 125
50	9	22, 5	50	9, 375	50	0, 15625
60	11	15	60	11, 25	60	0, 1875
70	13	7, 5				
80	15	0				
90	16	52, 5				

TABLE IV. *Des inclinaisons de l'horizon visuel avec l'horizon vrai.* (Voyez l'article 106.)

Elevation au-dessus de la mer. (mètr. décim.)	Inclinaison de l'horizon. (min. sec.)	différ.	Elév. au-dess. de la mer. (mètr.)	Inclinaison de l'horizon. (min. sec.)	différ.	Elév. au-dess. de la mer. (mètr.)	Inclinaison de l'horizon. (min. sec.)	diff.	Elévat. au-dess. de la mer. (mètr.)	Inclinaison de l'horizon. (min. sec.)	diff.
0, 5	1 22		18	8 11		45	12 56		72	16 21	
1	1 56	34	19	8 24	13	46	13 4	8	73	16 28	7
1, 5	2 22	26	20	8 37	13	47	13 12	8	74	16 34	6
2	2 44	22	21	8 50	13	48	13 21	9	75	16 41	7
2, 5	3 3	19	22	9 2	12	49	13 29	8	76	16 47	6
3	3 20	17	23	9 14	12	50	13 37	8	77	16 54	7
3, 5	3 38	18	24	9 26	12	51	13 45	8	78	17 1	7
4	3 51	13	25	9 38	12	52	13 53	8	79	17 8	7
4, 5	4 5	14	26	9 50	12	53	14 2	9	80	17 14	6
5	4 19	14	27	10 1	11	54	14 10	8	81	17 20	6
5, 5	4 31	12	28	10 12	11	55	14 18	8	82	17 27	7
6	4 43	12	29	10 23	11	56	14 25	7	83	17 33	6
6, 5	4 55	12	30	10 33	10	57	14 32	7	84	17 40	7
7	5 6	11	31	10 44	11	58	14 40	8	85	17 46	6
7, 5	5 17	11	32	10 54	10	59	14 48	8	86	17 52	6
8	5 27	10	33	11 4	10	60	14 55	7	87	17 58	6
8, 5	5 37	10	34	11 14	10	61	15 3	8	88	18 4	6
9	5 47	10	35	11 24	10	62	15 10	7	89	18 10	6
9, 5	5 56	9	36	11 34	10	63	15 17	7	90	18 17	7
10	6 6	10	37	11 43	9	64	15 24	7	91	18 23	6
11	6 23	17	38	11 53	10	65	15 32	8	92	18 29	6
12	6 40	17	39	12 2	9	66	15 39	7	93	18 35	6
13	6 57	17	40	12 11	9	67	15 46	7	94	18 41	6
14	7 13	16	41	12 20	9	68	15 53	7	95	18 47	6
15	7 28	15	42	12 29	9	69	16	7	96	18 53	6
16	7 42	14	43	12 38	9	70	16 7	7	97	18 59	6
17	7 57	15	44	12 47	9	71	16 14	7	98	19 5	6
18	8 11	14	45	12 56	9	72	16 21	7	99	19 11	6
									100	19 16	5

TABLE V. ***De la réduction de la parallaxe horizontale de la lune pour Paris, à celle qui convient à une autre latitude.*** (Note XI, art. 5.)

Haut. du Pôle.	PARALLAXE HORIZONTALE DE LA LUNE POUR PARIS.										
	52′	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′	60′	61′	62′
0°	+5″,3	+5″,4	+5″,5	+5″,6	+5″,7	+5″,8	+5″,9	+6″,0	+6″,1	+6″,2	+6″,3
5	+5,2	+5,3	+5,4	+5,5	+5,6	+5,7	+5,8	+5,9	+6,0	+6,1	+6,2
10	+5,0	+5,1	+5,2	+5,3	+5,4	+5,5	+5,6	+5,7	+5,8	+5,9	+6,0
15	+4,7	+4,8	+4,9	+4,9	+5,0	+5,1	+5,2	+5,3	+5,4	+5,5	+5,6
20	+4,2	+4,3	+4,4	+4,4	+4,5	+4,6	+4,7	+4,8	+4,9	+5,0	+5,0
25	+3,6	+3,7	+3,8	+3,8	+3,9	+4,0	+4,0	+4,1	+4,2	+4,2	+4,3
30	+3,0	+3,0	+3,1	+3,1	+3,2	+3,2	+3,3	+3,4	+3,4	+3,5	+3,5
35	+2,2	+2,3	+2,3	+2,3	+2,4	+2,4	+2,5	+2,5	+2,6	+2,6	+2,7
40	+1,4	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	+1,6	+1,6	+1,6	+1,7	+1,7	+1,7
45	+0,6	+0,6	+0,6	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7
50	−0,2	−0,2	−0,2	−0,2	−0,2	−0,2	−0,2	−0,2	−0,2	−0,2	−0,2
55	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,1	−1,1	−1,1	−1,1	−1,1	−1,1	−1,2
60	−1,7	−1,7	−1,8	−1,8	−1,9	−1,9	−1,9	−1,9	−2,0	−2,0	−2,0
65	−2,4	−2,4	−2,5	−2,5	−2,6	−2,6	−2,6	−2,7	−2,7	−2,8	−2,8
70	−2,9	−3,0	−3,1	−3,1	−3,3	−3,2	−3,3	−3,4	−3,4	−3,5	−3,5
75	−3,4	−3,5	−3,6	−3,6	−3,7	−3,7	−3,8	−3,9	−4,0	−4,0	−4,1
80	−3,8	−3,9	−4,0	−4,1	−4,1	−4,1	−4,2	−4,3	−4,3	−4,4	−4,5
85	−4,0	−4,0	−4,1	−4,2	−4,3	−4,4	−4,4	−4,5	−4,6	−4,7	−4,7
90	−4,1	−4,1	−4,2	−4,3	−4,4	−4,4	−4,5	−4,6	−4,7	−4,7	−4,8

TABLE VI. *De l'augmentation du demi-diamètre horizontal de la lune à divers degrés de hauteur apparente.* (Voyez l'article 118.)

Haut.r appar.	Demi-diamètre horizontal de la lune en minutes et secondes.					Haut.r appar.	Demi-diamètre horizontal de la lune en minutes et secondes.				
Degrés	14' 45"	15' 15"	15' 45"	16' 15"	16' 45"	Degrés	14' 45"	15' 15"	15' 45"	16' 15"	16' 45"
3	1"	1"	1"	1"	1"	48	10"	11"	12"	13"	13"
6	2	2	2	2	2	51	11	12	12	13	14
9	2	2	3	3	3	54	11	12	13	14	15
12	3	3	3	4	4	57	12	13	13	14	15
15	4	4	4	5	5	60	12	13	14	15	16
18	4	5	5	6	6	63	13	13	14	15	16
21	5	5	6	6	7	66	13	14	15	16	16
24	6	6	7	7	7	69	13	14	15	16	17
27	6	7	7	8	8	72	13	14	15	16	17
30	7	8	8	9	9	75	13	14	15	16	17
33	8	8	9	9	10	78	14	15	16	17	18
36	8	9	10	10	11	81	14	15	16	17	18
39	9	9	10	11	11	84	14	15	16	17	18
42	9	10	11	11	12	87	14	15	16	17	18
45	10	11	12	12	13	90	14	15	16	17	18

TABLE VII. *Des réfractions atmosphériques suivant Bradley, pour les hauteurs moyennes 12°,5 du thermomètre centigrade, et 757 millimètres du baromètre décimal.* (Nouv. div. du Cercle, voyez l'art. 120.)

haut.r appar.	réfrac.	differ.	haut.r appar	réfrac.	differ.	haut.r appar	réfrac.	differ.	haut.r appar.	réfrac	differ.	haut.r appar	réfrac	differ.
0°	60',92	1',64	1°	46',53	10',38	12°	9',00	0,72	23°	4',61	0,20	50°	1',75	0',26
0,10	59,28	1,59	2	36,15	7,30	13	8,28	0,56	24	4,41	0,20	55	1,49	0,22
0,20	57,69	1,54	3	28,85	5,18	14	7,72	0,52	25	4,21	0,18	60	1,27	0,20
0,30	56,15	1,51	4	23,67	3,82	15	7,20	0,46	26	4,03	0,16	65	1,07	0,17
0,40	54,64	1,46	5	19,85	2,82	16	6,74	0,40	27	3,87	0,16	70	0,90	0,18
0,50	53,18	1,41	6	17,03	2,20	17	6,34	0,36	28	3,71	0,12	75	0,72	0,16
0,60	51,77	1,38	7	14,83	1,57	18	5,98	0,33	29	3,57	0,15	80	0,56	0,14
0,70	50,39	1,32	8	13,26	1,41	19	5,65	0,30	30	3,42	0,57	85	0,42	0,14
0,80	49,07	1,29	9	11,85	1,12	20	5,35	0,26	35	2,85	0,44	90	0,28	0,14
0,90	47,78	1,25	10	10,73	0,97	21	5,09	0,25	40	2,41	0,36	95	0,14	0,14
1,00	46,53		11	9,76	0,76	22	4,84	0,23	45	2,05	0,30	100	0,00	
			12	9,00		23	4,61		50	1,75				

TABLE VIII. *Des corrections des réfractions moyennes correspondantes aux variations des densités atmosphériques, et indiquées par les hauteurs des colonnes de mercure dans le baromètre et le thermomètre* (Voy. l'art. 120).

Hauteur du Thermomètre	Hauteur du baromètre.												
	0,720	0,725	0,729	0,734	0,738	0,743	0,747	0,752	0,757	0,761	0,766	0,770	0,775
37°, 5	8,859	0,864	0,869	0,875	0,880	0,885	0,890	0,896	0,902	0,907	0,912	0,918	0,923
36 ,25	0,863	0,868	0,873	0,879	0,884	0,890	0,895	0,901	0,906	0,911	0,917	0,923	0,928
35	0,867	0,873	0,878	0,883	0,889	0,894	0,899	0,905	0,911	0,916	0,921	0,928	0,932
33 ,75	0,871	0,877	0,883	0,888	0,893	0,899	0,904	0,909	0,915	0,920	0,926	0,933	0,937
32 ,5	0,876	0,881	0,887	0,893	0,898	0,903	0,908	0,914	0,919	0,925	0,931	0,937	0,942
31 ,25	0,880	8,886	0,891	0,897	0,902	0,908	0,913	0,918	0,924	0,930	0,936	0,942	0,946
30	0,885	0,891	0,896	0,901	0,907	0,912	0,918	0,923	0,929	0,935	0,940	0,946	0,951
28, 75	0,889	0,895	0,900	0,906	0,912	0,917	0,923	0,928	0,934	0,939	0,945	0,950	0,956
27 ,50	0,894	0,899	0,905	0,911	0,916	0,922	0,927	0,933	0,939	0,944	0,950	0,955	0,961
25 ,25	0,898	0,904	0,910	0,915	0,921	0,926	0,932	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	0,966
25	0,903	0,909	0,914	0,920	0,926	0,931	0,937	0,943	0,948	0,954	0,960	0,965	0,971
23 ,75	0,908	0,913	0,919	0,925	0,930	0,936	0,942	0,948	0,953	0,959	0,965	0,970	0,976
22 ,50	0,913	0,918	0,924	0,930	0,935	0,941	0,947	0,952	0,958	0,964	0,970	0,975	0,981
21 ,25	0,917	0,923	0,929	0,935	0,940	0,946	0,952	0,957	0,963	0,969	0,975	0,980	0,987
20	0,922	0,928	0,934	0,939	0,945	0,951	0,957	0,963	0,968	0,974	0,980	0,986	0,992
18 ,75	0,927	0,933	0,939	0,944	0,950	0,956	0,962	0,968	0,973	0,979	0,985	0,991	0,997
17 ,50	0,932	0,938	0,944	0,950	0,955	0,961	0,967	0,973	0,979	0,985	0,990	0,996	1,002
16 ,25	0,937	0,943	0,949	0,955	0,960	0,966	0,972	0,978	0,984	0,990	0,996	1,001	1,007
15	0,942	0,948	0,954	0,961	0,965	0,971	0,977	0,984	0,990	0,995	1,001	1,007	1,013
13 ,75	0,947	0,953	0,959	0,965	0,971	0,977	0,983	0,989	0,995	1,001	1,006	1,012	1,018
12 , 5	0,952	0,959	0,964	0,970	0,976	0,982	0,988	0,994	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024
11 ,25	0,958	0,964	0,970	0,976	0,982	0,987	0,994	0,999	1,006	1,012	1,018	1,024	1,029
10	0,963	0,969	0,975	0,981	0,987	0,993	0,999	1,005	1,011	1,017	1,024	1,029	1,035
8, 75	0,968	0,974	0,981	0,986	0,993	0,999	1,005	1,011	1,016	1,023	1,029	1,035	1,041
7 ,50	0,974	0,980	0,986	0,992	0,998	1,004	1,010	1,016	1,022	1,028	1,034	1,041	1,047
6, 25	0,979	0,985	0,991	0,997	1,004	1,010	1,016	1,022	1,028	1,034	1,040	1,046	1,052
5	0,985	0,991	0,997	1,003	1,009	1,015	1,022	1,028	1,034	1,040	1,046	1,052	1,058
3 ,75	0,990	0,997	1,003	1,009	1,015	1,021	1,027	1,034	1,040	1,046	1,052	1,058	1,065
2 ,50	0,996	1,002	1,008	1,015	1,021	1,027	1,033	1,039	1,046	1,052	1,058	1,064	1,071
1 ,25	1,002	1,008	1,014	1,020	1,027	1,033	1,039	1,045	1,052	1,058	1,064	1,071	1,077
0	1,007	1,014	1,020	1,026	1,033	1,039	1,045	1,052	1,058	1,064	1,070	1,077	1,083
—1,25	1,013	1,020	1,026	1,032	1,037	1,045	1,051	1,058	1,064	1,070	1,077	1,083	1,089
—2,50	1,019	1,026	1,032	1,036	1,045	1,051	1,057	1,064	1,070	1,077	1,083	1,089	1,096
—3,75	1,025	1,032	1,038	1,044	1,051	1,057	1,063	1,070	1,077	1,083	1,090	1,095	1,102
—5	1,031	1,038	1,044	1,051	1,057	1,062	1,070	1,076	1,083	1,089	1,096	1,102	1,108
—6,25	1,037	1,044	1,051	1,057	1,063	1,068	1,076	1,083	1,089	1,096	1,102	1,109	1,115
—7, 5	1,044	1,050	1,057	1,063	1,070	1,075	1,082	1,089	1,096	1,103	1,109	1,116	1,122
—8,75	1,050	1,056	1,063	1,070	1,076	1,082	1,089	1,096	1,103	1,109	1,114	1,122	1,129
—10	1,056	1,063	1,070	1,076	1,083	1,089	1,096	1,102	1,109	1,116	1,120	1,129	1,136

TABLE IX. *Servant à calculer les temps des phases de la lune pour le méridien de Paris.* (Voyez l'usage de ces Tables à l'article 153.)

N.° I. Pour les années.

Années.	J.	H.	M	A	P	Années.	J.	H.	M	A	P	Années.	J.	H.	M	A	P
Biss. 1804	2.	22.	50	958	4	Bissex. 1820	6.	0.	11	157	1	Bissex. 1836	1.	16.	21	88	3
1805	7.	2.	0	354	2	1821	2.	18.	10	286	1	1837	5.	19.	31	485	1
1806	3.	20.	0	483	3	1822	6.	21.	21	682	3	1838	2.	13.	31	613	2
1807	0.	13.	69	611	1	1823	3.	15.	20	816	4	1839	6.	16.	41	10	4
Biss. 1808	3.	17.	10	8	2	Biss. 1824	6.	18.	31	207	2	Biss. 1840	2.	10.	41	138	1
1809	0.	11.	9	136	3	1825	3.	12.	30	335	3	1841	6.	13.	51	536	3
1810	4.	14.	20	533	1	1826	0.	6.	30	464	4	1842	3.	7.	51	663	4
1811	1.	8.	19	661	2	1827	4.	9.	40	860	2	1843	0.	1.	51	792	1
Biss. 1812	4.	11.	30	57	4	Biss. 1828	0.	3.	40	989	3	Biss. 1844	3.	5.	1	188	3
1813	1.	5.	30	186	1	1829	4.	6.	51	385	1	1845	7.	8.	12	584	1
1814	5.	8.	40	582	3	1830	1.	0.	50	514	2	1846	4.	2.	11	713	2
1815	2.	2.	40	711	4	1831	5.	4.	1	910	4	1847	0.	20.	11	841	3
Biss. 1816	5.	5.	50	107	2	Biss. 1832	0.	22.	1	39	1	Biss. 1848	3.	23.	22	238	1
1817	1.	23.	50	236	3	1033	5.	1.	11	435	3	1849	0.	17.	21	366	2
1818	6.	3.	1	632	1	1834	1.	19.	11	563	1	1850	4.	20.	32	763	4
1819	2.	21.	0	761	2	1835	5.	22.	21	960	2						

N.° II. Pour les mois.

Mois.	J.	H.	M	A	P	Mois.	J.	H.	M	A	P	Mois.	J.	H.	M	A	P
Janvier.	7.	9.	40	269	1	Mai.	5.	15.	8	560	1	Septembre.	7.	20.	5	104	2
	14.	19.	19	538	2		12.	23.	58	827	2		15.	5.	10	376	3
	22.	4.	57	807	3		20.	8.	45	94	3		22.	14.	19	639	4
	29.	14.	35	75	4		27.	17.	29	362	4		29.	23.	32	907	1
Fevrier.	6.	0.	10	344	1	Juin.	4.	2.	11	629	1	Octobre.	7.	8.	48	174	2
	13.	9.	34	612	2		11.	10.	51	896	2		14.	18.	9	443	3
	20.	19.	15	881	3		18.	19.	30	163	3		22.	3.	32	711	4
	28.	4.	43	149	4		26.	4.	9	430	4		29.	12.	59	980	1
Mars.	7.	14.	8	417	1	Juillet.	3.	12.	47	698	1	Novembre.	5.	22.	29	248	2
	14.	23.	29	685	2		10.	21.	26	965	2		13.	8.	1	517	3
	22.	8.	47	953	3		18.	6.	7	232	3		20.	17.	35	785	4
	29.	18.	0	221	4		25.	14.	49	499	4		28.	3.	11	54	1
Avril.	6.	3.	10	489	1	Août.	1.	23.	34	766	1	Décembre.	5.	12.	49	322	2
	13.	12.	15	757	2		9.	8.	21	34	2		12.	22.	17	591	3
	20.	21.	17	25	3		16.	17.	12	301	3		20.	8.	6	860	4
	28.	16.	14	292	4		24.	2.	6	568	4		27.	17.	46	129	1
							31.	11.	5	836	1						

Suite de la TABLE IX.

N.° III. Corrections toujours additives.

A	Syzygies.	Quadratur.	A	Syzygies.	Quadratur.	A	Syzygies.	Quadratur.
0	15^{h} 14^{m}	15^{h} 14^{m}	350	22^{h} 56^{m}	27^{h} 9^{m}	700	6^{h} 4^{m}	0^{h} 58^{m}
10	15 53	16 13	360	22 33	26 33	710	5 52	0 40
20	16 32	17 11	370	22 8	25 55	720	5 42	0 25
30	17 11	18 9	380	21 42	25 15	730	5 35	0 14
40	17 49	19 7	390	21 14	24 32	740	5 29	0 7
50	18 27	20 3	400	20 45	23 47	750	5 26	0 2
60	19 4	20 58	410	20 15	23 1	760	5 25	0 0
70	19 39	21 52	420	19 44	22 13	770	5 26	0 4
80	20 14	22 44	430	19 12	21 24	780	5 30	0 12
90	20 47	23 34	440	18 40	20 33	790	5 36	0 23
100	21 18	24 22	450	18 6	19 42	800	5 45	0 37
110	21 48	25 7	460	17 33	18 49	810	5 56	0 55
120	22 16	25 51	470	16 58	17 56	820	5 9	1 16
130	22 42	26 31	480	16 24	17 2	830	6 24	1 41
140	23 7	27 9	490	15 49	16 8	840	6 42	2 10
150	23 29	27 43	500	15 14	15 14	850	7 2	2 41
160	23 49	28 15	510	14 39	14 19	860	7 24	3 16
170	23 7	28 43	520	14 4	13 25	870	7 48	3 54
180	24 23	29 8	530	13 30	12 31	880	8 14	4 34
190	24 36	29 29	540	12 56	11 38	890	8 42	5 18
200	24 47	29 47	550	12 22	10 45	900	9 12	6 4
210	24 55	30 1	560	11 49	9 53	910	9 43	6 52
220	25 2	30 12	570	11 17	9 2	920	10 16	7 42
230	25 5	30 19	580	10 45	8 13	930	10 50	8 34
240	25 7	30 22	590	10 14	7 25	940	11 26	9 28
250	25 6	30 22	600	9 45	6 38	950	12 2	10 24
260	25 2	30 17	610	9 16	5 54	960	12 39	11 20
270	24 57	30 10	620	8 48	5 14	970	13 17	12 18
280	24 49	29 59	630	8 22	4 30	980	13 56	13 16
290	24 39	29 44	640	7 57	3 51	990	14 35	14 15
						1000	15 14	15 14
300	24 27	29 26	650	7 37	3 15			
310	24 12	29 5	660	7 13	2 42			
320	23 56	28 40	670	6 53	2 12			
330	23 38	28 13	680	6 35	1 45			
340	23 18	27 42	690	6 19	1 20			

TABLE X. *De l'établissement des principaux ports, ou de l'heure à laquelle il y est pleine mer le jour de la nouvelle et pleine lune.* (Voy. l'art. 166.)

H.	M.	NOMS DES PORTS DE MER.
8	30	Amsterdam (île) *mer du Sud.*
3	0	Amsterdem, *Hollande.*
11	0	Ambleteuse, *France.*
3	0	Ardbord, *Angleterre.*
3	45	Auray, *France.*
2	15	Audierne, *Idem.*
6	0	Anvers, *Idem.*
6	0	Archangel, *Russie.*
5	15	Baltimore, *Irlande.*
7	30	Barfleur, *France.*
3	30	Bayonne, *Idem.*
3	15	Beauvoir, *Idem.*
1	30	Bergue, *Hollande.*
3	45	Brouage, *France.*
3	$33\frac{1}{3}$	Brest, *Idem.*
7	0	Berneville, *Idem.*
3	0	Blevet, *Idem.*
3	36	Belle-Isle, *Idem.*
11	0	Boulogne, *Idem.*
6	45	Bristol, *Angleterre.*
10	45	Brightematon, *Idem.*
3	0	Berwich, *Idem.*
1	30	Brille, *Hollande.*
0	0	Beachex, *Angleterre.*
0	0	Bojador(cap) *côte occident. d'Afrique.*
3	0	Bordeaux, *France.*
6	0	Cancale, *Idem.*
2	45	Cap de Four, *Idem.*
6	15	Cap de Carneroort, *Irlande.*
2	30	Cap de Bonne-Espérance, *Afrique.*
3	0	Croisic, Concareau, *France.*
7	30	Cherbourg, *Idem.*
9	0	Caen, *Idem.*
11	30	Calais, *Idem.*
6	30	Cork, *Irlande.*
4	30	Cadix, *Espagne.*
4	30	Cap Cleur, *Irlande.*
10	30	Cowes, île de Wigh, *Angleterre.*
8	30	Dives, *France.*
10 à 11	51 à	Dieppe, *Idem.*
11	45	Dunkerque, *Idem.*
6	0	Dermouth, *Angleterre.*
11	30	Douvres, *Idem.*
3	30	Dingle, *Irlande.*
3	0	Dordrecht, *Hollande.*
9	15	Dublin, *Irlande.*
6	0	Dungarnam, *Idem.*
9	45	Dunnosse ou Dungeness, *Angleterre.*
9	0	Embouchure de la Seine, *France.*
11	0	Embouchure de le Somme, *Idem.*
6	0	Embouchure du fleuve Severre, *Angleterre.*
12	0	Embouchure de la Tamise, *Idem.*
1	30	Embouchure de le Meuse, *Hollande.*
12	30	Ecluse de Flessingue, *Idem.*
3	0	Embouchure de la Loire, *France.*
8	30	Estrehan, *Idem.*
11	0	Estaple, *Idem.*
4	30	Edimbourg, *Ecosse.*
5	30	Edistune (canal d'), *Angleterre.*
9	45	Fécamp, *France.*
5	30	Famouth, Fuye, *Angleterre.*
6	45	Granville, *France.*
0	0	Gibralter, *Espagne.*
1	30	Gurée (île) *côte occident. d'Afrique.*
0	0	Gravelines, *France.*
9	0	Hâvre de Grâce et Honfleur, *Idem.*
11	0	Hestingue, *Angleterre.*
3	45	Hâvres et Rivieres à l'ouest, *Irlande.*
6	0	Hambourg, *Allemagne.*

Suite de la TABLE X.

H.	M.	NOMS DES PORTS DE MER.	H.	M.	NOMS DES PORTS DE MER.
8	0	Isigny, *France.*	11	15	Porstmouth, *Idem.*
9	0	Ile de Wigh, *Angleterre.*	11	0	Pemsey, *Idem.*
1	0	Iles de Zélande, *Hollande.*	7	30	Quebec (Canada) *Amérique.*
5	15	Kingsale, *Idem.*	1	15	Rouen, *France.*
3	45	La Rochelle, *France.*	3	45	Royan, *Idem.*
2	15	Le Ras de Fontenay, *le Conquet, Id.*	4	15	Rochefort, *Idem.*
7	30	Lezard (cap), *Angleterre.*	5	15	Rosse, *Irlande.*
4	30	La Roche-Bernard, *France.*	3	0	Rotterdam, *Hollande.*
8	0	Lime, *Angleterre.*	3	0	Ré (île de l'Océan), *France.*
2	15	Lisbonne, *Portugal.*	6	0	Saint-David, *Angleterre.*
3	0	Londres, *Angleterre.*	2	15	Sainte-Hélène, *Idem.*
3	30	Memissan, *France.*	3	30	Saint-Jean-de-Luz, *France.*
3	0	Morbihan, *Idem.*	6	0	St-John's, *Terre-Neuve, Amérique.*
6	30	Mont-Saint-Michel, *Idem.*	6	0	Saint-Malo, *France.*
6	0	Milfort, *Angleterre.*	3	45	St.-Mary's, *île de Scilly, Angleterre.*
12	4	Madeira, *Océan Atlant., Afrique.*	5	30	Saint-Michel, *Idem.*
11	45	Nieuport, *France.*	4	0	Saint-Pôl-de-Léon, *France.*
3	0	Newcastle, *Angleterre.*	9	45	Saint-Valery-en-Caux, *Idem.*
3	0	Nantes, *France.*	11	0	Saint-Valery, *Idem.*
3	0	North (cap), *Europe.*	10	30	Sénégal, *Afrique.*
3	15	Olonne, *France.*	10	30	Treport, *France.*
12	12	Ostende, *Idem.*	3	45	Vannes, *Idem.*
4	30	Onessant (île), *Idem.*	9	0	Vaymonts, *Angleterre.*
6	30	Pontorson, *Idem.*	10	38	Waterfort, *Irlande.*
8	0	Port-en-Bessin, *Idem.*	6	30	Vicklo, *Idem.*
2	15	Penemarck, *France.*	6	0	Yonghatte, *Idem.*
6	0	Plimouth, *Angleterre.*	1	30	Yarmouth, *Angleterre.*
8	0	Portland, *Idem.*	3	0	Yorck (Neuw) *Jersey, Amérique.*

TABLE XI. *Du retardement des marées qu'il faut ajouter à l'heure de l'établissement d'un port, pour avoir le temps de la plus haute marée à un jour proposé. On retranchera douze heures de la somme, si elle surpasse ce nombre.* (Voyez l'usage de cette table à l'art. 168.)

Intervalle de temps.		Après la nouvelle et pleine lune.		Avant le premier et dernier quartier de la lune.		Après le premier et dernier quartier de la lune		Avant la nouvelle et pleine lune.	
J.	H.	H.	M.	H.	M.	H.	M.	H.	M.
0	0	0	0	5	6	5	6	0	0
	3	0	4	4	58	5	14	11	56
	6	0	8	4	51	5	22	11	51
	9	0	13	4	44	5	31	11	47
	12	0	17	4	37	5	40	11	42
	15	0	22	4	30	5	50	11	37
	18	0	26	4	23	6	0	11	33
	21	0	31	4	16	6	10	11	28
1	0	0	36	4	9	6	20	11	23
	3	0	41	4	3	6	29	11	18
	6	0	45	3	56	6	39	11	13
	9	0	49	3	50	6	49	11	8
	12	0	54	3	44	6	58	11	3
	15	0	58	3	38	7	8	10	58
	18	1	2	3	32	7	18	10	53
	21	1	7	3	27	7	27	10	48
2	0	1	11	3	21	7	37	10	43
	3	1	15	3	16	7	46	10	37
	6	1	19	3	11	7	56	10	32
	9	1	24	3	6	8	5	10	27
	12	1	28	3	1	8	14	10	21
	15	1	32	2	56	8	23	10	15
	18	1	37	2	50	8	31	10	9
	21	1	41	2	45	8	37	10	3
3	0	1	46	2	40	8	47	9	56
	3	1	50	2	35	8	55	9	50
	6	1	54	2	30	9	2	9	44
	9	1	59	2	25	9	9	9	37
	12	2	3	2	21	9	17	9	31
	15	2	7	2	16	9	24	9	24
	18	2	12	2	12	9	31	9	17
	21	2	16	2	7	9	37	9	9
4	0	2	21	2	3	9	44	9	2

TABLE XII. *Des courans et des vents réglés dans les principales parties de la mer.* (Extraite de l'Abrégé de Navigation de M. de Lalande, voy. l'art. 169.)

I. Dans la Manche.

Les courans portent ordinairement à entrer dans la Manche du côté de l'ouest : de mer retirante ils portent aussi dehors; mais c'est si peu de chose, qu'aussitôt que les vaisseaux se trouvent à 15 ou 20 lieues à l'ouest de Belle-Isle, dans les temps de calme, ils sont sujets à être transportés insensiblement dans la Manche.

Il y règne des vents très-variables, qui, vers les trois derniers mois de l'année, tiennent plus communément du côté de l'ouest ou d'aval. Pendant les trois premiers mois, les vents d'amont ou du côté de l'est sont plus fréquens.

II. Mer Méditerranée.

Dans les détroits de Gibraltar, les courans portent presque toujours vers l'est; les vaisseaux ont donc une grande facilité pour entrer dans la Méditerranée par le détroit de Gibraltar, même lorsqu'ils ont le vent-debout. Ils ne peuvent au contraire en sortir qu'avec des vents favorables et plus rares.

Les vents qui règnent dans la Méditerranée, suivent la direction du canal, et sont communément ou tout à fait contraires ou entièrement favorables.

III. Côtes d'Afrique.

Par 24° de latitude nord, et par 2 à 4° de longitude, comptée de l'Isle-de-Fer, les vents et les courans portent au S E contre la côte.

Côte de Guinée. Depuis 11° de latitude nord jusqu'à 24° de latitude sud, entre le premier méridien, et environ 25° de longitude, les vents et les courans portent au N E contre la côte.

A l'est de l'Afrique, dans le canal de Mozambique, entre le pays des Cafres et l'île de Madagascar, depuis 15° de latitude sud, jusqu'à la ligne, entre 56° et 70° de longitude, les vents et les courans portent au N E en mai et juin; ils font quelquefois faire aux vaisseaux le double du chemin estimé, surtout en allant vers l'est.

IV. Mer des Indes.

Entre le détroit de Babel-Mandel et la côte de Malabar, depuis 10° de latitude nord jusqu'à 20, entre 70 et 90° de longitude, les vents et les courans portent

au N E en avril, mai, juin, juillet, août et septembre; ils portent au S O en octobre, novembre, décembre, janvier, février et mars.

Dans le golfe de Bengale, depuis le nord de l'île de Ceylan, entre 10 et 18° de latitude nord, entre 100 et 110° de longitude, les vents et les courans portent au N E en avril, mai et juin, leur direction est au S O en octobre, novembre et décembre.

Depuis le N O de l'île de Bornéo jusqu'aux Philippines, entre 5 et 20° de latitude nord, entre 120 et 140° de longitude, les vents et les courans portent au N E en avril, mai, juin, juillet, août et septembre; ils portent au S O en octobre, novembre, décembre, janvier, février et Mars.

Depuis la ligne jusqu'à 12° de latitude sud, entre 96 et 115° de longitude, les vents et les courans portent au S E en novembre, décembre, janvier, février, mars et avril; et au N O en mai, juin, juillet, août, septembre et octobre.

V. Route de l'Amérique.

Vers l'Amérique méridionale, à 12 ou 13° de latitude nord, entre 300 et 312° de longitude, près de la côte, les vents et les courans portent à l'E un peu vers le N, et un peu plus loin à l'O un peu vers le sud.

A la côte du Brésil, depuis 7° jusqu'à 25° de latitude sud, entre 343 et 312° de longitude, les vents et les courans portent au sud, un peu vers l'ouest, depuis septembre jusqu'en mars; dans les six autres mois au nord, un peu vers l'est.

Entre les tropiques et un peu au-delà, à une certaine distance de la côte, excepté les lieux indiqués ci-dessus, les vents et les courans portent à l'ouest, tantôt vers le nord, et tantôt un peu vers le sud. Le mouvement des courans est environ 3 lieues par jour.

En général, les vents et les courans se dirigent vers l'ouest, dans presque toute l'étendue de la zône torride; mais les terres qui y sont, détournent aussi les vents de leur première direction; ils s'écartent de la ligne droite, pour aller rencontrer les côtes presque perpendiculairement, ce qui provient de la chaleur du continent, qui attire l'air par la raréfaction.

Aux environs du point d'intersection du premier méridien et de l'équateur, il règne souvent des calmes et des orages, que les marins ne sauroient éviter avec trop de soin.

VI. En Canada.

Le N E et le S O règnent alternativement, et quelquefois le N O qui dure peu : le N E commence sur la fin d'automne, et dure tout l'hiver.

Mer du Sud.

En allant de la Nouvelle-Hollande aux côtes du Pérou, M. de Surville éprouva, en 1770, que l'on étoit de 180 lieues plus près de l'Amérique, par l'effet des courans vers la latitude de 34°; d'où il conclut que ce seroit le plus court pour le temps, d'aller au Pérou par le Cap de Bonne-Espérance et la mer du Sud. (M. de Laborde, *Histoire de la mer du Sud*, tom. II, pag. 110).

TABLE XIII. *Des erreurs des surfaces du grand miroir, lorsque ces surfaces font entr'elles un angle d'une minute.* (Voyez l'article 191, et encore mieux la note XVII.)

Angles observés.	Observations à droite.	Observations à gauche.	Observations croisées.
0	0″	0″	0″
10	2	1	2
20	6	2	4
30	10	1	6
40	16	0	8
45	19	1	9
50	23	2	11
55	28	4	12
60	33	6	14
65	38	8	16
70	47	10	18
75	55	13	21
80	1′ 4	16	24
85	1 15	19	28
90	1 28	23	32
95	1 43	28	37
100	2 1	33	43
105	2 23	38	53
110	2 50	47	1′ 2
115	3 23	55	1 12
120	4 5	1′ 4	1 31
125	5 0	1 15	1 53
130	6 15	1 28	2 23

TABLE XIV. ***Des corrections pour la déviation du plan dans lequel on observe le contact.*** (Voyez les art. 193 et 194.)

Angles observés.	Quantité de la déviation.										
	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′	60′
0°	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″
10	0	0 0	1	1	2	2	3	3	4	5	6
20	0	1	1	2	3	4	5	6	8	9	11
30	0	1	2	3	4	6	8	10	12	14	17
40	1	1	3	4	6	8	10	13	16	19	23
50	1	2	3	5	7	10	13	16	20	24	29
60	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
65	1	3	4	7	10	14	18	23	28	34	40
70	1	3	5	8	11	15	20	25	31	37	44
75	1	3	5	8	12	16	21	27	33	40	48
80	1	3	6	9	13	18	24	30	37	45	53
85	2	4	6	10	15	20	26	33	40	49	58
90	2	4	7	11	16	21	28	35	44	53	1 3
95	2	4	8	12	17	23	31	39	48	58	1 9
100	2	5	9	13	19	26	34	42	52	1 3	1 15
105	2	5	9	14	21	28	36	46	57	1 9	1 22
110	3	6	10	16	23	31	40	51	1 3	1 16	1 30
115	3	6	11	17	25	34	44	56	1 9	1 23	1 39
120	3	7	12	19	27	37	48	1 1	1 16	1 32	1 49
125	3	8	13	21	30	41	53	1 8	1 24	1 41	2 0
130	4	8	15	23	34	46	1 0	1 16	1 34	1 53	2 15
140	5	11	19	30	43	59	1 17	1 37	2 0	2 25	2 53
150	6	15	26	41	59	1 20	1 44	2 12	2 42	3 17	3 54
160	10	22	40	1 2	1 29	2 1	2 38	3 20	4 7	4 59	5 56
170	20	44	1 19	2 3	2 58	4 2	5 16	6 40	8 14	9 57	11 51
180	20 0	30 0	40 0	50 0	60 0	70 0	80 0	90 0	100 0	110 0	120 0

TABLE XV. ***Parallaxe de hauteur du soleil qu'il faut ajouter à la hauteur apparente corrigée de la réfraction pour avoir la hauteur vraie.*** (Voyez l'article 199.)

Degrés.	de 0 à 33	33 à 41	41 à 50	50 à 59	59 à 65	65 à 76	76 à 80	80 à 86	86 à 90
Nombre de secondes qu'il faut ajouter à la haut. app. du soleil.	8	7	6	5	4	3	2	1	0

TABLE XVI. *Des parties proportionnelles de la déclinaison du Soleil.* (Voyez l'art. 200.)

Mouvement diurne en déclinaison.	HEURES.											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	0′, 0	0′, 1	0′, 1	0′, 2	0′, 2	0′,25	0′, 3	0′, 3	0′, 4	0′, 4	0, 5	0, 5
2	0, 1	0, 2	0,25	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	0, 7	0,75	0, 8	0, 9	1, 0
3	0, 1	0,25	0, 4	0, 5	0, 6	0,75	0, 9	1, 0	1, 1	1,25	1, 4	1, 5
4	0, 2	0, 3	0, 5	0, 7	0, 8	1, 0	1, 2	1, 3	1, 5	1, 7	1, 8	2, 0
5	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8	1, 0	1,25	1, 5	1, 7	1, 9	2, 1	2, 3	2, 5
6	0,25	0, 5	0,75	1, 0	1,25	1, 5	1,75	2, 0	2,25	2, 5	2,75	3, 0
7	0, 3	0, 6	0, 9	1, 2	1, 5	1,75	2, 0	2, 3	2, 6	2, 9	3, 2	3, 5
8	0, 3	0, 7	1, 0	1, 3	1, 7	2, 0	2, 3	2, 7	3, 0	3, 3	3, 7	4, 0
9	0, 4	0,75	1, 1	1, 5	1, 9	2,25	2, 6	3, 0	3, 4	3,75	4, 1	4, 5
10	0, 4	0, 8	1,25	1, 7	2, 1	2, 5	2, 9	3, 3	3,75	4, 2	4, 6	5, 0
11	0, 5	0, 9	1, 4	1, 8	2, 3	2,75	3, 2	3, 7	4, 1	4, 6	5, 0	5, 5
12	0, 5	1, 0	1, 5	2, 0	2, 5	3, 0	3, 5	4, 0	4, 5	5, 0	5, 9	6, 0
13	0, 5	1, 1	1,6	2, 2	2, 7	3,25	3, 8	4, 3	5, 9	5, 4	6, 0	6, 5
14	0, 6	1, 2	1,75	2, 3	2, 9	3, 5	4, 1	4, 7	5,25	5, 8	6, 4	7, 0
15	0, 6	1,25	1, 9	2, 5	3, 1	3,75	4, 4	5, 0	5, 6	6,25	6, 5	7, 5
16	0, 7	1, 3	2, 0	2, 7	3, 3	4, 0	4, 7	5, 3	6, 0	6, 7	7, 3	8, 0
17	0, 7	1, 4	2, 1	2, 8	3, 5	4,25	5, 0	5, 7	6, 4	7, 1	7, 8	8, 5
18	0,75	1, 5	2,25	3, 0	3,75	4, 5	5,25	6, 0	6,75	7, 5	8,25	9, 0
19	0, 8	1, 6	2, 4	3, 2	4, 0	4,75	5, 5	6, 3	7, 1	7, 9	8, 7	9, 5
20	0, 8	1, 7	2, 5	3, 3	4, 2	5, 0	5, 8	6, 7	7, 5	8, 3	9, 2	10, 0
21	0, 9	1,75	2, 6	3, 5	4, 4	5,25	6, 1	7, 0	7, 9	8,75	9, 6	10, 5
22	0, 9	1, 8	2,75	3, 7	4, 9	5, 5	6, 4	7, 3	8,25	9, 2	10, 1	11, 0
23	0, 0	1, 9	2, 9	3, 8	4, 8	5,75	6, 7	7, 7	8, 6	9, 6	10, 5	11, 5
24	0, 0	2, 0	3, 0	4, 0	5, 0	6, 0	7, 0	8, 0	9, 0	10, 0	11, 0	12, 0
0,1	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0,05
0,2	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0,05	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1
0,3	0, 0	0, 0	0, 0	0,05	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0,15
0,4	0, 0	0, 0	0,05	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0,15	0, 2	0, 2	0, 2
0,5	0, 0	0, 0	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 2	0, 2	0, 2	0, 2	0,25
0,6	0, 0	0,05	0, 1	0, 1	0, 1	0,15	0, 2	0, 2	0, 2	0,25	0, 3	0, 3
0,7	0, 0	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 2	0, 2	0, 2	0, 3	0, 3	0, 3	0,35
0,8	0, 0	0, 1	0, 1	0, 1	0, 2	0, 2	0, 2	0, 3	0, 3	0, 3	0, 4	0, 4
0,9	0, 0	0, 1	0, 1	0,15	0, 2	0, 2	0, 3	0, 3	0, 3	0, 4	0, 4	0,45

Suite de la TABLE XVI. *Des parties proportionnelles de la déclinaison du soleil.*

Mouvement diurne en déclinaison.	HEURES.											
	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV
1′	0′, 5	0′, 6	0′, 6	0′, 7	0, 7	0′,75	0′, 8	0′, 8	0′, 9	0′, 9	0′, 9	1′,0
2	1, 1	1, 2	1,25	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	1,75	1, 8	1, 9	2,0
3	1, 6	1,75	1, 9	2, 0	2, 1	2,25	2, 4	2, 5	2, 6	2,75	2, 9	3,0
4	2, 2	2, 3	2, 5	2, 7	2, 8	3, 0	3, 2	3, 3	3, 5	3, 7	3, 8	4,0
5	2, 7	2, 9	3, 1	3, 3	3, 5	3,75	4, 0	4, 2	4, 4	4, 6	4, 8	5,0
6	3,25	3, 5	3,75	4, 0	4,25	4, 5	4,75	5, 0	5,25	5, 5	5,75	6,0
7	3, 8	4, 1	4, 4	4, 7	5, 0	5,25	5, 5	5, 8	6, 1	6, 4	6, 7	7,0
8	4, 3	4, 7	5, 0	5, 5	5, 7	6, 0	6, 3	6, 7	7, 0	7, 3	7, 7	8,0
9	4, 9	5,25	5, 6	6, 0	6, 4	6,75	7, 1	7, 5	7, 9	8,25	8, 6	9,0
10	5, 4	5, 8	6,25	6, 7	7, 1	7, 5	7, 9	8, 3	8,75	9, 2	9, 6	10,0
11	6, 0	6, 4	6, 9	7, 3	7, 8	8,25	8, 7	9, 2	9, 6	10, 1	10, 5	11,0
12	6, 5	7, 0	7, 5	8, 0	8, 5	9, 0	9, 5	10, 0	10, 5	11, 0	11, 5	12,0
13	7, 0	7, 6	8, 1	8, 7	9, 2	9,75	10, 3	10, 8	11, 4	11, 9	12, 5	13,0
14	7, 6	8, 2	8,75	9, 3	9, 9	10, 5	11, 1	11, 7	12,25	12, 8	13, 4	14,0
15	8, 1	8,75	9, 4	10, 0	10, 6	11,25	11, 9	12, 5	13, 1	13,75	14, 4	15,0
16	8, 7	9, 3	10, 0	10, 7	11, 3	12, 0	12, 7	13, 3	14, 0	14, 7	15, 3	16,0
17	9, 2	9, 9	10, 6	11, 3	12, 2	12,75	13, 5	14, 2	14, 9	15, 6	16, 3	17,0
18	9,75	10, 5	11,25	12, 0	12,75	13, 5	14,25	15, 0	15,75	16, 5	17,25	18,0
19	10, 3	11, 1	11, 9	12, 7	13, 5	14,25	15, 0	15, 8	16, 6	17, 4	18, 2	19,0
20	10, 8	11, 7	12, 5	13, 3	14, 2	15, 0	15, 8	16, 7	17, 5	18, 3	19, 2	20,0
21	11, 4	12,25	13, 1	14, 0	14, 9	15,7	16, 6	17, 5	18, 4	19,25	20, 1	21,0
22	11, 9	12, 8	13,75	14, 7	15, 6	16, 5	17, 4	18, 3	19,25	20, 2	21, 1	22,0
23	12, 5	13, 4	14, 4	15, 3	16, 3	17,25	18, 2	19, 2	20, 1	21, 1	22, 0	23,0
24	13, 0	14, 0	15, 0	16, 0	17, 0	18, 0	19, 0	20, 0	21, 0	22, 0	23, 0	24,0
0″,1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1
0,2	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0,15	0, 1	0, 2	0, 2	0, 2	0, 2	0, 2
0,3	0, 2	0, 2	0, 2	0, 2	0, 2	0, 2	0, 2	0,25	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3
0,4	0, 2	0, 2	0,25	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3	0,35	0, 4	0, 4	0, 4
0,5	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3	0, 4	0, 4	0, 4	0, 4	0, 4	0, 5	0, 5	0, 5
0,6	0, 3	0,35	0, 4	0, 4	0, 4	0,45	0, 5	0, 5	0, 5	0,55	0, 6	0, 6
0,7	0, 4	0, 4	0, 4	0, 5	0, 5	0, 5	0, 6	0, 6	0, 6	0, 6	0, 7	0, 7
0,8	0, 4	0, 5	0, 5	0, 5	0, 6	0, 6	0, 6	0, 7	0, 7	0, 7	0, 8	0, 8
0,9	0, 5	0, 5	0, 6	0, 6	0, 6	0, 7	0, 7	0,75	0, 8	0, 8	0, 9	0, 9

Suite de la TABLE XVI. ***Des parties proportionnelles de la déclinaison du soleil.***

Mouvement diurne en déclinaison	MINUTES.											
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
1′	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
3	0,0	0,0	0,0	0,0	1,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
4	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2
5	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2
6	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,25
7	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
8	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,25	0,3	0,3	0,3
9	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	8,25	0,3	0,3	0,3	0,4
10	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4
11	0,0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5
12	0,0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,25	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5
13	0,0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5
14	0,0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,5	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6
15	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6
16	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7
17	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	0,7
18	0,1	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,75
19	0,1	0,1	0,2	8,3	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8
20	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,8
21	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9
22	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,9
23	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
24	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1,0

TABLE XVII. *Catalogue de vingt étoiles australes de première et seconde grandeurs, dont les déclinaisons sont plus grandes que le complément de la latitude de Paris, et qui conséquemment ne sont pas marquées dans la* Connoissance des Temps, *où l'on a seulement mis les étoiles visibles à Paris.*

NOMS ET GRANDEURS des ÉTOILES.		Ascension droite moyenne. Premier janvier 1805.						Variation annuelle.	Déclinaison moyenne le 1.er janvier 1805.			Variation annuelle.
		H.	M.	S.	D.	M.	S.	S. Dix.	D.	M.	S.	S. Dix.
α Tête du Phénix	2	0	16	37	4	9	15	45, 0	43	21	32	—20, 0
α Source de l'Eridan, *Achernar*	1	1	30	27	22	36	45	33, 8	58	14	41	—18, 5
α La tête de l'Hydre mâle	2	1	52	36	28	9	0	28, 1	62	31	21	—17, 7
α Le gouvernail du Navire *Canobus*	1	6	19	38	94	54	30	20, 1	52	35	36	1, 7
γ La précédente au corps du Navire	2	8	3	32	120	53	0	27, 9	46	45	58	10, 3
ι La suivante au corps du Navire	2	8	18	30	124	37	30	18, 6	58	53	25	11, 9
δ La claire au milieu du Navire	2	8	39	20	129	50	0	25, 1	53	59	44	12, 8
β La claire des rames du Navire	1	9	11	3	137	45	45	11,25	68	55	0	14, 8
η La dernière du Navire	2	10	37	33	159	23	15	34, 5	58	39	48	18, 8
δ La précédente à la croupe du Centaure	2	11	58	19	879	34	45	45, 9	49	38	1	20, 0
α Le pied de la Croix du Sud	1	12	15	53	183	58	15	48, 8	62	1	6	20, 0
γ La tête de la Croix du Sud	2	12	20	26	185	6	30	48, 8	56	1	2	20, 0
γ La suivante à la croupe du Centaure	2	12	30	51	187	42	45	49, 1	47	53	7	19, 9
β Le bras suivant de la Croix du Sud	2	12	36	26	189	6	30	51, 3	58	37	16	19, 8
ε Le ventre du Centaure	2	13	27	49	201	57	15	55, 8	52	28	0	18, 6
β Le pied précédent du Centaure	1	13	50	13	207	33	15	61, 8	59	25	22	17, 8
α Le pied suivant du Centaure	1	14	26	54	222	43	30	66, 9	60	1	57	16, 1
α La claire du Triangle austral	2	16	28	10	247	32	30	90, 3	68	38	46	7, 9
α L'œil du Paon	2	20	10	8	302	32	0	72, 6	57	22	30	—10, 8
α L'aile de la Grue	2	21	55	52	328	58	0	57, 6	47	56	34	—17, 2

TABLE XVIII. *Des hauteurs auxquelles il faut observer le Soleil pour déterminer l'heure vraie du lieu de l'observation.* (Art. 242).

Latitudes.	DECLINAISON DU SOLEIL.											
	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
0°	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′
2	4 55	5 21	5 52	6 29	7 17	8 18	9 40	11 36	14 31	19 50	30 1	90 0
4	9 53	10 43	9 20	13 3	14 40	16 45	19 36	23 41	30 5	41 52	90 0	30 1
6	14 53	16 12	17 48	19 46	22 17	25 36	30 11	40 9	48 40	90 0	41 52	19 30
8	20 1	21 48	24 1	16 46	30 20	35 7	42 1	53 16	90 0	48 41	30 5	14 31
10	25 16	27 37	30 30	34 11	39 3	45 52	56 38	90 0	53 17	37 0	23 41	11 35
12	30 44	33 42	37 26	42 17	48 58	59 15	90 0	56 39	41 2	30 11	19 36	9 40
14	36 30	40 13	45 1	51 31	61 22	90 0	59 15	45 53	35 7	25 36	16 45	8 18
16	42 39	47 22	50 12	63 6	90 0	61 23	48 59	39 4	30 20	22 17	14 40	7 16
18	49 26	55 34	64 37	90 0	63 8	51 52	42 17	34 11	26 46	19 46	13 3	6 29
20	57 13	65 54	90 0	64 40	53 43	45 2	37 27	30 31	24 1	17 48	11 46	5 51
22	67 5	90 0	65 56	55 35	47 22	40 14	33 43	27 37	21 49	16 12	10 44	5 21
24	90 0	67 6	57 15	49 27	42 40	36 30	30 45	25 17	20 1	14 53	9 53	4 55
26	68 7	58 44	51 18	44 50	38 58	33 30	28 19	23 21	18 31	13 48	9 9	4 34
28	60 3	52 57	46 47	41 10	35 57	31 1	26 17	21 43	17 15	12 52	8 33	4 16
30	50 26	48 32	43 10	38 11	33 57	28 56	24 34	20 19	16 10	12 4	8 1	4 0
32	50 8	45 0	40 12	35 41	31 20	27 10	23 6	19 8	15 14	11 23	7 34	3 52
34	46 40	42 4	37 43	33 33	29 32	25 38	21 60	18 8	14 25	10 46	7 10	3 35
36	43 48	39 56	35 35	31 43	27 58	24 18	20 43	17 11	13 42	10 15	6 49	3 24
38	41 22	37 29	33 45	30 8	26 36	23 9	19 44	16 23	13 4	9 47	6 31	3 15
40	39 15	35 59	32 9	28 44	25 24	22 7	18 52	15 40	12 30	9 21	6 14	3 7
42	37 26	34 3	30 45	27 30	24 20	21 12	18 6	15 3	11 59	8 59	5 59	2 59
44	35 50	32 38	29 30	26 25	23 23	20 23	17 25	14 29	11 33	8 39	5 46	2 53
46	34 26	31 23	28 24	25 27	22 32	19 39	16 48	13 58	11 10	8 21	5 34	2 47
48	33 11	30 16	27 27	24 34	21 46	19 0	16 15	13 31	10 48	8 5	5 23	2 41
50	32 4	29 17	26 32	23 48	21 5	18 25	15 45	13 6	10 28	7 50	5 13	2 35
52	31 5	28 23	25 44	23 6	20 27	17 53	15 18	12 44	10 11	7 37	5 5	2 33
54	30 11	27 35	25 1	22 28	19 55	17 24	14 53	12 24	9 54	7 25	4 57	2 28
56	29 23	26 52	24 22	21 53	19 25	16 58	14 52	12 6	9 40	7 14	4 50	2 25
58	28 40	26 13	23 47	21 22	18 58	16 35	14 12	11 49	9 27	7 4	4 43	2 22
60	28 1	25 38	23 16	20 54	18 33	15 13	13 54	11 34	9 15	6 56	4 37	2 19
62	27 26	25 7	22 48	20 30	18 12	15 54	13 37	11 21	9 4	6 48	4 31	2 16
64	26 54	24 38	22 22	20 7	17 53	15 37	13 23	11 9	8 53	6 41	4 27	2 14
66	26 26	24 13	22 0	19 46	17 34	15 22	13 10	10 58	8 44	6 34	4 22	2 12
68	25 1	23 50	21 39	19 28	17 18	15 8	12 58	10 48	8 37	6 28	4 19	2 9
70	25 39	23 30	21 21	19 12	17 3	14 55	12 47	10 39	8 31	6 23	4 13	2 8
72	25 19	23 12	21 5	18 54	16 51	14 44	12 38	10 31	8 25	6 19	4 12	2 6
74	25 2	22 56	20 51	18 45	16 40	14 35	12 30	10 25	8 20	6 15	4 9	2 5
76	24 47	22 43	20 39	18 34	16 30	14 27	12 23	10 19	8 15	6 11	4 7	2 4
78	24 34	22 31	20 29	18 25	16 22	14 19	12 16	10 14	8 11	6 8	4 5	2 3
80	24 24	22 22	20 20	18 17	16 15	14 14	12 11	10 10	8 8	6 5	4 4	2 2

TABLE XIX. *De la correction qu'il faut faire à la longitude et à la latitude de la lune trouvées par des parties proportionnelles.* (Art. 281.)

Heures après midi ou minuit.		Seconde différence prise de douze en douze heures.											
		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
H.	M.	séc.	séc.	séc.	séc.	séc.	séc.	séc.	séc.	séc.	séc.	H.	M.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0
0	20	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	11	40
0	40	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	11	20
1	0	2	5	7	9	11	14	16	18	21	23	11	0
1	20	3	6	9	12	14	17	20	23	26	30	10	40
1	40	4	7	11	14	18	21	25	29	32	36	10	20
2	0	4	8	13	17	21	25	29	34	38	42	10	0
2	20	5	9	14	19	23	28	33	38	42	47	9	40
2	40	5	10	15	20	25	31	36	41	46	52	9	20
3	0	6	11	17	22	28	34	39	45	50	56	9	0
3	20	6	12	18	24	30	35	41	47	52	60	8	40
3	40	6	13	19	25	31	38	44	50	57	64	8	20
4	0	7	13	20	26	33	40	46	53	59	67	8	0
4	20	7	14	20	27	34	41	48	54	61	69	7	40
4	40	7	14	21	28	35	43	50	57	64	71	7	20
5	0	7	15	22	29	36	44	51	58	66	73	7	0
5	30	7	15	22	30	37	45	52	60	67	74	6	30
6	0	8	15	23	30	38	45	52	60	68	75	6	0

Ajoutez, quand le mouvement de douze en douze heures décroît.
Otez, quand ce mouvement va en croissant.

APPENDIX.

Ayant fait les opérations graphiques indiquées aux articles 49 .... 53 sur le dessin de la figure 12, et cette partie de l'ouvrage ayant été imprimée avant la gravure des planches, nous nous sommes aperçus que les parties de cette figure gravée avoient éprouvé quelques petites anomalies qui changent un peu les résultats indiqués aux articles cités. Voici ces petites différences :

Page 42, ligne 19; 15⅔, *lisez* 16⅓.
Id., lig. 20; 94′ ou 1° 34′, *lisez* 97′ ou 1° 37′.
Id., lig. 22; 40′, *lisez* 43′.
Pag. 44, lig. 17; 29°, *lisez* 29°⅓.
Pag. 46, lig. 5; 25° 30′, *lisez* 26°.
Id., lig. 7; SSO 3° O, *lisez* SSO 3° 30′ O.
Id., lig. 17; 17 espaces, ce qui fait 17°, *lisez* 16¾ espaces, ce qui fait 17° 45′.
Id., lig. 19; 38° 17′, *lisez* 38° 2′.
Pag. 48, les résultats seront exacts, si l'on relève un peu la ligne C*hsi* dans la fig. 12, comme cela doit être.
Pag. 48, lig. 22; C2oC*h*, *lisez* C2o*h*.
Pag. 49, lig. 5, à partir du bas de la page; 31°, *lisez* 30°⅓.
Pag. 49, lig. 4 par en bas; 30, *lisez* 30⅓.
Id., lig. 3 par en bas; 155′, *lisez* 152′⅓.
Pag. 233, pénultième ligne, cos. ¹S, *lisez* cos. ½S.
Page 283, lig. 18, MA′, *lisez* *m*A′.
Id., lig. 21, MA′, *lisez* *m*A′.
Pag. 320, lig. 30, 1°, *lisez* 1.
Pag. 366, lig. 15; il manque le chiffre 2 qui doit marquer le numéro de cet article.
Page 380, lig. 8; $F = S\left(\frac{v''}{v^3} - \frac{1}{v'^2}\right) \sin. a$, *lisez* $F = S\left(\frac{v''}{v^3} - \frac{1}{v''^2}\right) \sin. a$.
Pag. 388, lig. 9; IQP, *lisez* IQ*p*.

TABLE SOMMAIRE.

Articles. Pages.

NOTES.

TABLES.

FIN DE LA TABLE.



